UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2013

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on trace deux droites perpendiculaires. Les intersections de ces droites avec $\mathcal{C}$ forment les sommets d'un quadrilatère convexe $ABCD$.

   (a) Démontrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

   (b) Par les points A, B, C et D, on mène quatre tangentes à $\mathcal{C}$, qui forment les côtés d'un nouveau quadrilatère convexe. Démontrer que ce quadrilatère est inscriptible.

2. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et on considère trois points A, B et C de ce cercle tels que A et B sont fixés et diamétralement opposés. On construit alors le point D de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$ soient égaux. On demande de

   (a) trouver le lieu du point D lorsque C parcourt $\mathcal{C}$.

   (b) trouver le lieu du point M, défini comme l'intersection des droites AC et OD, lorsque C parcourt $\mathcal{C}$.

   (Dans les deux cas, décrire avec précision la nature du lieu.)

3. Dans un triangle ABC, on note respectivement A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Démontrer que, si les droites AA' et BB' sont perpendiculaires, alors on a

   $$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |CC'|^2,$$

   où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

4. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On donne les droites d_1, d_2, d_3 par les équations cartésiennes suivantes, a et b étant des réels non simultanément nuls.

   $$d_1 \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases} \qquad d_2 \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 - x \end{cases} \qquad d_3 \begin{cases} y = 1 \\ ax + bz = 1 \end{cases}$$

   On considère alors une droite d incluse dans un plan d'équation $z = \lambda$, où λ est un paramètre réel, telle que d s'appuie à la fois sur d_1 et sur d_2. On demande de

(a) donner des équations cartésiennes de d, en fonction des données et du paramètre λ.

(b) déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles d s'appuie sur la droite d_3.

5. (a) Démontrer que si un point P de l'espace est équidistant de deux droites sécantes en un point A, alors les projections orthogonales de P sur ces deux droites sont équidistantes de A.

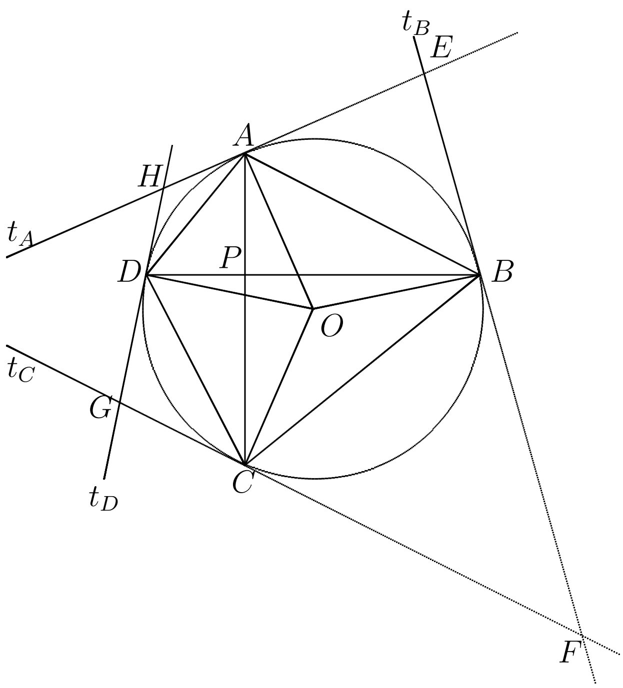
   (b) En déduire que si les six arêtes d'un tétraèdre $ABCD$ sont tangentes à une même sphère, alors on a

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|,$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Exemples de solutions

1.



Notons respectivement t_A, t_B, t_C et t_D les tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B, C et D. On définit également les points $E = t_A \cap t_B$, $F = t_B \cap t_C$, $G = t_C \cap t_D$ et $H = t_D \cap t_A$, formant le quadrilatère convexe $EFGH$.

(a) Dans le cercle $\mathcal{C}$, $\widehat{AOB}$ est un angle au centre et $\widehat{ADB}$ est un angle inscrit interceptant le même arc AB. De même, $\widehat{DOC}$ est un angle au centre et $\widehat{DAC}$ est un angle inscrit interceptant le même arc DC. Dès lors, $\widehat{DOC} = 2\,\widehat{DAC}$.

Comme $AC \cap BD = P$, les points A, C et P sont alignés ainsi que les points B, D et P. Dès lors, on a

$$\widehat{AOB} = 2\,\widehat{ADB} = 2\,\widehat{ADP}$$

et

$$\widehat{DOC} = 2\,\widehat{DAC} = 2\,\widehat{DAP}, \tag{1}$$

par le même argument que précédemment.

Comme $AC \perp BD$ et $AC \cap BD = P$, le triangle APD est rectangle en P, ce qui entraîne

$$\widehat{ADP} + \widehat{DAP} = 90°. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$2\,\widehat{ADP} + 2\,\widehat{DAP} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AOB} + \widehat{DOC} = 180°,$$

qui démontre bien que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

(b) Comme t_A et t_B sont tangentes respectivement en A et B au cercle $\mathcal{C}$, et comme $t_A \cap t_B = E$, on a

$$\widehat{EAO} = \widehat{EBO} = 90°.$$

Dès lors, le quadrilatère convexe $AEBO$ est inscriptible et ses angles opposés $\widehat{AEB}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires (en effet, un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.) On en déduit

$$\widehat{AEB} + \widehat{AOB} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 180° - \widehat{AEB}. \tag{3}$$

Par un raisonnement similaire, comme t_C et t_D sont tangentes respectivement en C et D au cercle $\mathcal{C}$ et comme $t_C \cap t_D = G$, on a

$$\widehat{GCO} = \widehat{GDO} = 90°.$$

Le quadrilatère convexe $CGDO$ est donc inscriptible et ses angles opposés $\widehat{CGD}$ et $\widehat{DOC}$ sont supplémentaires. On en déduit

$$\widehat{CGD} + \widehat{DOC} = 180° \Leftrightarrow \widehat{DOC} = 180° - \widehat{CGD}. \tag{4}$$

En combinant (3) et (4) avec le résultat démontré au point (a), on obtient

$$180° - \widehat{AEB} + 180° - \widehat{CGD} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AEB} + \widehat{CGD} = 180°. \tag{5}$$

Les points H, A et E sont alignés car ils appartiennent à la tangente t_A; de même, les points E, B et F sont alignés car ils appartiennent à la tangente t_B. On a donc

$$\widehat{AEB} = \widehat{HEF}. \tag{6}$$

Par un raisonnement analogue, les points F, C et G sont alignés (ils sont situés sur t_C) et les points H, D et G sont alignés (ils sont situés sur t_D); ainsi,

$$\widehat{CGD} = \widehat{FGH}. \tag{7}$$

En introduisant les égalités (6) et (7) dans (5), on obtient

$$\widehat{HEF} + \widehat{FGH} = 180°,$$

qui établit que le quadrilatère convexe $EFGH$ est inscriptible puisqu'il possède deux angles opposés supplémentaires.

2. Montrons d'abord comment résoudre ce problème par la géométrie synthétique:

   (a) Par définition, le point D est l'image du point C par l'homothétie de centre B et de rapport 2. Le lieu est donc l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre B et de rapport 2; il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon $[AB]$.

   (b) Les droites AC et OD sont des médianes du triangle ABD. Le point M correspond donc à l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

   Si C est égal à B ou à A, alors M n'est pas défini car dans le premier cas, OD et AC sont confondus tandis que dans le deuxième cas, AC n'est pas défini.

Le lieu est donc l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ duquel il faut retirer les images des points B et A. Si l'on note O' (resp. B') l'image de O (resp. B) par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$, le lieu est donc le cercle de centre O' et de rayon $[O'B']$ duquel il faut retirer les points A et B'.

Il était également possible de résoudre le problème analytiquement:

(a) On considère un repère orthonormé positif dont l'origine est O et dans lequel le point B possède les coordonnées $(1,0)$. Si l'on note $(\cos\theta, \sin\theta)$ les coordonnées de C, le point D a pour coordonnées $(2\cos\theta - 1, 2\sin\theta)$. Si θ varie entre 0 et 2π, $(2\cos\theta - 1, 2\sin\theta)$ est le paramétrage du cercle dont l'équation cartésienne est donnée par
$$(x+1)^2 + y^2 = 4,$$
c'est-à-dire le cercle de centre $A : (-1,0)$ et de rayon 2.

(b) Si $\cos\theta \neq -1$, alors l'équation de AC est
$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}(x+1)$$
tandis que si $\cos\theta \neq \frac{1}{2}$, celle de OD est
$$y = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta - 1}x.$$
Comme C ne peut être égal à A ou à B, on peut supposer que $\sin\theta \neq 0$. Dès lors, on trouve aisément que si $\cos\theta \neq \frac{1}{2}$, alors M a pour coordonnées
$$\left(\frac{2\cos\theta - 1}{3}, \frac{2\sin\theta}{3}\right).$$
Remarquons que si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors OD a pour équation $x = 0$ et M a donc pour coordonnées
$$\left(0, \frac{2\sin\theta}{3}\right).$$
En conclusion, le lieu est donc l'ensemble des points de la forme
$$\left(\frac{2\cos\theta - 1}{3}, \frac{2\sin\theta}{3}\right),$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ et $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$. Il s'agit du cercle centré au point $(-\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$, dont l'équation cartésienne est

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

privé des points $(\frac{1}{3}, 0)$ et $(-1, 0)$.

3. On a

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}.$$

(En effet, la relation de Chasles fournit $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}$, que l'on peut combiner en $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, car $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0}$.)

Par un raisonnement similaire, on a

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$$

et

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$

En utilisant ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}}{2} \\ &= -\overrightarrow{CC'},\end{aligned}$$

donc

$$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{CC'}.$$

En développant, cette équation se réécrit

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{CC'}.$$

Par hypothèse, on a $AA' \perp BB'$, qui entraîne $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BB'} = 0$. L'égalité précédente devient donc

$$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |CC'|^2.$$

4. (a) Notons Π le plan d'équation cartésienne $z = \lambda$.

L'intersection entre d_1 (resp. d_2) et Π s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} z = \lambda \\ y = 0 \\ z = x \end{cases} \qquad \left(\text{resp.} \begin{cases} z = \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - x \end{cases} \right)$$

On obtient que ces intersections sont respectivement les points de coordonnées $(\lambda, 0, \lambda)$ et $(1 - \lambda, 2, \lambda)$. La droite d étant incluse dans Π, elle est nécessairement déterminée par ces deux points et a donc pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - \lambda = \dfrac{(1 - 2\lambda)}{2} y \\ z = \lambda \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x = \lambda + (1 - 2\lambda)\frac{y}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

(b) L'intersection entre d et d_3 est fournie par la ou les éventuelles solutions du système (de quatre équations en les trois inconnues x, y, z) formé par les équations cartésiennes des droites, à savoir

$$\begin{cases} x = \lambda + (1 - 2\lambda)\frac{y}{2} \\ z = \lambda \\ y = 1 \\ ax + bz = 1 \end{cases}$$

Celui-ci est équivalent au système

$$\begin{cases} x = \lambda + (1 - 2\lambda)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \\ y = 1 \\ \frac{a}{2} + b\lambda = 1 \end{cases}$$

La droite d s'appuie donc sur la droite d_3 si et seulement si ce système est compatible, ce qui s'exprime par la condition

$$\frac{a}{2} + b\lambda = 1.$$

Les solutions (a, b) de cette équation fournissent la réponse à la question.

5. (a) Notons P' et P'' les projections orthogonales respectives de P sur les deux droites. Par hypothèse, on a $PP' \perp P'A$, $PP'' \perp P''A$ et $|PP'| = |PP''|$.

   En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $PP'A$ et $PP''A$, on obtient

$$|P'A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP'|^2}$$

   et

$$|P''A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP''|^2},$$

   dont on déduit $|P'A| = |P''A|$, étant donné que l'on a $|PP'| = |PP''|$.

   (b) Notons respectivement E, F, G, H, I et J les points de tangence de la sphère aux arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[CD]$ du tétraèdre. Ces points correspondent aux projections orthogonales du centre O de la sphère sur ces arêtes. Puisqu'ils appartiennent à cette sphère, ils sont également équidistants de O.

   En appliquant le résultat établi au point (a), on obtient

$$\begin{aligned} |AE| &= |AF| = |AG|, \\ |BE| &= |BH| = |BI|, \\ |CF| &= |CH| = |CJ|, \\ |DG| &= |DI| = |DJ|, \end{aligned}$$

   dont on déduit

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AE| + |BE| + |CJ| + |DJ| \\ &= |AF| + |CF| + |BI| + |DI| = |AC| + |BD| \\ &= |AG| + |DG| + |BH| + |CH| = |AD| + |BC|. \end{aligned}$$