UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2015

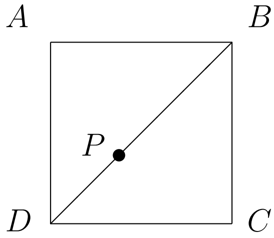
Enoncés

1. Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. On note c la longueur de chacun des côtés de ce carré. Démontrer l'égalité
$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP} = ||\overrightarrow{AP}||^2 - c^2.$$

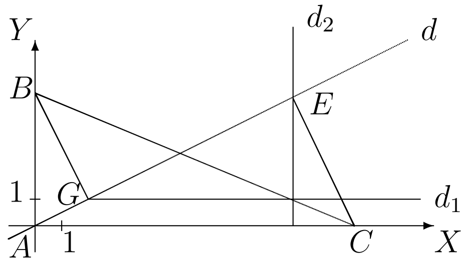
2. Soient ABC un triangle rectangle en A, et d une droite passant par A. On note G la projection orthogonale de B sur d, et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G, et d_2 la parallèle à AB menée par E.
   (a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.
   (b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et de d_2 lorsque d varie.

Exemples de solutions

1. Vu la propriété d'orthogonalité entre côtés et entre diagonales du carré, on a successivement:
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{AP} \ + \ ||\overrightarrow{AP}||^2\\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 \ - \ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 \ - \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2\\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 - c^2.
\end{aligned}$$



2. Choisissons un repère orthonormé d'origine A tel que la droite AC soit l'axe des abscisses et la droite AB celui des ordonnées. Les points A, B et C ont alors respectivement pour coordonnées $(0,0)$, $(0,b)$ et $(c,0)$ où b et c sont des constantes non nulles, strictement positives si on choisit l'orientation des axes en conséquence.



(a) Si d coïncide avec AB alors $G = B$ et $E = A$. La droite d_1 est alors la parallèle à AC passant par B et d_2 coïncide avec AB. Dès lors, les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes en B.

Si d diffère de AB, alors d a pour équation cartésienne $\lambda x - y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toute perpendiculaire à d a une équation cartésienne du type $x + \lambda y + \alpha = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). La perpendiculaire à d passant par B a donc pour équation $x + \lambda y - \lambda b = 0$ et l'équation de celle passant par C est $x + \lambda y - c = 0$. Enfin, l'équation cartésienne de BC est $bx + cy - bc = 0$.

Les coordonnées du point G sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - \lambda b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = \lambda b \end{array}\right.$$

c'est-à-dire $\left(\dfrac{\lambda b}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$.

De même, les coordonnées du point E sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = c \end{array}\right.$$

c'est-à-dire $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda c}{1+\lambda^2}\right)$.
Dès lors, les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne $y = \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}$ et $x = \dfrac{c}{1+\lambda^2}$. Elles se coupent au point P de coordonnées $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$. Ce point se trouve sur la droite BC car ses coordonnées vérifient l'équation de BC.
En effet, on a

$$b\,\frac{c}{1+\lambda^2} + c\,\frac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2} - bc = bc\left(\frac{1}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - 1\right) = 0.$$

Dès lors, P est le point de concours des droites d_1, d_2 et BC.

(b) Lorsque la droite d varie, le lieu géométrique du point P s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations de d_1 et d_2. On a

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2} \\ x = \dfrac{c}{1+\lambda^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (b-y)\lambda^2 = y \\ x\lambda^2 = c - x \qquad (*) \end{array}\right.$$

Comme $x \neq 0$ (sinon $(*)$ s'écrirait $0 = c$ ce qui est impossible puisque $c > 0$), le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2 = \dfrac{c-x}{x} \geq 0 \\ \dfrac{(b-y)(c-x)}{x} = y \end{array}\right.$$

et l'équation du lieu est $bx + cy - bc = 0$ avec $x \in]0, c]$.
Ainsi, le point P se trouve sur la droite BC, son abscisse variant dans $]0, c]$. Comme B fait également partie du lieu (cf. ci-dessus), le lieu de P est le segment $[BC]$.