UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions des examens de 2006, 2007, 2008 et 2009 (première session)

1 Enoncés

Pour chaque examen, on demande de résoudre trois questions parmi les cinq qui sont énoncées.

1.1 Examen de juillet 2006

1. Par un point A extérieur à un cercle $\mathcal{C}$, on mène les tangentes à celui-ci, qui rencontrent $\mathcal{C}$ aux deux points de tangence B et B'.

   Soient $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle ABB' et t la tangente à $\mathcal{C}'$ issue de B. La droite t rencontre $\mathcal{C}$ en B et en un deuxième point C.

   (a) Démontrer que le triangle CBB' est isocèle.

   (b) Démontrer que les hauteurs issues de B dans les triangles ABB' et CBB' ont la même longueur.

   (c) Démontrer que le centre du cercle inscrit au triangle $AB'C$ est situé sur la droite BB'.

2. Soit ABC un triangle rectangle en A et d une droite contenant A. On note G la projection orthogonale de B sur d et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G et d_2 la parallèle à AB menée par E.

   (a) Démontrer que d_1, d_2 et BC sont concourantes.

   (b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et d_2 quand d varie.

3. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note respectivement A_1, B_1 et C_1 les pieds des hauteurs issues de A, B et C. On note $|\overrightarrow{XY}|$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{XY}$. Démontrer la relation

$$\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1}.$$

4. Soit $SABC$ un tétraèdre tel que SA soit perpendiculaire à ABC. On note A' la projection orthogonale de A sur SBC. Démontrer la relation

$$\frac{\mathcal{A}(SBC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'BC)},$$

   où $\mathcal{A}(XYZ)$ désigne l'aire du triangle XYZ.

5. On considère un tétraèdre $OABC$ et on note G le centre de gravité de la face ABC. On note respectivement A_1, B_1 et C_1 les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Un plan π parallèle à ABC coupe OA, OB et OC en respectivement A', B' et C'.

   (a) Démontrer qu'il existe une unique position de π pour laquelle les droites $A'A_1$, $B'B_1$ et $C'C_1$ sont parallèles à OG.

   (b) Démontrer que pour toutes les autres positions, ces droites sont concourantes en un point P de la droite OG.

1.2 Examen de septembre 2006

1. Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et une corde $[C, D]$ de ce cercle. Deux droites non confondues d_1 et d_2 sont sécantes à la corde $[C, D]$ et rencontrent celle-ci en son milieu M. La droite d_1 rencontre $\mathcal{C}$ en deux points A_1 et B_1, et la droite d_2 rencontre $\mathcal{C}$ en A_2 et B_2. On suppose que les points A_1 et A_2 sont situés du même côté de la corde $[C, D]$. On note P l'intersection de $[C, D]$ et de la droite A_1B_2, et Q l'intersection de $[C, D]$ et de A_2B_1. Le pied de la hauteur issue de O du triangle OA_1B_2 (resp. OA_2B_1) est noté H_1 (resp. H_2).

   (a) Démontrer que les triangles A_1H_1M et A_2H_2M sont semblables.

   (b) Démontrer que les angles $\widehat{PH_1M}$, $\widehat{POM}$, $\widehat{MOQ}$ et $\widehat{MH_2Q}$ sont égaux ou supplémentaires deux à deux.

   (c) En déduire que M est le milieu du segment $[P, Q]$.

2. On considère un quadrilatère $ABCD$. Le milieu de la diagonale $[A, C]$ est noté P et celui de $[B, D]$ est noté Q.

   Démontrer la relation

   $$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + 4|\overrightarrow{PQ}|^2.$$

3. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques. Etant donné un point P du plan extérieur à ces deux cercles et une tangente p à $\mathcal{C}$ issue de P, on note P_1 le point où p rencontre $\mathcal{C}$. De même, on note P_2 le point de tangence à $\mathcal{C}'$ d'une tangente p' à ce cercle issue de P.

   Déterminer le lieu géométrique des points P du plan tels que

   $$|\overrightarrow{PP_1}|^2 - |\overrightarrow{PP_2}|^2 = k,$$

   où k est un nombre réel donné.

4. On considère un tétraèdre $ABCD$ dont la base BCD est équilatérale, et tel que la droite reliant A au centre de gravité de cette base est perpendiculaire au plan BCD.

   Soient P un point intérieur au triangle BCD, et π et π' deux plans s'appuyant sur la droite AP et respectivement parallèles aux droites BC et BD. Les plans π et π' rencontrent l'arête $[C, D]$ en deux points respectifs Q et R. Les distances du point P aux arêtes $[B, C]$, $[B, D]$ et $[C, D]$ sont respectivement notées α, β et γ. La longueur de l'arête $[B, C]$ est notée δ.

   (a) Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

   (b) Exprimer la longueur d'un côté du triangle PQR en fonction de α, β et δ.

   (c) Montrer que la valeur de $\alpha + \beta + \gamma$ ne dépend pas de la position de P.

   (d) En déduire que la somme des distances de P aux quatre faces du tétraèdre $ABCD$ est indépendante de P.

5. On considère une droite d de l'espace et un point P n'appartenant pas à d. Pour tout plan π contenant d, on note X la projection orthogonale de P sur π. Déterminer le lieu géométrique décrit par le point X quand π varie. (Suggestion : Si l'on procède par géométrie analytique, on choisira un système d'axes où d est l'un des axes).

1.3 Examen de juillet 2007

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ tangent intérieurement à un autre cercle $\mathcal{C}'$, le point de tangence étant noté P. Par un point Q de $\mathcal{C}$, on mène une tangente à $\mathcal{C}$ qui rencontre $\mathcal{C}'$ en deux points A et B.

   Démontrer que la droite PQ est la bissectrice d'un des angles formés par les droites PA et PB.

2. On considère deux points distincts A et B du plan et une droite d perpendiculaire à AB. On suppose en outre que l'intersection de d et AB n'appartient pas au segment $[A, B]$. Par A on mène une droite d_1 qui coupe d en M. Par B on mène une droite d_2 perpendiculaire à d_1. On note N l'intersection de d et d_2. Déterminer le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MNA quand d_1 varie.

3. On considère un losange $ABCD$ tel que le triangle BCD est équilatéral, et un point P quelconque. Démontrer que l'on a
$$|PA|^2 + |PC|^2 = |AB|^2 + |PB|^2 + |PD|^2.$$
4. Soient α et β deux plans perpendiculaires. Soient d et d' deux droites orthogonales entre elles telles que $d \subset \alpha$, $d' \subset \beta$. Démontrer que d ou d' est perpendiculaire à $\alpha \cap \beta$.
5. Une sphère opaque de rayon r et de centre C posée sur un sol plan est éclairée par une source lumineuse ponctuelle O, située à une distance $2r$ de C et à la même hauteur que C.
   (a) Déterminer le lieu des points de la sphère où les rayons lumineux sont tangents à cette sphère.
   Suggestion : Utiliser la symétrie du problème par rapport à l'axe OC.
   (b) Caractériser la forme de l'ombre portée par cette sphère sur le sol.

1.4 Examen de septembre 2007

1. On considère un triangle ABC du plan. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle et O le centre de ce cercle. La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ coupe $[B, C]$ en D et $\mathcal{C}$ en I.
   (a) Démontrer que les droites OI et BC sont perpendiculaires.
   (b) Démontrer la relation
   $$\overline{AB}\,\overline{AC} = \overline{AD}^{\,2} + \overline{DB}\,\overline{DC},$$
   où $\overline{XY}$ désigne la longueur du segment $[X, Y]$.
2. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ extérieurs l'un à l'autre. Déterminer le lieu des points à partir desquels les tangentes à $\mathcal{C}$ forment entre elles le même angle que celui formé par les tangentes à $\mathcal{C}'$. Préciser la nature de ce lieu.
3. On considère un triangle ABC, et un point P arbitraire appartenant à son côté $[B, C]$, distinct de B et C. Démontrer que la valeur de
$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}} + \frac{\overrightarrow{AP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}$$
   est indépendante de P et des dimensions du triangle.

4. Etant données deux droites gauches d_1 et d_2 dans l'espace euclidien et deux nombres positifs l_1 et l_2, on place un segment $[A, B]$ de longueur l_1 sur d_1, et un segment $[C, D]$ de longueur l_2 sur d_2. Démontrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est indépendant de la position des segments $[A, B]$ et $[C, D]$ sur leurs droites respectives.

5. Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère la famille de droites d'équations
$$\begin{cases} x = ay \\ y = az, \end{cases}$$
où a est un paramètre réel, ainsi que les plans perpendiculaires à ces droites et contenant le point $(a + 1, 2 - 2a^2, a^3 + 1)$.

   Démontrer que ces plans possèdent une intersection commune et préciser la nature de cette intersection.

1.5 Examen de juillet 2008

1. Soit ABC un triangle isocèle en A (c'est-à-dire tel que les côtés $[A, B]$ et $[A, C]$ sont de même longueur). On considère deux points E et F distincts situés à l'intérieur du segment $[B, C]$. Les parallèles à AB menées par E et par F coupent respectivement $[A, C]$ en G et H. Les parallèles à AC menées par E et F coupent respectivement $[A, B]$ en I et J.

   (a) Démontrer que les segments $[I,J]$ et $[G, H]$ sont de même longueur.

   (b) Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les positions de E et F pour que les droites JG et IH soient parallèles.

2. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux droites perpendiculaires d_1 et d_2 passant par O. On note A une des intersections de d_1 avec $\mathcal{C}$ et B une des intersections de d_2 avec $\mathcal{C}$. Par A on mène une droite variable d qui coupe $\mathcal{C}$ en un point M distinct de B. La droite AM coupe d_2 en B' et la droite BM coupe d_1 en A'. Démontrer que le produit des longueurs des segments $[A, A']$ et $[B, B']$ reste constant lorsque d varie.

3. Soit un tétraèdre $ABCD$ de l'espace.

   (a) Démontrer les relations
$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB},$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

(b) En déduire que les arêtes opposées d'un tétraèdre sont orthogonales si et seulement si les sommes des carrés des longueurs de chacune de ses paires d'arêtes opposées sont égales.

4. Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes opposées sont deux à deux de même longueur. Démontrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées sont perpendiculaires deux à deux. (Suggestion : démontrer d'abord qu'elles sont sécantes.)

5. Dans l'espace, on considère un cube $ABCDA'B'C'D'$, avec $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On note G le centre de gravité du carré $ABCD$ et K le point d'intersection de la droite $A'G$ et du plan $AB'D'$.

   (a) Déterminer la position de K sur le segment $[A', G]$.

   (b) Démontrer que K appartient à la médiane issue de A du triangle $AD'B'$.

1.6 Examen de septembre 2008

1. On considère un polygone régulier convexe $A_1A_2 \dots A_n$, avec $n \geq 3$, et un cercle $\mathcal{C}$ passant par le centre de gravité G de ce polygone. Les droites A_1G, A_2G, $\dots$, A_nG rencontrent $\mathcal{C}$ en G, ainsi qu'en un certain nombre m de points distincts de G notés $B_1, B_2, \dots, B_m$ (sans ordre particulier).

   Démontrer que les points $B_1, B_2, \dots, B_m$ font partie des sommets d'un même polygone régulier convexe à n côtés. (*Suggestion:* Commencer par établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points fassent partie des sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés.)

2. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[A, B]$ et $[C, D]$ de ce cercle. Un point variable P parcourt $\mathcal{C}$. On note Q l'intersection des droites AP et CD.

   Déterminer le lieu de l'orthocentre (c'est-à-dire le point de rencontre des trois hauteurs) du triangle OPQ.

3. Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point fixe quelconque P.

   (a) Une droite variable d issue de O rencontre $\mathcal{C}$ en deux points A et B. Démontrer que la valeur de $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ reste constante lorsque d varie.

(b) Une droite variable d' issue de P rencontre $\mathcal{C}$ en deux points M et N. En utilisant la propriété établie en (a), démontrer que la valeur de $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ reste constante lorsque d' varie.

4. On place une sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1 à l'intérieur d'un tétraèdre régulier $ABCD$, de façon à ce qu'elle soit tangente aux trois faces issues de A.

   (a) Calculer la distance séparant le sommet A du centre O de $\mathcal{S}$.

   (b) Pour quelle longueur des arêtes du tétraèdre $ABCD$ la sphère $\mathcal{S}$ est-elle tangente à ses quatre faces ?

5. Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé:

   (a) Déterminer une équation du plan π issu du point de coordonnées $(1, 1, 1)$ et incluant la droite d d'équations

$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ y + 2z &= -3. \end{cases}$$

   (b) En fonction d'un ou de plusieurs paramètres de votre choix, donner une équation pour les plans perpendiculaires à π qui passent par l'origine du repère.

   (c) Parmi les plans évoqués au point (b), donner une équation pour celui dont l'intersection avec π est parallèle à d.

1.7 Examen de juillet 2009

1. Dans un triangle ABC, on note respectivement A' et B' les pieds des hauteurs issues des sommets A et B. On note H le point d'intersection de ces hauteurs. On trace le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $A'B'C$ et, par les points A' et B', on mène respectivement les tangentes d_A et d_B à ce cercle.

   (a) Démontrer que $[CH]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

   (b) On note P l'intersection des droites AB et d_A. Démontrer que le triangle $PA'B$ est isocèle.

   (c) En déduire que le point P est situé au milieu du côté $[AB]$.

   (d) En déduire que la droite d_B passe par P.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

(a) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$.

(b) Déterminer le lieu des points à partir desquels les tangentes menées à la courbe $\mathcal{P}$ sont orthogonales entre elles.

3. On note O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, et A' le pied de la médiane issue de A de ce triangle. On note G le centre de gravité du triangle $AA'B$.

   Démontrer que les droites AA' et OG sont perpendiculaires si et seulement si le triangle ABC est isocèle en B. (*Suggestion :* Calculer $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG}$)

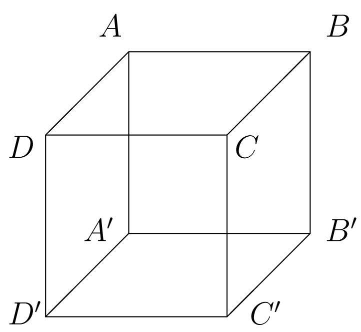
4. On considère deux plans sécants π et π', et une droite d perpendiculaire à π. Démontrer que la projection orthogonale de d sur π' est perpendiculaire à l'intersection de π et de π'. (*Rappel :* La projection orthogonale de d sur π' est l'intersection de π' et du plan perpendiculaire à π' incluant d.)

5. On donne un cube de sommets $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (voir figure).

   (a) Démontrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.

   (b) Démontrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$.

   (c) Si on désigne par T la projection orthogonale du point C sur le plan $AB'D'$ (c'est-à-dire le pied de la droite perpendiculaire à ce plan issue de C), démontrer que la longueur du segment $[A'T]$ est égale au tiers de la longueur du segment $[A'C]$.



2 Solutions proposées

2.1 Examen de juillet 2006

1. (a) Notons O le centre de $\mathcal{C}$ et démontrons que O appartient à $\mathcal{C}'$: puisque AB et AB' sont tangentes à $\mathcal{C}$, les angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OB'A}$ sont droits et le quadrilatère $OBAB'$ est inscriptible. Autrement dit, O est sur le cercle déterminé par A, B et B'.

   On a alors
   $$\widehat{BAO} = \widehat{OB'B} = \widehat{OBB'} \tag{1}$$
   puisque ces angles déterminent des arcs égaux sur le cercle $\mathcal{C}'$.

   De plus, on a
   $$\widehat{CBO} = \widehat{BAO} \tag{2}$$
   car $\widehat{CBO}$ est l'angle tangentiel associé à $\widehat{BAO}$.

   Les triangles BOC et BOB' sont isométriques. En effet puisque le triangle CBO est isocèle on a $\widehat{BCO} = \widehat{CBO}$ et donc
   $$\widehat{BCO} = \widehat{CBO} = \widehat{OBB'} = \widehat{OB'B}$$
   par (1) et (2). Les triangles BOC et BOB' ont donc leurs angles égaux. De plus, ils partagent un côté commun $[O, B]$.

   Les côtés correspondants de ces deux triangles sont donc de même longueur et $\overline{BC} = \overline{BB'}$, ce qui démontre le point (a).

   (b) Nous conservons les notations du point (a) et notons respectivement H et H' les pieds des hauteurs issues de B dans les triangles BAB' et $BB'C$.

   Remarquons que puisque CBB' est isocèle de sommet B, la hauteur BH' est aussi médiatrice de la base $[C, B']$ et que puisque O est équidistant de C et B', on a $O \in BH'$ et les droites BH' et BO coïncident.

   Démontrons que les triangles rectangles $B'BH$ et $B'BH'$ sont isométriques.

   - L'hypoténuse $[B, B]'$ est commune.
   - Les angles $\widehat{B'BH}$ et $\widehat{B'BH'}$ sont égaux. En effet, dans le triangle $B'BH$, on a
   $$\widehat{B'BH} = 90° - \widehat{BB'H},$$

tandis que, puisque $OB'A$ est droit, on a

$$\widehat{BB'H} = 90° - \widehat{OB'B}.$$

On en déduit en utilisant (1) que

$$\widehat{B'BH} = \widehat{OB'B} = \widehat{OBB'},$$

ce qui suffit puisque $\widehat{OBB'} = \widehat{B'BH'}$.

Puisque les triangles sont isométriques, les côtés correspondants sont égaux, donc $\overline{BH'} = \overline{BH}$.

(c) Le centre du cercle inscrit à un triangle est l'intersection de ses bissectrices intérieures. Il suffit donc de démontrer que BB' est la bissectrice de l'angle $\widehat{CB'A}$, ou encore que $\widehat{CB'B} = \widehat{BB'A}$. Puisque $H' \in CB'$ et $H \in B'A$, cela découle directement de l'égalité des angles $\widehat{H'B'B}$, et $\widehat{BB'H}$, elle-même conséquence de l'isométrie des triangles $B'BH$ et $B'BH'$ démontrée au point (b).

2. Utilisons la géométrie analytique.

On choisit des axes orthonormés tels que la droite AB soit l'axe des abscisses et la droite AC celui des ordonnées. Les points A, B, et C ont alors pour coordonnées respectives $(0,0)$, $(b,0)$ et $(0,c)$, où b et c sont des constantes non nulles, et qui peuvent même être supposées strictement positives en orientant correctement les axes.

(a) Traitons directement le cas où d est la droite AC. Dans ce cas on a $G = A$ et $E = C$. On a donc $d_1 = AC$ et d_2 contient C. L'intersection de d_1 et d_2 est alors le point C et la thèse est démontrée.

Si d n'est pas AC, alors elle admet pour équation

$$y = mx,$$

où m est une constante réelle.

La perpendiculaire à d menée par B admet le vecteur $(1, m)$ comme vecteur normal et contient le point de coordonnées $(b, 0)$. Elle admet donc pour équation

$$x - b + my = 0.$$

Le point G est l'intersection de cette dernière droite avec d et ses coordonnées satisfont donc le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & mx \\ x+my & = & b \end{array}\right.$$

On obtient directement $G : (\frac{b}{1+m^2}, \frac{mb}{1+m^2})$.
De la même manière, la droite EC admet pour équation

$$x + m(y-c) = 0.$$

Les coordonnées de E satisfont donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & mx \\ x+my & = & mc \end{array}\right.$$

et on obtient $E : (\frac{mc}{1+m^2}, \frac{m^2c}{1+m^2})$. La droite d_1 est parallèle à l'axe des ordonnées et contient G. Elle admet donc l'équation

$$x = \frac{b}{1+m^2}.$$

De même, la droite d_2 admet pour équation

$$y = \frac{m^2c}{1+m^2}.$$

L'intersection I de d_1 et d_2 a donc pour coordonnées $(\frac{b}{1+m^2}, \frac{m^2c}{1+m^2})$.
Enfin la droite BC admet pour équation

$$cx + by = bc.$$

Le point I appartient donc à BC si et seulement si

$$\frac{cb}{1+m^2} + \frac{m^2cb}{1+m^2} = cb$$

et cette équation est bien satisfaite.

(b) Il ressort du point (a) que, quand d varie, l'intersection de d_1 et d_2 est toujours un point de BC. Le lieu est donc **une partie** de BC, qui contient le point C (il correspond à la position $d = AC$). Les équations cartésiennes s'obtiennent en exprimant des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées (X, Y) d'un point P

pour que celui-ci appartienne au lieu : Un point P de coordonnées (X, Y) appartient au lieu ssi $P = C$ ou

$$\exists m \in \mathbb{R} : \begin{cases} X = \frac{b}{1+m^2} \\ Y = \frac{m^2 c}{1+m^2} \end{cases}$$

Cette dernière condition se réécrit

$$\exists m \in \mathbb{R} : \begin{cases} m^2 X = b - X \\ (1+m^2)Y = m^2 c \end{cases}$$

Discussion :

- Si $X = 0$, la première équation s'écrit $0 = b$, ce qui est impossible.
- Si $X \neq 0$, la condition équivaut à

  $$\exists m \in \mathbb{R} : \begin{cases} m^2 = \frac{b-X}{X} \\ (1 + \frac{b-X}{X})Y = \frac{b-X}{X} c, \end{cases}$$

  ou encore

  $$\begin{cases} \frac{b-X}{X} \geq 0 \\ cX + bY = bc, \end{cases}$$

  La première condition est équivalente à $X \in]0, b]$, et la seconde exprime que le point (X, Y) est situé sur la droite BC. Cette partie du lieu est donc exactement le segment $[B, C]$ privé du point C.

Etant donné qu'il a été établi que le point C fait par ailleurs partie du lieu, la solution est exactement le segment $[B, C]$.

3. Développons $|\overrightarrow{AB}|^2$. On a tout d'abord par la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}.$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}, \end{aligned}$$

en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Développons maintenant le troisième terme $2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}$. En utilisant la relation de Chasles, on a les décompositions suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1H} \\ \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{A_1B} \end{cases}$$

On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB} & = & \overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{B_1H}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{B_1H}\cdot\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB} & = & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HA_1}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HA_1} \end{array}\right. ,$$

puisque $\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{HB}$ d'une part, et $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{A_1B}$ d'autre part, sont orthogonaux.

On a alors

$$\begin{array}{lll} |\overrightarrow{AB}|^2 & = & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{B_1H}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HA_1} \\ & = & \overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA_1})+(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{B_1H})\cdot\overrightarrow{HB} \\ & = & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BB_1}, \end{array}$$

toujours en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

En remplaçant dans les raisonnements précédents A par B, B par C et C par A on obtient

$$|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CC_1},$$

et de manière analogue

$$|\overrightarrow{CA}|^2=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AA_1}$$

Il suffit alors de calculer la somme $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2$ pour obtenir le résultat anoncé.

4. L'arête $[B,C]$ du tétraèdre joue un rôle privilégié dans ce problème puisqu'elle est commune aux triangles considérés. Il est donc naturel d'essayer d'identifier les hauteurs des triangles relatives à cette base. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

   Puisque SA est perpendiculaire à ABC, SA est orthogonale à BC (si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan (*)). De plus AH est perpendiculaire à BC par définition. Puisque SA et AH sont sécantes, BC est perpendiculaire à SAH (si une droite est orthogonale à deux droites sécantes, elle est perpendiculaire au plan qu'elles déterminent(**)).

   D'après (*), la droite BC est orthogonale (et donc perpendiculaire) à SH, puisque $SH\subset SAH$, et donc H est le pied de la hauteur issue de S dans le triangle SBC.

   Montrons également que $A'H$ est perpendiculaire à BC. On procède comme précédemment en notant que AA' est perpendiculaire à SBC

par définition, et donc AA' est orthogonale à BC par (*). De plus, puisque AH est perpendiculaire à BC, $AA'H$ est perpendiculaire à BC par (**) et donc $A'H$ est perpendiculaire à BC par (*).

Remarque : On peut démontrer que $A' \notin BC$ car dans le cas contraire, on aurait $AA' \subset ABC$ donc $SA \perp AA'$ et donc $SA \parallel SBC$, ce qui est absurde.

L'identification des hauteurs des triangles permet de calculer les aires :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}(SBC) & = & \frac{1}{2}\overline{SH}\,\overline{BC} \\ \mathcal{A}(ABC) & = & \frac{1}{2}\overline{AH}\,\overline{BC} \\ \mathcal{A}(A'BC) & = & \frac{1}{2}\overline{A'H}\,\overline{BC} \end{array} \right.$$

La thèse s'écrit alors après simplification

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H}}.$$

Pour démontrer cette égalité, on remarque que dans le plan SBC, les droites SH et $A'H$ sont perpendiculaires à BC et qu'elles sont donc parallèles. Elles sont dès lors confondues puisqu'elles ont un point en commun, et donc A' appartient à SH.

On peut donc se placer dans le plan ASH et considérer les triangles SAH et $AA'H$. Ce sont des triangles rectangles qui ont un angle commun $\widehat{SHA}$. Il sont donc semblables et leurs côtés homologues sont proportionnels, d'où la conclusion.

5. Utilisons la géométrie analytique.

   Puisque le problème n'est pas métrique, il n'est pas nécessaire d'utiliser un repère orthonormé. On utilisera donc les droites OA, OB, et OC comme axes et on fixera les unités de façon telle que les points A, B et C admettent les coordonnées respectives $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

   (a) On peut alors déterminer une équation cartésienne du plan ABC puisqu'on en connaît trois points non alignés. La formule adéquate fournit
   $$ABC \equiv x + y + z = 1.$$
   Le plan π étant parallèle à ABC, il admet pour équation
   $$x + y + z = k,$$
   où k est une constante réelle.

Il est alors facile de déterminer les coordonnées de A', B' et C' en fonction de k puisque ces points sont les intersections de π avec les axes. On obtient respectivement $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ et $(0, 0, k)$ pour A', B' et C'.

On peut également calculer les coordonnées de A_1, B_1, C_1. On obtient respectivement $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. De même les coordonnées de G sont les moyennes arithmétiques des coordonnées de A, B et C, donc on obtient pour G les coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Passons maintenant à la résolution proprement dite. Les droites $A'A_1$, $B'B_1$ et $C'C_1$ admettent pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{A'A_1}$, $\overrightarrow{B'B_1}$ et $\overrightarrow{C'C_1}$. Or ces vecteurs ont pour composantes $(-k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -k, \frac{1}{2})$, et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -k)$. Ces droites sont parallèles simultanément à OG si et seulement si leurs vecteurs directeurs dont des multiples de celui de OG, c'est à dire des multiples de $(1, 1, 1)$. Cette condition est satisfaite si et seulement si les trois composantes de ces vecteurs directeurs sont égales, ce qui n'est le cas que pour l'unique valeur $k = -\frac{1}{2}$.

(b) On peut calculer les équations de OG puisqu'on connaît les coordonnées de O et de G. On trouve

$$x = y = z.$$

Calculons les équations de $A'A_1$, au moyen des coordonnées du point A' et des composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{A'A_1}$. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - k & = & -2ky \\ x - k & = & -2kz \end{array} \right.$$

L'intersection (éventuelle) des droites OG et $A'A_1$ est donc solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y \\ y & = & z \\ x - k & = & -2ky \\ x - k & = & -2kz \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y \\ y & = & z \\ x(1 + 2k) & = & k \end{array} \right.$$

On obtient donc que si $k \neq -\frac{1}{2}$, les droites OG et $A'A_1$ ont une intersection I qui a pour coordonnées $(\frac{k}{1+2k}, \frac{k}{1+2k}, \frac{k}{1+2k})$.

Il reste à vérifier que ce point d'intersection appartient aussi à $B'B_1$ et $C'C_1$. Pour cela on calcule les équations cartésiennes de ces deux droites. On trouve respectivement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y-k & = & -2kx \\ y-k & = & -2kz \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z-k & = & -2kx \\ z-k & = & -2ky \end{array} \right.$$

On vérifie alors directement que les coordonnées de I satisfont ces deux systèmes d'équations.

2.2 Examen de septembre 2006

1. (a) Les triangles A_2MB_1 et A_1MB_2 sont semblables. En effet, les angles $\widehat{A_2MB_1}$ et $\widehat{A_1MB_2}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. De plus, les angles inscrits $\widehat{B_1A_2B_2}$ et $\widehat{B_1A_1B_2}$ interceptent le même arc, donc ils sont égaux.

   Puisque les triangles sont semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels et l'on a

$$\frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_1B_2}} = \frac{\overline{A_2M}}{\overline{A_1M}} = \frac{\overline{B_1M}}{\overline{B_2M}}. \tag{3}$$

   Puisque les triangles A_1OB_2 et A_2OB_1 sont isocèles, leurs hauteurs issues de O sont aussi médianes, donc les points H_1 et H_2 sont les milieux respectifs de $[A_1, B_2]$ et $[A_2, B_1]$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{A_1H_1} & = & \frac{1}{2}\overline{A_1B_2} \\ \overline{A_2H_2} & = & \frac{1}{2}\overline{A_2B_1} \end{array} \right.$$

   La relation (3) permet donc d'écrire

$$\frac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_1H_1}} = \frac{\overline{A_2M}}{\overline{A_1M}}.$$

   Les triangles A_2H_2M et A_1H_1M ont donc un angle égal compris entre des côtés homologues proportionnels, et sont donc semblables.

(b) On sait que $\widehat{OH_1P}$ et $\widehat{OH_2Q}$ sont droits par construction. De plus, puisque COD est isocèle de sommet O et puisque $[O, M]$ est la médiane issue de O de ce triangle, $\widehat{OMQ}$ et $\widehat{OMP}$ sont droits. Il en résulte que les quadrilatères $OMPH_1$ et $OMQH_2$ sont inscriptibles.

Dans le cercle circonscrit à $OMPH_1$, les angles $\widehat{PH_1M}$ et $\widehat{POM}$ interceptent la même corde. Ils sont donc égaux ou supplémentaires.

Dans le cercle circonscrit à $OMQH_2$, on montre de même que $\widehat{MH_2Q}$ et $\widehat{MOQ}$ sont égaux ou supplémentaires.

D'après le point (a), on sait que

$$\widehat{QH_2M} = \widehat{A_2H_2M} = \widehat{A_1H_1M} = \widehat{PH_1M}.$$

On obtient le résultat demandé par transitivité.

(c) Les angles $\widehat{MOP}$ et $\widehat{MOQ}$ sont égaux ou supplémentaires, par (b). Puisque $\widehat{OMQ}$ et $\widehat{OMP}$ sont droits, les angles $\widehat{MOP}$ et $\widehat{MOQ}$ sont aigus, donc ils sont égaux.

Les triangles QMO et PMO sont isométriques puisqu'ils ont un côté commun ($[O, M]$) compris entre deux angles de même amplitude. On a donc $\overline{QM} = \overline{MP}$.

2. Dans le triangle BAC, on a par la relation de Chasles

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{BA} & = & \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} \\ \overrightarrow{BC} & = & \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}. \end{array}$$

On obtient alors, vu la bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{BA}|^2 & = & |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{PA}|^2 + 2\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PA} \\ |\overrightarrow{BC}|^2 & = & |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + 2\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PC}. \end{array}$$

On somme ces deux équations en tenant compte du fait que $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PC}$ par définition, et l'on obtient

$$|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 2|\overrightarrow{BP}|^2 + 2|\overrightarrow{PC}|^2. \tag{4}$$

Remarque : Cette relation peut aussi être obtenue plus directement en utilisant le théorème de la médiane.

De la même façon, dans les triangles ADC et PBD, on obtient respectivement

$$|\overrightarrow{DA}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 = 2|\overrightarrow{DP}|^2 + 2|\overrightarrow{PC}|^2 \tag{5}$$

et

$$|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 2|\overrightarrow{PQ}|^2 + 2|\overrightarrow{QD}|^2. \tag{6}$$

En sommant les équations (4) et (5), on obtient

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = 2(|\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{DP}|^2) + 4|\overrightarrow{PC}|^2.$$

En incorporant (6), on obtient alors

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 & = & 4|\overrightarrow{PQ}|^2 + 4|\overrightarrow{QD}|^2 + 4|\overrightarrow{PC}|^2 \\ & = & |\overrightarrow{BD}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 4|\overrightarrow{PQ}|^2. \end{array}$$

3. Notons respectivement C et C' les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et r et r' leurs rayons.

   On choisit un système d'axes dont le premier axe est la droite CC' et dont le deuxième axe est la médiatrice de $[C, C']$, de sorte que C a pour coordonnées $(1, 0)$ et C' a pour coordonnées $(-1, 0)$. Si P est un point du plan ayant pour coordonnées (x, y), alors P est extérieur à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si l'on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (x-1)^2 + y^2 & > & r^2 \\ (x+1)^2 + y^2 & > & r'^2. \end{array} \right.$$

   D'autre part, si P est extérieur à $\mathcal{C}$, alors le triangle PP_1C est rectangle d'hypoténuse $[P, C]$, car PP_1 est une tangente et P_1C est un rayon de $\mathcal{C}$. De même, P étant extérieur à $\mathcal{C}'$, PP_2C est un triangle rectangle d'hypoténuse $[P, C']$. On a donc par le théorème de Pythagore

$$\begin{array}{rcl} \overline{PP_1}^2 & = & \overline{PC}^2 - \overline{P_1C}^2 \\ \overline{PP_2}^2 & = & \overline{PC'}^2 - \overline{P_2C'}^2 \end{array}$$

   ou encore

$$\begin{array}{rcl} \overline{PP_1}^2 & = & (x-1)^2 + y^2 - r^2 \\ \overline{PP_2}^2 & = & (x+1)^2 + y^2 - r'^2. \end{array}$$

   Un point P de coordonnées (x, y) appartient alors au lieu si et seulement si l'on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (x-1)^2 + y^2 - r^2 - ((x+1)^2 + y^2 - r'^2) & = & k \\ (x-1)^2 + y^2 & > & r^2 \\ (x+1)^2 + y^2 & > & r'^2 \end{array} \right.$$

   ou encore

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{r'^2 - r^2 - k}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 & > & r^2 \\ (x+1)^2 + y^2 & > & r'^2. \end{array} \right.$$

Le lieu est donc une droite perpendiculaire à la droite reliant les centres des cercles, privée (le cas échéant) de ses points intérieurs à l'un au moins de ces cercles.

4. (a) Par construction, la droite PQ appartient à la fois au plan π et au plan BCD. De plus, par hypothèse, le plan π n'a aucune intersection avec la droite BC. Les droites PQ et BC sont donc coplanaires et ne possèdent pas d'intersection; ces droites sont donc parallèles. De la même façon, les droites PR et BD sont également parallèles.

   Le triangle PQR possède donc des côtés parallèles à ceux du triangle BCD. Ces deux triangles sont donc semblables et, BCD étant équilatéral par hypothèse, PQR l'est également.

   (b) Dans le triangle BCD, notons H_1 le pied de la perpendiculaire issue de Q au côté BC, et H_2 le pied de la perpendiculaire issue de R au côté BD. Les droites PQ et PR étant respectivement parallèles à BC et BD comme établi au point (a), on a

$$\begin{aligned} \overline{QH_1} &= \alpha \\ \overline{RH_2} &= \beta. \end{aligned}$$

   Le triangle BCD étant équilatéral, on a $\widehat{QCH_1} = \widehat{RDH_2} = 60°$. Dans les triangles QCH_1 et RDH_2, rectangles par construction, on obtient donc

$$\begin{aligned} \overline{QC} &= \frac{\alpha}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha \\ \overline{RD} &= \frac{\beta}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\beta. \end{aligned}$$

   Enfin, on a

$$\begin{aligned} \overline{QR} &= \overline{CD} - \overline{QC} - \overline{RD} \\ &= \delta - \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

   (c) Dans le triangle PQR, notons H_3 le pied de la hauteur issue de P. Ce triangle étant équilatéral, on a

$$\overline{PH_3} = \gamma = \sin 60°\, \overline{QR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{QR}.$$

En introduisant dans cette égalité la relation obtenue au point (b), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\delta - \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha+\beta)) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\delta - \alpha - \beta,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta,$$

qui est bien indépendant de la position de P.

(d) La distance de P à la face BCD est nulle par hypothèse.

Considérons à présent la face ABC du tétraèdre, et notons P_1 le pied de la perpendiculaire issue de P à cette face. Dans le plan BCD, notons P_1' le pied de la perpendiculaire issue de P à la droite BC. Notons enfin α' la distance séparant P de la face BCD du tétraèdre. On a donc $\alpha' = \overline{PP_1}$.

Par définition, la droite PP_1 est perpendiculaire au plan ABC. Cette droite est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à BC. Par définition, la droite PP_1' est également perpendiculaire à BC. La droite BC est donc orthogonale aux deux droites sécantes PP_1 et PP_1'; elle est donc perpendiculaire au plan PP_1P_1'.

Le triangle PP_1P_1' est rectangle en P_1. En outre, on a $\overline{PP_1'} = \alpha$, $\overline{PP_1} = \alpha'$ et $\widehat{P_1P_1'P} = \theta$, où θ est l'angle formé par les plans ABC et BCD, puisque l'intersection BC de ces plans est perpendiculaire au plan du triangle PP_1P_1'. On a donc

$$\alpha' = \alpha \sin\theta.$$

Soit G le centre de gravité de la face BCD du tétraèdre $ABCD$. Cette face étant équilatérale, et par définition de A, une rotation de 120° d'axe AG applique B sur C, C sur D et D sur B. Dès lors, les trois angles formés par la face BCD avec les faces ABC, ABD et ACD sont égaux par symétrie.

En considérant à présent les faces ABD et ACD du tétraèdre, on définit les pieds respectifs P_2 et P_3 des perpendiculaires issues de P à ces faces, et les distances $\beta' = \overline{PP_2}$ et $\gamma' = \overline{PP_3}$. En appliquant le même raisonnement que celui employé pour la face ABC, on obtient

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta \sin\theta \\ \gamma' &= \gamma \sin\theta. \end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = (\alpha + \beta + \gamma) \sin\theta,$$

qui est indépendant de P en conséquence du point (c).

5. Procédons par géométrie analytique. Le problème impliquant une projection orthogonale, on est amené à choisir un repère orthonormé. On place un des axes sur la droite d, et un autre sur la perpendiculaire à d issue de P. L'unité du repère est choisie de façon à ce que la distance entre P et d soit égale à 1. La droite d obéit alors aux équations

   $$y = z = 0,$$

   et le point P possède les coordonnées $(0, 1, 0)$.

   Si le plan π comprend P, alors les points X et P sont confondus et X prend donc les coordonnées $(0, 1, 0)$. Dans le cas contraire, l'équation de π prend la forme

   $$y = mz,$$

   où m est un paramètre réel.

   La perpendiculaire à π issue de P admet comme vecteur directeur $(0, 1, m)$ et passe par le point P de coordonnées $(0, 1, 0)$. Cette droite est donc caractérisée par les équations

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ z + my &=& m. \end{array} \right.$$

   La projection orthogonale X de P sur π est située à l'intersection de cette droite et de π. Ses coordonnées (x, y, z) satisfont donc le système

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ z + my &=& m \\ y &=& mz. \end{array} \right.$$

Si $y = 1$, alors ce système n'admet pas de solution. Si $z = 0$, alors le système admet la solution $m = 0$, et X prend alors les coordonnées $(0, 0, 0)$.

Considérons maintenant le cas $y \neq 1$ et $z \neq 0$. On obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ m & = & \frac{z}{1-y} \\ m & = & \frac{y}{z} \\ m & \neq & 0. \end{array}\right. ,$$

qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y^2 + z^2 - y & = & 0 \\ z & \neq & 0. \end{array}\right.$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de diamètre $[O, P]$, où P est l'origine des axes, situé dans le plan perpendiculaire à d issu de P, et privé des deux points O et P. Comme ces deux points font par ailleurs partie du lieu, celui-ci est donc égal à l'entièreté du cercle.

2.3 Examen de juillet 2007

1. Notons C le centre de $\mathcal{C}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que P et B sont situés du même côté de la droite CQ.

   Notons t la tangente commune aux deux cercles passant par P. Notons également α l'angle $\widehat{CPQ}$ et γ l'angle tangentiel en P déterminé par la corde BP. Puisque le triangle PCQ est isocèle, on a également $\widehat{CQP} = \alpha$.

   Le rayon CP est perpendiculaire à t par construction. On a donc $\widehat{CPB} = \frac{\pi}{2} - \gamma$. En décomposant $\widehat{CPB} = \widehat{CPQ} + \widehat{QPB}$, on obtient

   $$\widehat{QPB} = \frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha. \tag{7}$$

   D'autre part, on sait qu'un angle tangentiel est égal à tout angle inscrit interceptant le même arc. On a donc $\widehat{BAP} = \gamma$. De plus, puisque CQ est un rayon de $\mathcal{C}$ et BA la tangente à ce cercle issue de Q, on a $\widehat{CQA} = \frac{\pi}{2}$, et donc

   $$\widehat{PQA} = \frac{\pi}{2} + \widehat{CQP} = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Enfin, dans le triangle QPA, on a

$$\widehat{APQ} = \pi - \widehat{PQA} - \widehat{QAP} = \pi - (\frac{\pi}{2} + \alpha) - \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma.$$

On conclut en comparant cette dernière relation avec (7).

2. On peut procéder par géométrie analytique. Il est primordial de bien choisir le système d'axes. Puisqu'il est question de perpendicularité dans l'exercice, on choisit un repère orthonormé. On choisit la droite AB comme axe des abscisses et la droite d comme axe des ordonnées. On note O l'intersection de AB et d. Avec ce choix d'axes, on a les coordonnées $A : (a, 0)$ et $B : (b, 0)$. On peut en outre choisir les axes de façon telle que les constantes a et b soient strictement positives. Il reste à paramèter la position de la droite mobile d_1. Nous choisirons d'appeler m son coefficient angulaire. Ce paramètre permet de décrire toutes les droites d_1 en question puisque d_1 ne peut être parallèle à d. On a donc

$$d_1 \equiv y = m(x - a).$$

Puisque d_2 est perpendiculaire à d_1, elle a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{m}$, pour autant que m ne soit pas nul. Dans ce dernier cas, la droite d_2 est parallèle à d et le point N ne pourra pas être défini. Dans les autres cas, on peut déterminer la droite d_2 :

$$d_2 \equiv y = -\frac{1}{m}(x - b).$$

L'étape suivante consiste à déterminer les coordonnées de M et N. On obtient directement pour $M : (0, -ma)$ et pour $N : (0, \frac{b}{m})$.

Maintenant, nous déterminons les équations des médiatrices des segments $[M, N]$ et $[A, M]$. La médiatrice de $[M, N]$ passe par le point de coordonnées $(0, \frac{b-m^2a}{2m})$ (le milieu de $[M, N]$) et est parallèle à l'axe des abscisses. Elle a donc pour équation

$$y = \frac{b - m^2 a}{2m}$$

La médiatrice de $[A, M]$ passe par le point de coordonnées $(\frac{a}{2}, -\frac{ma}{2})$. Elle est parallèle à d_2 (dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles) et admet donc $-\frac{1}{m}$ pour coefficient angulaire. Elle admet donc pour équation

$$y + \frac{ma}{2} = -\frac{1}{m}(x - \frac{a}{2}),$$

ou encore

$$2my + m^2a = -2x + a.$$

Un point P du plan de coordonnées (X, Y) appartient donc au lieu si et seulement si il existe une valeur non nulle du paramètre m telle que P soit à l'intersection des médiatrices de $[A, M]$ et $[M, N]$ correspondant à cette valeur de m. En d'autre termes, si on note $\mathcal{L}$ le lieu, on a

$$P \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists\, m \neq 0 : \left\{ \begin{array}{ccc} 2mY & = & b - m^2a \\ 2mY + m^2a & = & -2X + a. \end{array} \right. \tag{8}$$

L'existence d'un paramètre m satisfaisant le système (8) implique visiblement (par soustraction) la relation

$$b = -2X + a,$$

ou encore

$$X = \frac{a-b}{2}.$$

Le lieu est donc inclus dans la droite d' admettant cette équation. Considérons maintenant un point (X, Y) de d' et vérifions qu'il appartient bien au lieu. C'est le cas si il existe $m \neq 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2mY & = & b - m^2a \\ 2mY + m^2a & = & b. \end{array} \right.$$

Il reste donc à déterminer dans quels cas l'équation $m^2a + 2mY - b = 0$ admet une solution m non nulle. Le réalisant vaut $4Y^2 + 4ab$. Il est donc strictement positif vu l'hypothèse sur a et b. Il y a donc toujours deux solutions, donc toujours au moins une non nulle. Le lieu est donc exactement la droite d'.

3. Puisque $ABCD$ est un losange, c'est en particulier un parallélogramme et ses diagonales se coupent donc en leur milieu que nous noterons O. On a alors par le théorème de la médiane dans le triangle PAC

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 2|\overrightarrow{PO}|^2 + 2|\overrightarrow{OC}|^2 \tag{9}$$

Remarque : On peut démontrer cette relation en utilisant la relation de Chasles comme suit : on a tout d'abord

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$$

donc

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}|^2 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA} &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \\ &= |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

De même on obtient

$$|\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Le résultat s'obtient en additionnant ces deux dernières équations. Il reste valable quel que soit P.

Puisque O est aussi le milieu de $[B, D]$, on a aussi dans le triangle PBD

$$|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 2|\overrightarrow{PO}|^2 + 2|\overrightarrow{OB}|^2. \tag{10}$$

Au vu des équations (9) et (10), la thèse se réduit à

$$2|\overrightarrow{OC}|^2 = 2|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2,$$

ou encore, puisque $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$,

$$2|\overrightarrow{OC}|^2 = 2|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2. \tag{11}$$

Enfin, puisque le triangle DBC est équilatéral, l'angle $\widehat{DBC}$ vaut 60 degrés et la trigonométrie dans le triangle OBC donne directement

$$|\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| \quad \text{et} \quad |\overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|,$$

ce qui permet de démontrer la relation (11).

4. Puisque α et β sont perpendiculaires, le plan β contient une droite a perpendiculaire à α. Cette droite est soit parallèle à d' soit sécante à d'. Traitons ces deux cas séparément :

   (a) Si a et d' sont sécantes, la droite d est perpendiculaire à β. En effet, puisque a est perpendiculaire à α, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à d. Par hypothèse d' est orthogonale à d, donc d est orthogonale à deux droites sécantes de β. Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan, et $d \perp \beta$.

   Si $d \perp \beta$, alors d est orthogonale à toutes les droites de β, donc à $\beta \cap \alpha$. Puisque d et $\beta \cap \alpha$ sont coplanaires, et non parallèles, elles sont sécantes et donc perpendiculaires.

   (b) Si a et d' sont parallèles, alors d' est perpendiculaire à α (si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre) et on conclut comme précédemment que d' est perpendiculaire à $\alpha \cap \beta$.

5. (a) Dans cette sous-question, la position du sol n'a pas d'importance. On peut utiliser la symétrie pour ramener le problème à un problème dans le plan, en choisissant un plan contenant l'axe de symétrie. Soit P un point du lieu. Le triangle OCP est rectangle en P, puisque OP est tangente à la sphère, et que CP est un rayon (on se ramène à la tangente à un cercle en considérant la coupe par le plan OPC). Le théorème de Pythagore dans OPC fournit alors

$$|OP|^2 = |OC|^2 - |PC|^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$

Le lieu est donc inclus dans la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}r$ et dans la sphère de centre C et de rayon r. L'intersection de ces deux sphères est un cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ situé dans un plan perpendiculaire à la droite OC.

Réciproquement, si P est un point de ce cercle, le théorème de Pythagore dans le triangle OPC montre que $\widehat{CPO}$ est droit. On en conclut que OP est tangente à la sphère de centre C et de rayon r, donc P est un point du lieu. Le lieu cherché est donc exactement le cercle considéré.

(b) L'ombre de la sphère sur le plan est déterminée par l'intersection des rayons lumineux tangents dont il est question au point précédent avec le sol plan. Ces rayons sont déterminés par la source lumineuse O et le lieu décrit au point (a). Ils forment donc un demi cône circulaire droit de sommet O et d'axe OC. D'après l'énoncé, la droite OC est parallèle au sol. On coupe donc un demi cône par un plan parallèle à son axe. La figure ainsi déterminée est une branche d'hyperbole.

2.4 Examen de septembre 2007

1. (a) Puisque I est sur la bissectrice intérieure de $\hat{A}$, les angles inscrits $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$ sont égaux et aigus. Les arcs de cercle BI et IC sont égaux et par suite, les cordes $[B, I]$ et $[I, C]$ sont de même longueur. Les points I et O sont donc sur la médiatrice de $[B, C]$ (c'est évident pour O). Donc OI est la médiatrice de $[B, C]$ et OI et BC sont perpendiculaires.

On peut aussi dire que puisque B, A, C et I sont cocycliques, les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BCI}$ d'une part et les angles $\widehat{IBC}$ et $\widehat{IAC}$ d'autre part sont égaux ou supplémentaires car ce sont des angles inscrits interceptant la même corde. Ces angles sont même égaux car le quadrilatère $ABIC$ est convexe étant donné que AI est une bissectrice intérieure. Puisque par hypothèse, on a $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$, les angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{IBC}$ sont supplémentaires ou égaux, donc ils sont égaux. On conclut alors que BIC est isocèle et on termine de la même manière.

(b) Les triangles BAI et DAC sont semblables car les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{DAC}$ sont égaux par hypothèse, et les angles inscrits $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BIA}$ interceptent la même corde. On en déduit la relation

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}},$$

ou

$$\overline{AB}\,\overline{AC} = \overline{AI}\,\overline{DA}.$$

La thèse devient donc

$$\overline{DA}\,\overline{AI} = \overline{AD}^{\,2} + \overline{DB}\,\overline{DC}.$$

Puisque $D \in [A, I]$, on a $\overline{AI} = \overline{AD} + \overline{DI}$, donc la thèse devient

$$\overline{AD}\,\overline{DI} = \overline{DB}\,\overline{DC}.$$

Enfin, les triangles BDI et ADC sont semblables: $\widehat{BDI} = \widehat{ADC}$ car ils sont opposés par le sommet et $\widehat{CBI} = \widehat{CAI}$ a déjà été démontré. On en déduit la relation

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DC}},$$

ce qui suffit.

2. Remarquons tout d'abord que pour qu'un point P appartienne au lieu, il faut qu'il soit extérieur aux deux cercles, sinon les tangentes n'existeraient pas.

   Ensuite, si P est un point quelconque extérieur à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on note respectivement T_1 et T_2 les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de P et T_1', T_2' les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}'$ issues de P. On note O et O' les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et r et r' leurs rayons respectifs. Notons enfin 2α l'angle $\widehat{T_1PT_2}$ et 2β l'angle $\widehat{T_1'PT_2'}$.

   Puisque O est équidistant des droites T_1P et T_2P, il est sur la bissectrice de $\widehat{T_1PT_2}$ et l'on a donc $\widehat{T_1PO} = \widehat{OPT_2} = \alpha$. On a donc la relation

$$\frac{r}{\overline{OP}} = \sin\alpha.$$

De la même façon, on a
$$\frac{r'}{\overline{O'P}} = \sin\beta.$$
Un point P extérieur à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartient donc au lieu si et seulement s'il existe un angle α tel que
$$\frac{r}{\overline{OP}} = \sin\alpha = \frac{r'}{\overline{O'P}}.$$
Cette condition équivaut à
$$\frac{r}{\overline{OP}} = \frac{r'}{\overline{O'P}} \leq 1.$$
Remarque : Le cas où ces quantités seraient égales à 1 donnerait un point P à l'intersection des deux cercles, ce qui est exclus par hypothèse. Le fait qu'elles soient inférieures à 1 confirme que les points du lieu doivent être extérieurs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On est donc ramené à l'étude de l'ensemble des points satisfaisant la relation
$$\frac{r}{\overline{OP}} = \frac{r'}{\overline{O'P}}.$$
Cette condition s'exprime facilement en géométrie analytique : On choisit un système d'axes orthonormés centré en O et dans lequel O' est sur le premier axe et a pour coordonnées $(c, 0)$, où c est un paramètre réel tel que $c > r + r'$. Le lieu a alors pour équation
$$\frac{1}{r^2}(x^2+y^2) - \frac{1}{r'^2}[(x-c)^2+y^2] = 0.$$
C'est à dire
$$(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2})(x^2+y^2) + \frac{2cx}{r'^2} - \frac{c^2}{r'^2} = 0.$$
Il s'agit donc d'un cercle si les rayons r et r' ne sont pas égaux, et d'une droite (la médiatrice de $[O, O']$ si ces rayons sont égaux.

3. L'idée est d'exprimer la relation en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Par hypothèse, les points B, C et P sont alignés, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$. Puisque P est distinct de B et C, on a aussi $k \notin \{0, 1\}$. On peut alors calculer
$$\left\{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{PC} & = & \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} & = & (1-k)\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AP} & = & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} & = & \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}. \end{array}\right.$$

L'expression donnée dans l'énoncé vaut alors

$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{k\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}+\frac{\overrightarrow{AC}^2}{(1-k)\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}-\frac{((1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})^2}{k(1-k)\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}$$

On peut réduire au même dénominateur et l'on obtient

$$\frac{(1-k)\overrightarrow{AB}^2+k\overrightarrow{AC}^2-((1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})^2}{k(1-k)\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}.$$

On développe ensuite le carré dans le numérateur en

$$(1-k)^2\overrightarrow{AB}^2+2k(1-k)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+k^2\overrightarrow{AC}^2.$$

On regroupe les termes de manière naturelle et on obtient comme numérateur

$$k(1-k)[\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]=k(1-k)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=k(1-k)\overrightarrow{BC}^2.$$

L'expression donnée dans l'énoncé est donc égale à 1, quels que soient le triangle ABC et la position de P.

4. Montrons que le volume du tétraèdre est indépendant de la position du segment $[C,D]$ sur d_2. On procèderait de même pour montrer l'indépendance vis-à-vis de la position de $[A,B]$, vu la symétrie du problème.

   Le volume en question s'obtient par la formule classique $V=\frac{1}{3}B\cdot H$ où B est l'aire d'une base et H la hauteur correspondante. On choisit ACD comme base. Le plan ACD est le plan déterminé par A et d_2. Il est donc indépendant de la position de $[C,D]$. La hauteur du tétraèdre issue de B a pour longueur la distance de B à ACD et est donc indépendante de $[C,D]$. L'aire de la base est l'aire du triangle ACD, qui vaut $\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\delta$, où δ dénote la distance du point A à la droite d_2. Cette aire est donc bien également indépendante de la position de $[C,D]$ sur d_2.

5. Notons d_a la droite d'équations

$$\begin{cases} x=ay\\ y=az.\end{cases}$$

   Cette droite contient visiblement l'origine du repère et le point de coordonnées $(a^2,a,1)$. Elle admet donc le vecteur $v_a=(a^2,a,1)$ pour vecteur directeur. Soit π_a le plan perpendiculaire à d_a contenant le point de coordonnées $(a+1, 2-2a^2, a^3+1)$. Ce plan admet v_a comme vecteur normal, et l'on a donc

$$\pi_a \equiv a^2(x-(a+1)) + a(y-(2-2a^2)) + 1(z-(a^3+1)) = 0.$$

Un point de coordonnées (X, Y, Z) appartient à π_a pour tout $a \in \mathbb{R}$ ssi l'on a

$$a^2(X-(a+1)) + a(Y-(2-2a^2)) + 1(Z-(a^3+1)) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

c'est à dire

$$a^2(X-1) + a(Y-2) + (Z-1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Cette équation du second degré n'admet une infinité de solutions que si les coefficients de a^2, a et 1 sont identiquement nuls. On a donc un point d'intersection dont les coordonnées sont $(1, 2, 1)$.

2.5 Examen de juillet 2008

1. (a) Sans perte de généralité, on peut supposer que E est situé à l'intérieur du segment $[B, F]$. Notons X le point d'intersection des droites EG et FJ.

   Remarque : Ces droites sont sécantes, car sinon elles seraient parallèles et par transitivité, on aurait $AB \parallel AC$, ce qui contredirait les hypothèses.

   Montrons que les triangles XEF et ABC sont semblables. En effet, on a $\widehat{XEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{XFE} = \widehat{ACB}$, puisque ces angles sont correspondants (vu que les droites XE et AB et les droites XF et AC sont parallèles par hypothèse). Des triangles possédant des angles égaux deux à deux sont semblables.

   Le triangle ABC étant isocèle en A par hypothèse, le triangle XEF est donc isocèle en X, et l'on a $\overline{XE} = \overline{XF}$.

   Montrons à présent que les quadrilatères $EIJX$ et $XFHG$ sont des parallélogrammes. Il suffit de le démontrer pour $EIJX$, le même raisonnement pouvant ensuite être appliqué à $XFHG$. Par hypothèse, on a d'une part $IJ \parallel EX$ et d'autre part $JX \parallel AC$ et $EI \parallel AC$ qui, par transitivité du parallélisme, entraînent $JX \parallel EI$. Le quadrilatère $EIJX$ a donc ses cotés opposés parallèles deux à deux, et est donc bien un parallélogramme.

Puisqu'un parallélogramme possède des cotés opposés de même longueur, on a $\overline{IJ} = \overline{EX}$ et $\overline{XF} = \overline{GH}$. Vu que l'on a $\overline{XE} = \overline{XF}$, on obtient $\overline{IJ} = \overline{GH}$.

(b) Nous allons démontrer que JG et IH sont parallèles si et seulement si $\overline{BE} = \overline{FC}$.

Remarquons tout d'abord que les triangles BIE et FHC sont semblables. En effet, on a $\widehat{HFC} = \widehat{IBE}$ et $\widehat{IEB} = \widehat{HCF}$, car ces angles sont correspondants.

- *Supposons que JG et IH sont parallèles.* Le théorème de Thalès fournit la relation

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}.$$

On a de plus

$$\overline{AI} = \overline{AJ} + \overline{JI} \quad \text{et} \quad \overline{AH} = \overline{AG} + \overline{GH},$$

donc on a

$$\frac{\overline{JI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AG}}.$$

Puisque par le point (a), on a $\overline{JI} = \overline{GH}$, on obtient $\overline{AJ} = \overline{AG}$. Ces deux relations entraînent $\overline{AI} = \overline{AH}$ et, puisque ABC est isocèle en A, $\overline{IB} = \overline{HC}$. Les triangles BIE et FHC sont alors isométriques (car ils possèdent un coté égal entre deux angles égaux). Les cotés correspondants de ces triangles sont donc de même longueur, et l'on a $\overline{BE} = \overline{FC}$.

- *Supposons que l'on a $\overline{BE} = \overline{FC}$.* Dans ce cas, les triangles BIE et FHC sont isométriques, donc on a $\overline{IB} = \overline{HC}$. Puisque $\overline{JI} = \overline{GH}$, on a également $\overline{AJ} = \overline{AG}$ et $\overline{AI} = \overline{AH}$. On obtient donc la relation

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}},$$

et la réciproque du théorème de Thalès permet de conclure que les droites JG et IH sont parallèles.

2. Nous utilisons la géométrie analytique. Choisissons un repère orthonormé dont O est l'origine, d_1 le premier axe et d_2 le second. Sans perte de généralité, on peut placer A et B respectivement aux coordonnées

$(1,0)$ et $(0,1)$. La droite d coupe l'axe d_2, elle admet donc un coefficient angulaire, que nous notons m. On a donc de façon générale

$$d \equiv y = m(x-1).$$

Remarquons que, par hypothèse, d ne contient pas B. On ne peut donc pas avoir $m=-1$, donc m varie dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Le cercle $\mathcal{C}$ admet une équation simple :

$$\mathcal{C} \equiv x^2+y^2=1.$$

Les coordonnées de M sont alors solutions du système d'équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & m(x-1) \\ x^2+y^2 & = & 1. \end{array} \right.$$

On a de plus

$$\begin{array}{rcl} (S) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & m(x-1) \\ x^2+m^2(x-1)^2 & = & 1 \end{array} \right. \\ \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & m(x-1) \\ x^2(1+m^2)-2m^2x+m^2-1 & = & 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Bien sûr, $x=1$ est solution de la deuxième équation (cela correspond au point A). La deuxième solution de cette équation est donc

$$x=\frac{m^2-1}{m^2+1}.$$

On trouve pour cette solution

$$y=m(\frac{m^2-1}{m^2+1}-1)=\frac{-2m}{m^2+1}.$$

On a donc obtenu $M:\left(\frac{m^2-1}{m^2+1},\frac{-2m}{m^2+1}\right)$.

On peut alors écrire l'équation de la droite BM, puisque l'on connaît les coordonnées de B et de M. On obtient directement

$$BM \equiv (1+m)^2x=(1-m^2)(y-1).$$

Notons qu'il est bien utile que m ne puisse pas être égal à -1.

Les coordonnées de A' satisfont le système d'équations

$$(S') \quad \begin{cases} (1+m)^2 x = (1-m^2)(y-1) \\ y = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $A' : \left(\dfrac{m^2-1}{(1+m)^2}, 0\right)$ ce qui permet de calculer

$$\overline{AA'} = \left|\frac{m^2-1}{(1+m)^2} - 1\right| = \frac{2\,|m+1|}{(m+1)^2}.$$

Les coordonnées de B' s'obtiennent immédiatement : On a $B' : (0, -m)$. Donc

$$\overline{BB'} = |m+1|.$$

On a alors visiblement

$$\overline{AA'}\ \overline{BB'} = 2,$$

qui est bien indépendant de m.

3. (a) En utilisant la bilinéarité (distributivité) du produit scalaire, ainsi que sa symétrie, on obtient les relations

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &\quad + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}) &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &\quad + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2. \end{aligned}$$

En additionnant ces relations et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}).$$

En utilisant la relation $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ et la bilinéarité du produit scalaire, on écrit le membre de droite de cette relation comme

$$\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}).$$

La relation de Chasles donne enfin

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB},$$

ce qui démontre la première relation.

A partir de ce résultat, la deuxième relation peut s'obtenir par symétrie : On échange partout les rôles de B et de C.

(b) • *Supposons que les arêtes opposées du tétraèdre $ABCD$ sont orthogonales.* Les membres de droites des deux relations établies au point (a) sont alors nuls (si deux vecteurs sont orthogonaux, alors leur produit scalaire est nul). On obtient donc directement

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2. \quad (12)$$

• *Supposons les égalités (12).* Les relations établies au point (a) impliquent alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, ce qui équivaut à $AC \perp DB$ et $AB \perp DC$.
Il reste à démontrer que l'on a $AD \perp BC$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Cela découle de la relation

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2,$$

qui se démontre de la même façon que la première relation établie au point (a) (il suffit d'échanger les rôles de C et de D).

4. Notons M_1, M_2, M_3, M_4 les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$ et montrons que M_1M_3 et M_2M_4 sont perpendiculaires. Le cas des autres paires de droites se traite de la même façon.

Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté, et sa longueur vaut la moitié de celle de ce côté. On a donc

- dans le triangle ABC : $M_1M_2 \parallel AC$ et $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.
- dans le triangle ACD : $M_3M_4 \parallel AC$ et $\overline{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

On obtient donc $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ et

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overline{AC}. \quad (13)$$

Par conséquent, $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme, et donc ses diagonales M_1M_3 et M_2M_4 sont sécantes.

De la même manière, on démontre dans les triangles ABD et BCD que l'on a

$$\overline{M_1M_4} = \overline{M_2M_3} = \frac{1}{2}\overline{BD}. \quad (14)$$

Par hypothèse, on a $\overline{AC} = \overline{BD}$, donc on obtient par (13) et (14) la relation
$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_1M_4} = \overline{M_2M_3}.$$
Le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est donc un losange, et ses diagonales sont donc perpendiculaires.

5. (a) Nous procédons par géométrie analytique. Choisissons un repère orthonormé d'origine A, de premier axe AB, de deuxième axe AD et de troisième axe AA'. Sans perte de généralité, les sommets du cube peuvent être placés aux coordonnées $A : (0,0,0)$, $B : (1,0,0)$, $C : (1,1,0)$, $D : (0,1,0)$, $A' : (0,0,1)$, $B' : (1,0,1)$, $C' : (1,1,1)$ et $D' : (0,1,1)$.
Puisque G est le milieu de $[D,B]$, on a $G : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. On peut alors calculer les composantes de $\overrightarrow{A'G}$: On obtient $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Dès lors, on peut écrire l'équation de $A'G$:
$$A'G \equiv \frac{x}{1/2} = \frac{y}{1/2} = \frac{z-1}{-1},$$
c'est à dire
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ -x & = & \frac{1}{2}(z-1) \end{array} \right.$$
D'autre part, le plan $AB'D'$ admet pour équation
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
c'est à dire
$$z = x + y.$$
Les coordonnées de K satisfont donc le système d'équations
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x+y \\ x & = & y \\ x & = & -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$
On trouve directement $K : (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. D'autre part, le milieu de $[A', G]$ a pour coordonnées $\frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, donc K est le milieu de $[A', G]$.

(b) Notons M le milieu de $[D', B']$. On a alors $M : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. Donc K est également le milieu de $[A, M]$, et est donc bien situé sur la droite AM.

2.6 Examen de septembre 2008

1. En suivant la suggestion, on commence par établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points fassent partie des sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés, en supposant $n \geq 3$.

   Un polygone $C_1C_2 \ldots C_n$ est régulier et convexe ssi les points C_1, C_2, $\ldots$, C_n appartiennent à un même cercle, et le centre O de ce cercle est tel que l'on a $\widehat{C_1OC_2} = \widehat{C_2OC_3} = \cdots = \widehat{C_nOC_1} = \frac{2\pi}{n}$. On en déduit la propriété suivante : Un ensemble S de points font partie des sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés ssi il existe un cercle passant par tous ces points, et dont le centre O est tel que pour tous P, $Q \in S$, l'angle $\widehat{POQ}$ est un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$.

   Appliquons maintenant cette propriété à l'ensemble des points B_1, B_2, $\ldots$, B_m. Par définition de ces points, il appartiennent tous au cercle $\mathcal{C}$. Notons O le centre de $\mathcal{C}$. Il suffit de démontrer que pour tous P, $Q \in \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$, l'angle $\widehat{POQ}$ est un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$.

   Par construction, les droites PG et QG sont issues de deux points A_i et A_j du polygone de départ, avec $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Par conséquent, les angles $\widehat{PGQ}$ et $\widehat{A_iGA_j}$ sont égaux ou supplémentaires. En appliquant la propriété précédemment établie au polygone régulier convexe $A_1A_2 \ldots A_n$, dont le centre est G, on obtient que l'angle $\widehat{A_iGA_j}$ est égal à un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$. On en déduit que l'angle $\widehat{PGQ}$ est soit égal à un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$, soit supplémentaire à un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$.

   Dans le cercle $\mathcal{C}$, l'angle $\widehat{POQ}$ est un angle au centre interceptant la même corde que l'angle inscrit $\widehat{PGQ}$. On a donc $\widehat{POQ} = 2\widehat{PGQ}$, dont on déduit que $\widehat{POQ}$ est égal à un multiple entier de $\frac{2\pi}{n}$. Cela conclut la démonstration.

2. Choisissons le repère orthonormé déterminé comme suit: l'origine des axes est le centre du cercle, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ définit l'axe X, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ définit l'axe Y et l'unité est égale au rayon du cercle.

   La symétrie du problème permet de ne considérer que des points P d'ordonnées positives dans un premier temps. Par ailleurs, le cas où P coïncide avec A, D ou B ne doit pas être pris en considération car la question posée n'a alors pas de sens. Ainsi, on est amené à considérer les points P de coordonnées

$$P(r, \sqrt{1 - r^2}), \quad r \in]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

La droite passant par A et P a pour équation cartésienne

$$y = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r}\,(x+1).$$

Dès lors les coordonnées de Q sont

$$\left(0, \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r}\right).$$

Notons h_P et h_Q les hauteurs du triangle OPQ respectivement issues des sommets P et Q. Pour $r \in]-1,0[\cup]0,1[$, les équations cartésiennes correspondantes sont

$$h_P \;:\; y = \sqrt{1-r^2}, \qquad h_Q \;:\; y - \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r} = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,x$$

Les coordonnées (x_0, y_0) de l'orthocentre sont donc

$$y_0 = \sqrt{1-r^2}, \qquad x_0 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\left(\sqrt{1-r^2} - \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r}\right) = r-1$$

et elles vérifient l'égalité

$$(x_0+1)^2 + y_0^2 = 1.$$

On déduit de ce qui précède que tout point du lieu est un point du cercle centré en $A(-1,0)$, de rayon 1, dont l'équation cartésienne est

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

à l'exception des points dont les coordonnées sont $(-2,0)$, $(0,0)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

Pour conclure, il reste à montrer que tout point du cercle d'équation $(x+1)^2+y^2 = 1$, à l'exception des points de coordonnées $(-2,0)$, $(0,0)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$, fait bien partie du lieu. Soit $R(x_0,y_0)$ un tel point. En posant $r = 1 + x_0$, on a $r \in]-1,0[\cup]0,1[$ et les coordonnées de R s'écrivent aussi $\left(r-1, \pm\sqrt{1-r^2}\right)$. Vu les calculs précédents, le point R est l'orthocentre obtenu par la construction initiale à partir du point P de coordonnées $(r, \pm\sqrt{1-r^2})$, donc fait partie du lieu.

3. (a) En appliquant la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Le segment $[AB]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}$, on a $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$, et donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}\right)\\ &= |PO|^2 - |OA|^2\end{aligned}$$

Le point P est fixe, donc la valeur de $|PO|$ reste constante. C'est également le cas de la valeur de $|OA|$ qui est égale au rayon du cercle $\mathcal{C}$. La valeur de $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$ reste donc constante lorsque d varie.

(b) Afin de pouvoir exploiter la propriété établie au point (a), notons Q l'extrémité du diamètre de $\mathcal{C}$ issu de M. On a, par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{PM}.\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN}\right)\\ &= \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{QN}\end{aligned}$$

De la propriété (a), on déduit que le terme $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PQ}$ reste constant lorsque d' varie. Par ailleurs, $[MQ]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}$, le triangle MNQ est rectangle en N, ce qui entraîne $QN \perp d'$ et donc $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{QN} = 0$. La valeur de $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ reste donc constante lorsque d' varie.

4. (a) Une rotation de 120° autour de l'axe AO laisse le problème inchangé. De cette propriété de symétrie, on déduit que la droite AO passe par le centre de gravité A' de la face BCD du tétraèdre, et que cette droite est également une hauteur du tétraèdre.

Notons M le milieu de l'arête $[BC]$ du tétraèdre. Le plan $AA'M$ est un plan de symétrie du problème, et contient donc le point P de contact entre la sphère $\mathcal{S}$ et la face ABC du tétraèdre.

Soit a la longueur d'une arête du tétraèdre régulier $ABCD$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABM, on obtient

$$|AM| = \sqrt{|AB|^2 - |BM|^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

De même, A' étant situé au deux tiers de la médiane issue de D du triangle BCD, on obtient

$$|A'M| = \frac{1}{3}|DM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

La droite AA' est une hauteur du tétraèdre $ABCD$, ce qui entraîne $AA' \perp A'M$. Le triangle $AA'M$ est dès lors rectangle en A'. Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$|AA'| = \sqrt{|AM|^2 - |A'M|^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

La sphère $\mathcal{S}$ étant tangente à la face ABC du tétraèdre par hypothèse, on a $OP \perp BCD$ ce qui entraîne $OP \perp AP$. Les deux triangles OPA et $MA'A$ sont donc rectangles, coplanaires, et possèdent en outre l'angle $\widehat{PAO}$ en commun. Les angles de ces triangles sont donc égaux deux à deux, et les triangles sont par conséquent semblables. On a alors

$$\frac{|OA|}{|OP|} = \frac{|AM|}{|A'M|} = 3$$

Comme $|OP| = 1$ par hypothèse, on obtient donc $|OA| = 3$.

(b) Supposons maintenant que $\mathcal{S}$ est tangente aux quatre faces du tétraèdre $ABCD$. En réutilisant les notations introduites au point (a), la symétrie du problème entraîne que le point de tangence entre $\mathcal{S}$ et la face BCD du tétraèdre est situé sur la droite AO. Ce point de tangence est donc le point A', et l'on a par conséquent $|OA'| = 1$.

En exploitant les résultats obtenus au point (a), on obtient donc $|AA'| = 4 = a\frac{\sqrt{6}}{3}$, dont on extrait finalement $a = 2\sqrt{6}$.

5. (a) Comme π contient la droite d, il existe des réels r, s non simultanément nuls tels que π a pour équation

$$r(2x + y - 5) + s(y + 2z + 3) = 0.$$

En exprimant que le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient à ce plan, on obtient

$$r = 3s.$$

Il s'ensuit que π a pour équation

$$3x + 2y + z = 6.$$

(b) Un vecteur normal à π a pour composantes $(3, 2, 1)$. Il s'ensuit qu'un plan π' passant par l'origine est perpendiculaire à π si et seulement si il a une équation du type

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b, c sont des réels non simultanément nuls vérifiant

$$3a + 2b + c = 0.$$

En choisissant a et b comme paramètres, on obtient l'équation

$$ax + by - (3a + 2b)z = 0,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$.

(c) Un vecteur directeur de la droite d'intersection de π avec un plan π' (du point (b)) a pour composantes $(6a+5b, -10a-6b, 2a-3b)$, où a et b sont des réels non simultanément nuls. Cela étant, comme un vecteur directeur de d a pour composantes $(1, -2, 1)$, la droite $\pi \cap \pi'$ est parallèle à d si et seulement si

$$6a + 5b = \frac{-10a - 6b}{-2} = 2a - 3b \text{ et } (a, b) \neq (0, 0).$$

Ce système d'équations est équivalent à

$$a = -2b \text{ et } a \neq 0.$$

L'équation de π' devient alors

$$-2bx + by + 4bz = 0,$$

avec $b \neq 0$. Le paramètre b peut donc être éliminé, et il s'ensuit que le plan recherché a pour équation cartésienne

$$2x - y - 4z = 0.$$

2.7 Examen de juillet 2009

1. (a) La droite HA' étant une hauteur du triangle ABC, l'angle $\widehat{HA'C}$ est droit. Par le même raisonnement, l'angle $\widehat{HB'C}$ est également droit. Le quadrilatère $A'HB'C$ possède donc deux angles opposés supplémentaires (car tous deux droits), et est dès lors inscriptible

dans un cercle. Ce cercle passe par les trois points A', B' et C, et est donc le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $A'B'C$. On en déduit $H \in \mathcal{C}$.

Etant donné que l'angle $\widehat{HA'C}$ est droit, le triangle $HA'C$ est rectangle en A'. De plus, ce triangle est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Tout triangle rectangle étant inscrit dans un demi-cercle, on obtient donc que $[CH]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

(b) L'angle $\widehat{PA'B}$ est opposé par le sommet à un angle tangentiel interceptant l'arc $A'C$ du cercle $\mathcal{C}$, et lui est donc égal. Au point précédent, nous avons établi $H \in \mathcal{C}$. L'angle $\widehat{A'HC}$ est dès lors inscrit à $\mathcal{C}$, et intercepte également l'arc $A'C$. On obtient donc $\widehat{PA'B} = \widehat{A'HC}$.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, donc la droite CH est une hauteur du triangle ABC et est perpendiculaire à AB. Le point P appartenant à AB, on en déduit que les angles $\widehat{PBA'}$ et $\widehat{A'HC}$ possèdent des côtés perpendiculaires deux à deux, et sont donc égaux.

On a donc $\widehat{PA'B} = \widehat{A'HC} = \widehat{PBA'}$, ce qui établit que le triangle $PA'B$ est isocèle en P.

(c) On a démontré au point précédent $\widehat{PA'B} = \widehat{PBA'}$, dont on déduit $\widehat{BPA'} = \pi - 2\widehat{PA'B}$ et donc $\widehat{A'PA} = \pi - \widehat{BPA'} = 2\widehat{PA'B}$. L'angle $\widehat{AA'B}$ étant droit, on a également $\widehat{PA'A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{PA'B}$. Dans le triangle $\widehat{PAA'}$, on obtient donc

$$\widehat{PAA'} = \pi - \widehat{A'PA} - \widehat{PA'A} = \pi - 2\widehat{PA'B} - \frac{\pi}{2} + \widehat{PA'B} = \frac{\pi}{2} - \widehat{PA'B}.$$

Cela entraîne $\widehat{PAA'} = \widehat{PA'A}$, et le triangle PAA' est isocèle en P. On a démontré au point précédent que le triangle $PA'B$ est également isocèle en P. On a donc $|PB| = |PA'| = |PA|$. Etant donné $P \in AB$ par hypothèse, on en déduit que P est le milieu de $[AB]$.

(d) Appelons Q le point d'intersection des droites AB et d_B. En suivant le même raisonnement qu'aux points (a), (b) et (c) en interchangeant le rôle des points A et B, on obtient finalement que Q est le milieu de $[AB]$, et est donc confondu avec le point P.

2. (a) La courbe $\mathcal{P}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant dérivable dans $\mathbb{R}$, la tangente au

graphique de f au point de coordonnées $(x_0, y_0) = (x_0, \frac{x_0^2}{4})$ a pour coefficient angulaire $Df(x_0) = \frac{x_0}{2}$; l'équation cartésienne de cette tangente est donc $y - \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$ ou encore $y = mx - m^2$ en posant $m = \frac{x_0}{2}$. Il s'ensuit que les tangentes à $\mathcal{P}$ sont les droites d'équations cartésiennes

$$y = mx - m^2$$

où m est un paramètre réel.

(b) En utilisant l'expression précédente pour l'équation d'une tangente, on obtient qu'un point $P(x, y)$ est un point du lieu si et seulement si il existe un réel non nul m tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} y = mx - m^2 \\ y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{m^2} \end{array} \right. \tag{15}$$

Cela étant, pour x, y réels et m réel non nul, on a par "élimination" du paramètre m:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y = mx - m^2 \\ y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{m^2} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = mx - m^2 \\ m^2 y = -mx - 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = mx - m^2 \\ (1 + m^2)y = -(m^2 + 1) \end{array} \right. \\ & \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

On peut donc dire qu'un point P du lieu a des coordonnées cartésiennes (x, y) qui vérifient

$$y = -1$$

Démontrons maintenant que la droite d'équation cartésienne $y = -1$ est bien le lieu: vu ce qui précède, il reste à montrer que tout point $P(x_0, -1)$ de cette droite se trouve à l'intersection de deux tangentes à la courbe $\mathcal{P}$, ces tangentes étant orthogonales. Vu ce qui précède (cf. (15)), cela revient à montrer l'existence d'un réel non nul m tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = mx_0 - m^2 \\ -1 = -\dfrac{1}{m}x_0 - \dfrac{1}{m^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow m^2 - x_0 m - 1 = 0$$

Etant donné x_0, cette équation du second degré en m possède effectivement deux solutions réelles (et le produit de ces deux solutions est égal à -1).

3. En suivant la suggestion, on développe $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG}$. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}$. Le point G étant le centre de gravité du triangle $AA'B$, on a également $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

   On a donc

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG} = \left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}\right).\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

   On sait que le point A' est le milieu du côté $[BC]$, ce qui entraîne $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. En remplaçant $\overrightarrow{OA'}$ dans l'expression précédente et en développant, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG} &= \left(-\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right).\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)\\ &= -\frac{1}{3}|OA|^2 + \frac{1}{4}|OB|^2 + \frac{1}{12}|OC|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

   Etant donné que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a $|OA| = |OB| = |OC|$ et donc $|OA|^2 = |OB|^2 = |OC|^2$. La relation précédente se simplifie alors en

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

   Cette dernière expression s'annule si et seulement si les droites OB et AC sont perpendiculaires. On sait que O est situé sur la médiatrice m du côté $[AC]$ du triangle ABC, et que cette médiatrice est perpendiculaire à AC par définition. On a donc $OB \perp AC$ si et seulement si $B \in m$, ce qui est équivalent à $|BA| = |BC|$ (la médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités de celui-ci). On a donc $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG} = 0$ ssi ABC est isocèle en B.

4. Notons π'' le plan perpendiculaire à π' incluant d. Ce plan étant perpendiculaire à π', il contient nécessairement une droite d' perpendiculaire à π'. Les droites d et d' sont toutes deux contenues dans π''. Elles ne peuvent être parallèles, car elles sont perpendiculaires aux deux plans sécants π et π'. On en déduit que ces deux droites sont sécantes.

   La droite d étant perpendiculaire à π, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc en particulier à $\pi \cap \pi'$. De même, d' étant perpendiculaire à π', cette droite est donc également orthogonale à $\pi \cap \pi'$.

La droite $\pi \cap \pi'$ est donc orthogonale aux deux droites sécantes d et d', d'où l'on déduit $\pi \cap \pi' \perp \pi''$. La droite $\pi \cap \pi'$ est dès lors orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan π'', donc en particulier à la projection orthogonale d'' de d sur π'. Les droites $\pi \cap \pi'$ et d'' sont par conséquent orthogonales et coplanaires (car toutes deux incluses dans π'), donc elles sont perpendiculaires.

5. (a) Choisissons le repère orthornomé d'origine A', d'axe des abscisses défini par le vecteur unité $\overrightarrow{A'D'}$, d'axe des ordonnées défini par le vecteur unité $\overrightarrow{A'B'}$ et d'axe des cotes défini par le vecteur unité $\overrightarrow{A'A}$. Dans ce repère, les coordonnées des sommets du cube sont $A'(0,0,0)$, $D'(1,0,0)$, $B'(0,1,0)$, $C'(1,1,0)$, $A(0,0,1)$, $D(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ et $C(1,1,1)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ respectivement de composantes $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ sont deux vecteurs directeurs non parallèles du plan $AB'D'$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{C'B}$ et $\overrightarrow{C'D}$ respectivement de composantes $(-1,0,1)$ et $(0,-1,1)$ sont deux vecteurs directeurs non parallèles du plan $C'DB$; ces vecteurs sont les opposés des vecteurs $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AB'}$.

   Les deux plans sont donc parallèles, car ils sont engendrés par des vecteurs directeurs parallèles (chacun à chacun).

   (b) Comme les vecteurs $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ respectivement de composantes $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ sont deux vecteurs directeurs non parallèles du plan $AB'D'$, un vecteur normal à ce plan a pour composantes $(1,1,1)$. (En effet, on a $(1,0,-1).(1,1,1) = 0$ et $(0,1,-1).(1,1,1) = 0$.) Le vecteur $\overrightarrow{A'C}$, vecteur directeur de la droite $A'C$, a les mêmes composantes; ce vecteur est donc normal au plan et par conséquent la droite $A'C$ est orthogonale au plan $AD'B'$.

   (c) Comme un vecteur normal au plan $AD'B'$ a pour composantes $(1,1,1)$, ce plan a une équation cartésienne de la forme $x+y+z = \delta$ où δ est un réel à déterminer. En exprimant par exemple que le point A appartient au plan, on trouve $\delta = 1$ et finalement le plan $AB'D'$ a pour équation

$$x + y + z = 1.$$

   Comme la droite $A'C$ est orthogonale au plan $AB'D'$ (vu ce qui précède), T est l'intersection de cette droite et du plan $AB'D'$.

Cela étant, la droite $A'C$ ayant pour équations cartésiennes

$$x = y = z,$$

les coordonnées de T s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

On trouve immédiatement

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{A'T}$ a pour composantes $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{A'C}$ ayant pour composantes $(1, 1, 1)$, on obtient donc

$$\overrightarrow{A'T} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$$

et dès lors la longueur du segment $[A'T]$ est bien égale au tiers de la longueur du segment $[A'C]$.