UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2015

Enoncés

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupant en deux points distincts A et B. On note P le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, et P' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}'$.

   Démontrer que les points P, B et P' sont alignés.

2. Dans un repère orthonormé (O, X, Y), on considère une parabole $\mathcal{P}_1$ d'axe Y dont le sommet est l'origine O et dont tous les points ont une ordonnée positive ou nulle. On considère aussi la parabole $\mathcal{P}_2$, translatée de $\mathcal{P}_1$, de sommet au point de coordonnées $(4, 0)$. Les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont telles que leurs tangentes respectives à leur point d'intersection sont orthogonales. On demande de déterminer les équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exemples de solutions

1. Le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$, dont le segment $[AP]$ est un diamètre. Le triangle ABP étant inscrit dans un demi-cercle, il est rectangle en B, ce qui signifie que l'angle $\widehat{ABP}$ est droit. Par un raisonnement similaire dans le cercle $\mathcal{C}'$, dont $[AP']$ est un diamètre, on obtient que l'angle $\widehat{ABP'}$ est également droit. Les points P et P' appartiennent donc tous deux à la droite perpendiculaire à AB passant par B. Les trois points P, B, et P' sont donc bien situés sur une même droite.

2. Vu les données du problème (à savoir, sommet à l'origine du repère, axe Y et ordonnées toutes positives), dans le repère donné, la parabole $\mathcal{P}_1$ a pour équation cartésienne

   $$y = ax^2,$$

   où a est un réel strictement positif. Comme la parabole $\mathcal{P}_2$ est de sommet $(4, 0)$ et est la translatée de $\mathcal{P}_1$, son équation cartésienne est

   $$y = a(x - 4)^2.$$

Le point d'intersection de ces paraboles a donc une abscisse qui vérifie l'égalité

$$ax^2 = a(x-4)^2.$$

Le réel 2 est l'unique solution de cette équation. Cela étant, comme les coefficients angulaires des tangentes au point d'abscisse x sont respectivement

$$2ax \qquad \text{et} \qquad 2a(x-4),$$

l'expression du fait que ces tangentes sont orthogonales au point d'abscisse 2 s'exprime par l'égalité

$$4a.2a(-2) = -1 \qquad \text{ou encore} \qquad a^2 = \frac{1}{16}.$$

Comme a est strictement positif, on obtient

$$a = \frac{1}{4}$$

et finalement les équations

$$y = \frac{x^2}{4} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{(x-4)^2}{4}.$$