UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2009

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On place trois points distincts A, B et C sur un cercle $\mathcal{C}$ de façon à ce que B et C ne soient pas diamétralement opposés. Par A, B et C, on mène respectivement les tangentes t_A, t_B et t_C à $\mathcal{C}$. On note P l'intersection de t_B et de t_C, et d la droite parallèle à t_A issue de P. Les droites AB et AC rencontrent d en deux points notés respectivement D et E.

   (a) Démontrer que le triangle BPD est isocèle.

   (b) En déduire que les points B, C, D et E appartiennent à un même cercle de centre P.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne
$$y = (x+1)^2.$$
   Déterminer le lieu du milieu de la corde découpée sur cette parabole par une droite variable issue de l'origine des axes.

3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Démontrer que l'on a
$$\frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2}{|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2} = 3.$$

4. Démontrer que dans un tétraèdre quelconque, les trois droites reliant les milieux des arêtes opposées sont concourantes.

5. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points A, B, C et D de coordonnées cartésiennes
$$A(1,2,-1),\ B(-1,1,0),\ C(0,1,2),\ D(0,1,1).$$

   (a) Déterminer l'aire du triangle ABC.

   (b) Les points A, B, C et D appartiennent-ils à un même plan ?

Exemples de solutions

1. (a) Traitons tout d'abord le cas particulier où A et B sont diamétralement opposés. Dans cette situation, la droite d est confondue avec t_B, et les points B et D sont identiques. On a donc trivialement $|PB| = |PD|$.

   Supposons à présent que A et B ne sont pas diamétralement opposés. Notons O le centre du cercle $\mathcal{C}$. Les points A et B sont situés sur ce cercle, ce qui implique $|OA| = |OB|$, d'où le triangle OAB est isocèle en O. On en déduit $\widehat{ABO} = \widehat{OAB}$.

   La droite t_B est tangente à $\mathcal{C}$ en B par hypothèse, donc $\widehat{OBP} = 90°$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \widehat{PBA} &= 90° + \widehat{OBA} \\ &= 90 + \widehat{OAB}. \end{aligned}$$

   Les angles $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PBD}$ étant supplémentaires, cela entraîne

$$\begin{aligned} \widehat{PBD} &= 180° - \widehat{PBA} \\ &= 90° - \widehat{OAB}. \end{aligned}$$

   Notons A' l'intersection des droites OA et d. La droite d est parallèle à t_A qui est tangente à $\mathcal{C}$ en A, donc perpendiculaire au rayon OA. On en déduit que le triangle $A'AD$ est rectangle en A', ce qui entraîne

$$\widehat{A'DA} = 90° - \widehat{A'AD}.$$

   Etant donné que l'on a $\widehat{PDB} = \widehat{A'DA}$ et $\widehat{A'AD} = \widehat{OAB}$, cette propriété fournit

$$\widehat{PDB} = 90° - \widehat{OAB},$$

   dont on déduit

$$\widehat{PBD} = \widehat{PDB}.$$

   Le triangle BPD est donc bien isocèle en P (c'est-à-dire que l'on a $|PB| = |PD|$).

   (b) Il a été démontré au point (a) que l'on a $|PB| = |PD|$. Par le même raisonnement, en permutant les rôles de B et de C, on peut établir que le triangle PCE est isocèle en P, c'est-à-dire que l'on a $|PC| = |PE|$.

Les droites t_B et t_C sont deux tangentes à $\mathcal{C}$ issues du même point P, et rencontrent $\mathcal{C}$ respectivement en B et C. On a donc $|PB| = |PC|$.

En résumé, on a $|PB| = |PC| = |PD| = |PE|$, ce qui démontre que les points B, C, D et E appartiennent bien à un même cercle de centre P.

2. Remarquons tous d'abord que l'axe des ordonnées ne découpe pas de corde sur la parabole $y = (x+1)^2$. La droite variable peut donc être décrite par l'équation cartésienne

$$y = mx,$$

où m est un paramètre réel.

Les intersections de cette droite avec la parabole sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = (x+1)^2, \end{cases}$$

donc leurs abscisses x sont les solutions de l'équation

$$(x+1)^2 - mx = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + (2-m)x + 1 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré est égal à

$$\Delta = (2-m)^2 - 4 = m^2 - 4m = m(m-4),$$

qui est non négatif si et seulement si $m \leq 0$ ou $m \geq 4$. Dans ce cas, les deux points d'intersection de la droite avec la parabole possèdent les coordonnées

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{m^2-2m-m\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

et

$$\left(\frac{m-2+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{m^2-2m+m\sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

Le milieu M de la corde délimitée par ces deux points possède donc les coordonnées

$$M\left(\frac{m-2}{2}, \frac{m^2-2m}{2}\right)$$

En éliminant le paramètre m, on obtient

$$y = 2x(x+1),$$

qui est l'équation cartésienne d'une parabole.

Le lieu cherché est donc composé de l'union de deux arcs de cette parabole: l'un correspondant à $m \leq 0$, c'est-à-dire à $x \leq -1$, et l'autre à $m \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq 1$. En résumé, le lieu est l'ensemble des points de la parabole

$$y = 2x(x+1)$$

tels que $|x| \geq 1$.

3. Pour tout point X, on a

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

Dans le cas particulier où $X = G$, cette propriété donne

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

qui fournit

$$(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0.$$

Cette expression se développe en

$$|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} = 0$$

qui se réécrit

$$2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2.$$

Exprimons maintenant la valeur de $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$ en fonction de vecteurs se rapportant à G. On obtient

$$\begin{aligned}
|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 &= (\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{CA})^2 \\
&= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA})^2 \\
&= 2|GA|^2 + 2|GB|^2 + 2|GC|^2 + 2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} \\
&= 3|GA|^2 + 3|GB|^2 + 3|GC|^2,
\end{aligned}$$

grâce à la propriété précédemment demontrée. On a donc bien

$$\frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2}{|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2} = 3.$$

4. Notons A, B, C et D les sommets du tétraèdre, et considérons un point O quelconque de l'espace.

   Le milieu M de l'arête $[AB]$ est tel que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

   De même, le milieu N de l'arête $[CD]$ est tel que

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

   Par conséquent, le milieu P du segment $[MN]$, qui est un point particulier de la droite MN, est caractérisé par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).\end{aligned}$$

   Cette expression est indépendante de la paire d'arêtes opposées considérées. En d'autres termes, le même raisonnement permet de montrer que la droite joignant les milieux des arêtes $[AC]$ et $[BD]$, ainsi que celle reliant les milieux de $[AD]$ et $[BC]$, passent toutes deux par ce même point P. Ces trois droites sont donc bien concourantes.

5. (a) On remarque que l'on a

$$\overrightarrow{AB}(-2, -1, 1)$$

   et

$$\overrightarrow{BC}(1, 0, 2),$$

   ce qui conduit à

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -2 + 0 + 2 = 0.$$

   Par conséquent, le triangle ABC est rectangle en B, et son aire $\mathcal{A}$ est donc égale à

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{|AB|.|BC|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}\ \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{2}.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\overrightarrow{AB}(-2,-1,1)$$
$$\overrightarrow{AC}(-1,-1,3)$$
$$\overrightarrow{AD}(-1,-1,2).$$

Les points A, B, C et D dont coplanaires si et seulement si ces trois vecteurs sont linéairement dépendants, c'est-à-dire si le déterminant

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

est nul. Ce déterminant étant égal à -1, on en déduit que les quatre points n'appartiennent pas à un même plan.