

INFO2009 - Introduction à l'informatique

L'invariant en 4 étapes

Bertrand Alexis

Université de Liège

2025

Préambule

Attention, nous abordons ici la méthode des invariants pour **une** boucle. Si vous avez des boucles successives ou imbriquées, il faut réaliser ceci pour chaque boucle.

1. Précondition et postcondition

La première chose à faire est de définir la précondition et la postcondition.

La précondition va contenir les valeurs des variables définies avant la boucle.

La postcondition va expliquer ce que l'on cherche à avoir comme résultat à la fin de la boucle. On obtient alors

P

boucle

Q

2. Transformer la boucle `for` en boucle `while`

Faire ceci permet de bien séparer la condition de boucle des autres instructions. En faisant ceci, on remarquera souvent qu'une instruction sort de la boucle. Il faudra donc modifier la précondition pour en prendre compte.

3. Écrire l'invariant

Dans l'unvariant, nous voulons parler de toutes les valeurs qui vont varier pendant les itérations de la boucle. Le but est d'expliquer la façon dont elles vont varier. On cherche donc à avoir les variables modifiées ainsi qu'une partie de la postcondition. Pour ceci, nous devons soit borner les valeurs d'une variable, soit expliquer ce à quoi elle correspond en fonction de l'itération dans laquelle on est.

- ▶ Le premier type correspond habituellement aux variables qui seront utilisées pour vérifier la condition de boucle ou qui correspondent au nombre d'itérations effectuées. Comme l'invariant doit être correct avant la première itération et après la dernière, les bornes de ces variables seront souvent sa valeur initiale et la valeur de sortie de la boucle ($\text{val}_{\text{init}} \leq \text{var} \leq \text{val}_{\text{sortie}}$)
- ▶ Le deuxième type s'agit souvent d'une partie de la postcondition ou une variable servant à la calculer. Il faut alors exprimer (de préférence mathématiquement) ce à quoi elle correspond à tout moment. Attention, l'invariant doit être correct avant de réaliser une itération. Si vous êtes à la première itération, la variable vérifie la plupart du temps jusqu'à $i - 1$ itérations et pas encore la i^e .

4. Prouver l'invariant

Il y a 3 preuves à réaliser :

1. Avant : Il suffit de regarder si les valeurs initiales des variables (précondition) correspondent à l'invariant avant d'avoir fait la première itération.
2. Pendant : L'invariant doit être vrai avant et après chaque itération complète. On veut donc montrer que si on commence avec des valeurs x, y, z , si on réalise une itération, on obtient les valeurs x', y', z' et que si on les applique, on retrouve bien l'invariant initial mais avec les valeurs primées. Attention, s'il y a des conditions dans la boucle, on doit discuter des changements en fonction de chaque condition et prouver chaque fois que c'est correct.

3. Après : Il faut montrer que si on applique la valeur de sortie de la boucle à l'invariant, on obtient la postcondition et l'invariant est toujours vrai.
Attention, si plusieurs moyens de sortir de la boucle existent, il faut faire ceci pour chaque type de sorte.