UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2013

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un triangle PQR non isocèle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{P}$ et la médiatrice du côté $[QR]$ se coupent en un point appartenant à $\mathcal{C}$.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y = ax^2$ (où a est un réel non nul donné). On donne aussi le point $P_0(x_0, y_0)$, différent de l'origine des axes. On note alors $\mathcal{P}_0$ la parabole obtenue en translatant $\mathcal{P}$ de telle sorte que le sommet de $\mathcal{P}_0$ coïncide avec le point P_0.

   (a) Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_0$.

   (b) On considère les droites d passant par l'origine $(0, 0)$. On demande de trouver le lieu des milieux des segments dont les extrémités sont les intersections de d et de $\mathcal{P}_0$.

3. On considère deux points A et B appartenant à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un point P situé sur la droite AB. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \ell^2 - r^2,$$

   où ℓ et r désignent respectivement la longueur du segment $[PO]$ et le rayon de $\mathcal{C}$.

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan Π d'équation cartésienne $ax + by + cz = 2$, où a, b, c sont des réels non simultanément nuls, et on donne également les points

$$A(2,0,0), \quad B(0,2,0), \quad C(1,1,0), \quad D(0,0,1).$$

   Déterminer les valeurs possibles de a, b, c pour que Π passe par C et D et qu'il soit équidistant de A et B.

5. On note d_1, d_2 et d_3 trois droites parallèles de l'espace distinctes et non coplanaires, et π, π' et π'' trois plans sécants à ces droites. Les points de percée de d_1 dans π, π' et π'' sont respectivement notés A, A' et A''. De même, les points de percée de d_2 et d_3 dans ces plans sont respectivement notés B, B', B'' et C, C', C''. Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont alignés.

Exemples de solutions

1. Notons M le milieu de l'arc $\overline{QR}$ de $\mathcal{C}$ qui est opposé à P (c'est-à-dire, celui qui ne contient pas P). Ce point M est équidistant de Q et de R, et appartient donc à la médiatrice de $[QR]$. Pour démontrer la propriété, il suffit donc d'établir que le point M appartient également à la bissectrice de l'angle $\widehat{QPR}$.

   Les angles $\widehat{QPM}$ et $\widehat{MPR}$ sont deux angles inscrits au cercle $\mathcal{C}$, interceptant des arcs $\overline{QM}$ et $\overline{MR}$ qui sont égaux. Ces angles sont dès lors égaux, et M appartient donc bien à la bissectrice de l'angle $\widehat{QPR}$.

2. (a) Le sommet de la parabole $\mathcal{P}$ est situé à l'origine du repère $(0,0)$. Un point (x,y) appartient donc à $\mathcal{P}_0$ si et seulement si il existe un point (x',y') appartenant à $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0, \end{aligned}$$

   c'est-à-dire si et seulement si le système d'équations

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ y' = ax'^2 \end{cases}$$

   admet une solution. En éliminant x' et y' de ce système, on obtient l'équation cartésienne

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

   (b) Il n'est pas nécessaire de considérer les droites d parallèles à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire, d'équation $x = b$ où b est une constante réelle), car celles-ci ne rencontrent $\mathcal{P}_0$ qu'en un seul point. Il est donc suffisant de considérer les droites d d'équation

$$y = mx,$$

   où m est un paramètre réel. Les intersections (x,y) de d et de $\mathcal{P}_0$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a(x - x_0)^2 + y_0. \end{cases}$$

Pour une valeur donnée de m, ces intersections possèdent donc une abscisse x qui satisfait l'équation

$$a(x - x_0)^2 + y_0 = mx,$$

qui peut se réécrire

$$ax^2 - (2ax_0 + m)x + (ax_0^2 + y_0) = 0. \qquad (1)$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut

$$\Delta = m^2 + 4ax_0m - 4ay_0.$$

L'équation (1) admet deux solutions (ce qui signifie que la droite d rencontre $\mathcal{P}_0$ en deux points distincts) lorsque ce discriminant est strictement positif. Selon les valeurs de a, x_0 et y_0, c'est le cas soit pour toutes les valeurs de m, soit pour les valeurs de m situées à l'extérieur d'un intervalle $[m_1, m_2]$ dont les bornes m_1 et m_2 dépendent de a, x_0 et y_0. (Ces bornes correspondent aux coefficients angulaires des droites issues de l'origine qui sont tangentes à la parabole $\mathcal{P}_0$.)
Si m est tel que $\Delta > 0$, alors l'équation (1) admet deux solutions dont la somme vaut

$$\frac{2ax_0 + m}{a} = 2x_0 + \frac{m}{a}.$$

Le milieu du segment reliant les intersections de d avec P_0 possède donc l'abscisse

$$x = x_0 + \frac{m}{2a}.$$

De plus, étant donné que ce point appartient à d, son ordonnée satisfait $y = mx$, et vaut donc

$$y = mx_0 + \frac{m^2}{2a}.$$

En éliminant le paramètre m du système

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{m}{2a} \\ y = mx_0 + \frac{m^2}{2a}, \end{cases}$$

on obtient

$$y = 2ax^2 - 2ax_0x,$$

qui est l'équation d'une parabole. En fonction des valeurs de a, x_0 et y_0, le lieu recherché est formé soit de la totalité de cette parabole, soit de deux arcs ouverts et infinis de celle-ci.

3. Notons M le milieu du segment $[AB]$. En appliquant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})\\ &= (\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})\end{aligned}$$

car on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$. Cette expression se développe en

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA}\\ &= |PM|^2-|MA|^2,\end{aligned}$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Dans les triangles rectangles PMO et AMO, le théorème de Pythagore fournit respectivement

$$|PM|^2 = |PO|^2 - |MO|^2$$

et

$$|MA|^2 = |OA|^2 - |MO|^2.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= |PO|^2-|OA|^2\\ &= \ell^2-r^2.\end{aligned}$$

4. Pour que les points C et D appartiennent à Π, leurs coordonnées doivent satisfaire l'équation de ce plan, ce qui correspond à la condition

$$\begin{cases} a+b=2\\ c=2.\end{cases}$$

On remarque ensuite que le point C est situé au milieu du segment $[AB]$. Si le plan Π passe par ce point C, alors les points A et B sont des images l'un de l'autre par une symétrie centrale d'origine C, qui laisse Π inchangé. On en déduit que, sous l'hypothèse où il passe par C, le plan Π est toujours équidistant de A et de B. Les conditions obtenues sur a, b et c sont sonc suffisantes.

5. Appelons $d_{1,2}$ la droite parallèle à d_1 et de d_2 dans le plan formé par ces deux droites, et située à égale distance de d_1 et de d_2. La droite $d_{1,2}$ coupe le segment $[AB]$ en son milieu M. De même, elle coupe $[A'B']$ et $[A''B'']$ en leurs milieux.

De la même manière, on définit la droite $d_{2,3}$ située à égale distance de d_2 et de d_3 dans le plan formé par ces deux droites. Cette droite $d_{2,3}$ coupe les segments $[BC]$, $[B'C']$ et $[B''C'']$ en leurs milieux. On note N le milieu de $[BC]$.

Le centre de gravité G du triangle ABC est situé à l'intersection des médianes AN et CM de ce triangle. La droite AN correspond à l'intersection du plan π avec le plan α formé par les deux droites parallèles d_1 et $d_{2,3}$, car les points A et N appartiennent tous les deux à ces deux plans. De même, la droite CM correspond à l'intersection du plan π avec le plan β formé par les deux droites parallèles d_3 et $d_{1,2}$. Etant donné que G appartient aux plans α et β, il appartient à leur intersection, que l'on note d.

Le même raisonnement dans les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ permet d'établir que les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur la droite d. Ces trois points sont donc bien alignés.