UNIVERSITE DE LIEGE

Faculté des Sciences Appliquées

QUESTIONS POSEES AUX EXAMENS D'ADMISSION

2001 - 2005

EXAMENS DE 2001

JUILLET 2001

ALGEBRE

1. Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + az = 1 \\ x - y + 2z = a \end{cases}$$

   où a est un paramètre réel.

2. Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Si z_1, z_2, z_3 désignent les trois racines du polynôme

$$24z^3 - 26z^2 + 9z - 1,$$

   calculer

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}.$$

   Suggestion : identifier le polynôme et sa décomposition en facteurs pour obtenir la somme, le produit et la somme des produits 2 à 2 des racines.

ANALYSE

1. Un commerçant désire réaliser un emballage sans couvercle (avec fond) ayant la forme d'un cylindre droit à base elliptique. Les designers lui conseillent d'utiliser une base elliptique décrite par

$$4x^2 + y^2 \leq a^2$$

où $a > 0$ est un paramètre à déterminer. Soit h la hauteur du cylindre droit.

a) Exprimer la surface S de la base elliptique sous forme d'une intégrale et montrer qu'elle vaut $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

b) Déterminer les paramètres a et h correspondant à l'emballage de volume V fixé présentant la surface extérieure (surface latérale + fond) minimale. Justifier que le minimum obtenu est absolu.

Le périmètre de la base elliptique est donné par

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}\, d\theta = 4\alpha\pi^2 a$$

où α est approximativement égal à 0.49.

2. Déterminer les limites suivantes en discutant les cas où le paramètre α est négatif, nul, positif :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha/x}\sin\alpha x}{x^2}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\alpha/x}\sin\alpha x}{x^2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha/x}\sin\alpha x}{x^2}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\alpha/x}\sin\alpha x}{x^2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\alpha/x}\sin\alpha x}{x^2}$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier les identités suivantes :

$$\operatorname{tg}\left(45^o - \frac{a}{2}\right) = \frac{1-\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1+\sin a}.$$

2. Soient

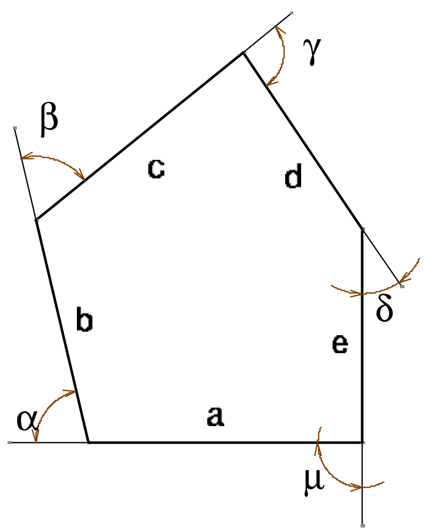
$$\begin{aligned} m^2 &= \cos^2\beta + \sin^2\alpha\ \sin^2\beta \\ n^2 &= \cos^2\alpha \\ p^2 &= \sin^2\beta + \sin^2\alpha\ \cos^2\beta \end{aligned}$$

et les équations

$$4m^2 = n^2 = p^2.$$

On demande de calculer les valeurs des angles α et β et de les représenter sur le cercle trigonométrique.

3. Un pentagone volontairement déformé est défini comme sur la figure ci-dessous.



Données :

$$\begin{aligned} a &= 10m \\ b &= 30m \\ c &= 40m \\ d &= 50m \\ \\ \alpha &= 45^o \\ \beta &= 60^o \\ \mu &= 90^o \end{aligned}$$

Calculer γ, δ, $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, le périmètre et la surface du pentagone.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. Soient ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit (c'est-à-dire le cercle passant par A, B et C).

   On note A' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la médiatrice du segment $[B, C]$ qui est tel que A et A' soient situés de part et d'autre de la droite BC.

   Les points B' et C' sont définis de façon analogue : B' sur $\mathcal{C}$ et la médiatrice du segment $[A, C]$, C' sur $\mathcal{C}$ et la médiatrice du segment $[B, C]$, B et B' de part et d'autre de AC, C et C' de part et d'autre de AB.

   Prouver que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.

2. On donne quatre droites distinctes d_1, d_2, d_3 et d_4 "formant rectangle", c'est-à-dire telles que $d_1 \| d_3, d_2 \| d_4$ et $d_1 \perp d_2$.

   Quel est le lieu des points P dont les symétriques orthogonaux P_1, P_2, P_3 et P_4 par rapport aux droites respectives d_1, d_2, d_3 et d_4 sont sur un même cercle ?

   On précisera notamment la nature géométrique du lieu.

3. On donne quatre points $ABCD$, sommets d'un trapèze, en ce sens que la droite AB est parallèle à la droite CD. On donne aussi un réel $k \neq 0$.

   Les points M, N, P, Q sont définis par les égalités suivantes :

   $$\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{NC} = \frac{1-k}{k}\ \overrightarrow{AN}, \quad \overrightarrow{BP} = k\ \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{QC} = (1-k)\ \overrightarrow{BC}\ .$$

   a) Montrer que les points M, N, P, Q sont alignés.

   b) Prouver que les segments $[P, N]$ et $[Q, M]$ ont même milieu.

   c) Pour quelle(s) valeur(s) de k les points A, B, Q, M sont-ils les sommets d'un parallélogramme ? (On donnera la réponse en fonction du paramètre t tel que $\overrightarrow{CD} = t\ \overrightarrow{AB}$.)

4. On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier (c'est-à-dire dont tous les côtés sont égaux).

   Soit E le milieu du côté $[C, D]$.

   a) Montrer que la droite CD est perpendiculaire au plan ABE.

b) Montrer que la hauteur du triangle ABE issue de A est perpendiculaire à la face BCD et que la hauteur du triangle ABE issue de B est perpendiculaire à la face ACD.
(Rappelons qu'une hauteur du tétraèdre est une droite passant par un des sommets et perpendiculaire à la face opposée. Le pied d'une hauteur est son intersection avec la face à laquelle elle est perpendiculaire.)

c) Montrer que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.

d) En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

5. On donne des équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2, d_3 de l'espace :

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+1}{3}, \quad d_2 : \frac{x}{3} = y+1 = \frac{z-2}{5}, \quad d_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

a) Donner une équation du plan α contenant d_1 et parallèle à d_3.

b) Donner une équation du plan β contenant d_2 et parallèle à d_3.

c) Donner les équations de la droite d s'appuyant sur d_1 et d_2 et parallèle à d_3.

SEPTEMBRE 2001

ALGEBRE

1. Pour quelles valeurs réelles de m le trinôme

$$mx^2 + 2mx + 1$$

possède-t-il deux racines distinctes dans l'intervalle $]-2, 0[$?

2. Déterminer les formes algébrique et trigonométrique des racines cubiques de $(-i)$.

3. Résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ANALYSE

1. Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)}$$

en discutant, s'il y a lieu, en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}_0$ ($a \neq 0$).
En particulier, déterminer

a) le domaine de définition de f,

b) le domaine de continuité de f,

c) les asymptotes éventuelles,

d) croissance / décroissance / extrema,

e) concavité / points d'inflexion.

Esquisser le graphe de f.

2. En ajustant la valeur du paramètre a, déterminer une fonction $g(x)$ définie sur $I =]-1, 1[$, possédant des asymptotes verticales en -1 et $+1$, dont la dérivée sur I est donnée par la fonction $f(x)$ de la question 1 et telle que $g(0) = 1$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité suivante

$$\sin 3a = 4\ \sin(60^o - a)\ \sin a\ \sin(60^o + a).$$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$\mathrm{tg} x + \mathrm{cotg} x + \sec x + \mathrm{cosec} x = -2.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Soit un trapèze $ABCD$, CD étant parallèle à AB.
L'angle en B est de 60 degrés.
On donne également $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm et $CD = 8$ cm.
Calculer

a) le périmètre,

b) la surface,

c) les angles intérieurs

du trapèze.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. Par un point P extérieur à un cercle $\mathcal{C}$, on mène les deux tangentes t et t' à ce cercle, les points de tangence étant T et T' respectivement.
   Soient Q le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à T, Q' le pied de la perpendiculaire abaissée de T' sur QT et R le point d'intersection de QT' avec t.

   a) Montrer que $TT' \perp QR$.

   b) Montrer que le triangle $PT'R$ est isocèle.

   c) Montrer que P est le milieu de $[T, R]$.

   d) Montrer que QP coupe $[Q', T']$ en son milieu.

2. Dans un repère orthonormé, on considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point P (1,0). Si Q est un point de l'axe Ox, on note R le symétrique de Q par rapport à P et S le symétrique de P par rapport à R.

   a) Si Q est de coordonnées $(\alpha, 0)$, quelles sont les coordonnées de R ?

   b) Pour quelle(s) valeur(s) de α les points Q et S coïncident-ils ?

   c) Quelles sont les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ issues de Q ?

   d) Quelles sont les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ issues de S ?

   e) Quel est le lieu des points communs aux tangentes à $\mathcal{P}$ menées par Q et par S et ne passant pas par le sommet de $\mathcal{P}$?

3. On donne quatre points A, B, C, D dans le plan.

   a) Montrer que si M est un point du plan, le vecteur

   $$\mathbf{v} = 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$

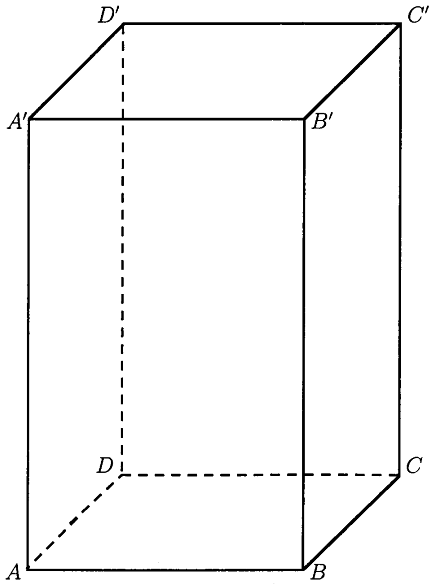
   est indépendant du point M.

b) Montrer que si le vecteur $\mathbf{v}$ de 1) est nul ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), le nombre

$$x = 4|\overrightarrow{MA}|^2 + 3|\overrightarrow{MB}|^2 - 5|\overrightarrow{MC}|^2 - 2|\overrightarrow{MD}|^2$$

est aussi indépendant de M.

4. On considère un prisme droit $ABCDA'B'C'D'$, à base **carrée** $ABCD$ (cf. figure).



a) Si X est le centre (intersection des diagonales) de la face $A'B'C'D'$, la hauteur du triangle BXB' issue de B' est perpendiculaire au plan $A'C'B$.

b) Prouver que si les diagonales BD' et $B'D$ sont perpendiculaires, alors la perpendiculaire abaissée de B' sur le plan $A'C'B$ passe par le milieu de l'arête $[D, D']$.

5. **a)** Quelles sont les coordonnées du pied Q de la perpendiculaire abaissée du point $P(\alpha, \alpha+1, \alpha-1)$ sur le plan π d'équation $2x + \alpha y + \alpha z + \alpha^3 + 4 = 0$?

b) Montrer que ces pieds, lorsque α parcourt $\mathbb{R}$, sont tous situés sur une même droite d, dont on déterminera des équations.

EXAMENS DE 2002

JUILLET 2002

ALGEBRE

1. **a)** Simplifier l'expression
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k}$$
b) En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{n+k}^j \quad (0 \leq j \leq n)$$
c) Vérifier le résultat pour $n = 3$ et $j = 2$ et 3.

2. Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles le système suivant est compatible :
$$\begin{cases} ax + 1 > a \\ \dfrac{x+a}{a} < \dfrac{1}{4} \end{cases}$$
Suggestion : résoudre séparément chacune des deux inéquations.

3. **a)** Résoudre l'équation
$$(z+1)^3 = iz^3 \qquad (z \in \mathbb{C})$$
b) Vérifier que les points représentatifs des solutions dans le plan "complexe" sont situés sur une même droite parallèle à l'axe "imaginaire".

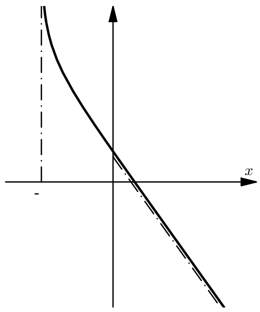
ANALYSE

1. Soit la fonction

$$f(x) = \ln \frac{e}{e^{bx} - c}$$

où b et c sont des paramètres réels strictement positifs et $e = \exp(1)$.

a) Déterminer les valeurs de b et c pour que $f(x)$ soit définie sur $]-2, +\infty[$ et admette les asymptotes $x = -2$ et $y = -2x + 1$ (en $+\infty$), i.e. pour que $f(x)$ admette la représentation graphique suivante



b) Calculer l'abscisse x en laquelle le graphe de $f(x)$ admet une tangente de pente égale à -4.

Suggestion : $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ si x et y sont strictement positifs.

2. On désire approcher la fonction $f(x) = x$ par une fonction du type $g(x) = \alpha + \beta \cos x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

a) Montrer que le choix $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ revient à exiger que les moyennes de $f(x)$ et de $g(x)$ sur $[0, \pi]$ soient égales, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(x)dx$$

b) Montrer que

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi x \cos x \, dx = -2$$

c) En utilisant les résultats du point b) et en posant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, calculer l'erreur quadratique moyenne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx$$

et déterminer β pour que celle-ci soit minimale.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier les identités suivantes :

   a) $(2\cos a+1)(2\cos a-1)(2\cos 2a-1) = 2\cos 4a+1$

   b) $\dfrac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a} = \text{tg } a$

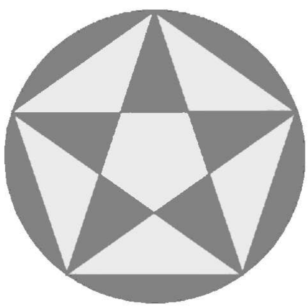
2. **a)** Déterminer les solutions α et β satisfaisant au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\cos\beta \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = B\sin\beta \end{cases}$$

   où A, B, P et Q sont des constantes connues.

   b) Donner les conditions sur A, B, P et Q pour assurer l'existence de ces solutions.

3. La figure ci-dessous représente un pentagone régulier, son cercle circonscrit et ses diagonales. En utilisant uniquement la formule de calcul de l'aire d'un cercle ou d'un de ses secteurs ainsi que les formules relatives aux triangles, calculer le rapport entre l'aire de la partie hachurée de la figure et l'aire de sa partie blanche.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. Soit ABC un triangle non rectangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A. La hauteur issue de A coupe $A'B$ en B', $A'C$ en C' et $\mathcal{C}$ en A et E.

   a) Montrer que le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC.

   b) Prouver que les segments $[A', C]$ et $[B, E]$ ont même longueur.

   c) Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est sur la tangente à $\mathcal{C}$ menée par A'.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et P le point de $\mathcal{P}$ d'abcisse 1. Quel est le lieu des sommets des paraboles d'axe parallèle à Oy et orthogonales à $\mathcal{P}$ en P (dire que deux paraboles sont orthogonales en P signifie qu'elles passent par P et que leurs tangentes en P sont perpendiculaires).

3. Soit ABC un triangle, D le point du segment $[A, B]$ situé au tiers à partir de A et E le point de segment $[C, D]$ situé au tiers à partir de D. On note G_1 le centre de gravité du triangle AEC et G_2 celui du triangle BEC.

   a) Prouver que ADG_1G_2 est un parallélogramme ;

   b) Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

4. Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note M le milieu de $[A, B]$ et π le plan contenant M et parallèle à AD et à BC. Ce plan coupe AC en N, CD en O et DB en P.

   a) Montrer que $MNOP$ est un parallélogramme.

   b) En déduire que les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $Oxyz$.

   a) Démontrer qu'il existe une droite d passant par l'origine et telle que les plans d'équation

   $$(2r^2 + 6r - 2)x - (r^2 - 1)y - 2rz + r^2 + 1 = 0$$

   où r parcourt $\mathbb{R}$, soient tous parallèles à d.

b) Déterminer la perpendiculaire commune à d et à la droite d' d'équations

$$d' : \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$$

SEPTEMBRE 2002

ALGEBRE

1. Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} ax + ay + z = 1 \\ bx + y + bz = 1 \\ ax + by + az = b \end{cases}$$

   où a et b sont des paramètres réels.

2. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{1+iz}$ lorsque $|z| = 1$ $(z \in \mathbb{C})$.

3. Résoudre l'inéquation

$$\frac{3}{x-1} \leq \sqrt{x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ANALYSE

1. Etudier le graphe de la fonction

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

   en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre $a \geq 0$.
   En particulier, déterminer

a) le domaine de définition de f

b) le domaine de continuité de f

c) les asymptotes éventuelles

d) croissance/décroissance/extrema

e) concavité / points d'inflexion

Esquisser le graphe de f.

2. **a)** Calculer
$$\int_1^e x \;\ln x \; dx$$
où $e = \exp(1)$.

b) Généraliser le résultat obtenu en a) en montrant que, pour $n \neq -1$,
$$\int_1^e x^n \;\ln x \; dx = \frac{n\; e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

c) Soit la fonction g définie par
$$g(x) = \int_1^x (2-t)\ln t \; dt$$
Déterminer x correspondant au maximum de $g(x)$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. **a)** Démontrer que
$$\text{cosec } a = \text{cotg}\frac{a}{2} - \text{cotg } a$$

b) Calculer l'expression suivante :
$$\text{cosec } a + \text{cosec } 2a + \text{cosec } 4a + \text{cosec } 8a$$

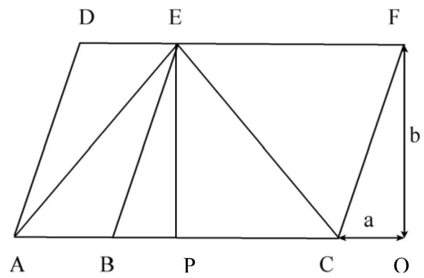
Rappel : $\text{cosec } a = \dfrac{1}{\sin a}$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\text{cotg } x - \cos x}{\text{cotg } x + \cos x} = 2(1 - \sin x)$$

3. On donne 2 parallélogrammes : $ABED$ et $BCFE$. On sait que :

$$AB = 3\text{m}, \;\; BC = 7\text{m}, \;\; a = 2\text{m} \;\text{ et }\; b = 6\text{m}$$



Calculer

a) les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BEC}$

b) les longueurs des segments $[A, E]$, $[B, E]$ et $[C, E]$

c) le rapport des longueurs des diagonales $[A, E]$ et $[C, E]$.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. On considère un triangle ABC. On note H son orthocentre et F le pied de la hauteur issue de A. Par B on mène une droite d ; par C on mène une droite $e \perp d$. La parallèle à d passant par A coupe e en E ; la parallèle à e passant par H coupe d en D.

a) Montrer que les points A, E, F et C sont cocycliques et en déduire que les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACE}$ sont égaux ou supplémentaires.

b) Montrer de même que les points H, D, F et B sont cocycliques et que les angles $\widehat{DBH}$ et $\widehat{DFH}$ sont égaux ou supplémentaires.

c) Montrer que $\widehat{ACE}$ et $\widehat{DBH}$ sont égaux ou supplémentaires.

d) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy, on considère les points $A(0,a), B(b,0)$ et $C(-b,0)$ formant un triangle isocèle $(a,b>0)$. On considère un point $P(\lambda,0)$ variable sur Ox.

   a) Quelles sont les coordonnées des pieds B' et C' des perpendiculaires abaissées de P sur AB et AC respectivement.

   b) Quel est le lieu du milieu de $[B',C']$ lorsque P parcourt le *segment* $[B,C]$?

   c) Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à $B'C'$ menée par P ? Montrer qu'elle passe par un point fixe quand P parcourt l'axe $0x$.

3. Soit ABC un triangle dont l'angle en A est aigu. Le cercle de diamètre AB coupe la hauteur issue de C en des points X et Y ; le cercle de diamètre AC coupe la hauteur issue de B en des points Z et T.

   a) Montrer que $|\overrightarrow{AX}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que les points X, Y, Z et T sont sur un même cercle, dont on déterminera le centre.

4. Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note respectivement h_A et h_B les hauteurs du tétraèdre issues de A et B.

   a) Démontrer que h_A et h_B sont concourantes si et seulement si la droite AB est orthogonale à la droite CD.

   b) Démontrer que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales deux à deux.

5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les points $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ de coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{et} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Montrer que $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan Π qu'ils déterminent.

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan Π' perpendiculaire à Π et passant par la droite d'équation $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

EXAMENS DE 2003

JUILLET 2003

ALGEBRE

1. Résoudre l'équation (en nombres complexes) :

$$(2z^2 - 1)^3 = (z^2 + 1)^3.$$

2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax & +(a+1)y & +(a-1)z & = & 2a+3 \\ x & +(1+a)y & +(1-a)z & = & 4a+1 \\ (a+1)x & +2(a+1)y & & = & 6a+4. \end{cases}$$

3. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

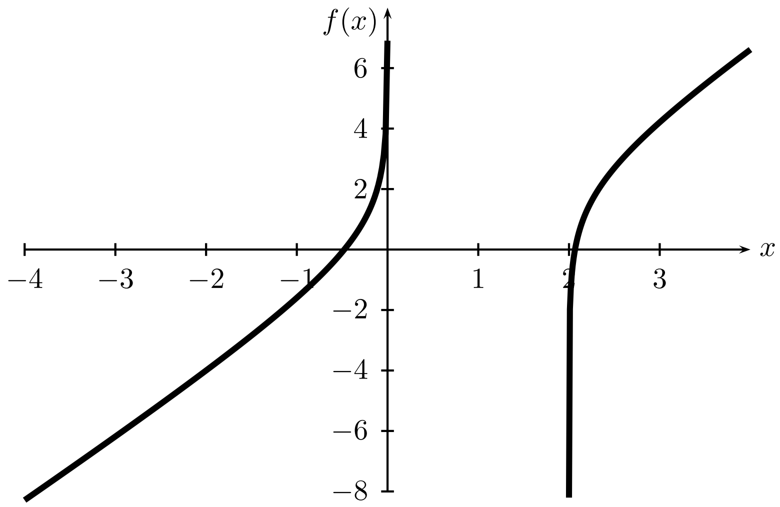
$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2 + \sqrt{-x}.$$

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) + \frac{2x}{a}$$

où a désigne un paramètre réel non nul. En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation suivante du graphe de f dans le cas particulier où $a = 1$.



a) Esquisser le graphique de f dans le cas où a désigne un paramètre réel strictement positif quelconque. Préciser, en justifiant, le domaine de définition de f, les limites caractéristiques et asymptotes, les extrema et changements de concavité éventuels.

b) Sans effectuer aucun calcul, esquisser le graphique de f dans le cas où a est strictement négatif.

2. On appelle "coefficients de Fourier" de la fonction f les paramètres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

à condition que ces intégrales existent.

a) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = x$.

b) Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction paire f sont donnés par

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier que, pour tout x, on a l'identité suivante :

$$\sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$$

2. Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

$$\sin 10^\circ \ \sin 30^\circ \ \sin 50^\circ \ \sin 70^\circ \ \sin 90^\circ = \frac{1}{16}$$

3. Résoudre l'équation suivante :

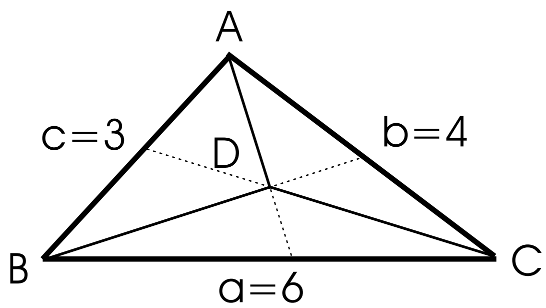
$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$$

   Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

4. Soit un triangle dont les côtés mesurent respectivement $a = 6\,cm$, $b = 4\,cm$ et $c = 3\,cm$ (voir figure).

   a) On demande d'abord de calculer les valeurs des trois angles intérieurs du triangle A, B et C.

   b) On divise ensuite le triangle en trois sous-triangles dont le sommet est D, point d'intersection des médianes. On demande de calculer les aires, les angles et les cotés des trois sous-triangles ABD, BCD et ADC (en utilisant uniquement la trigonométrie).



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

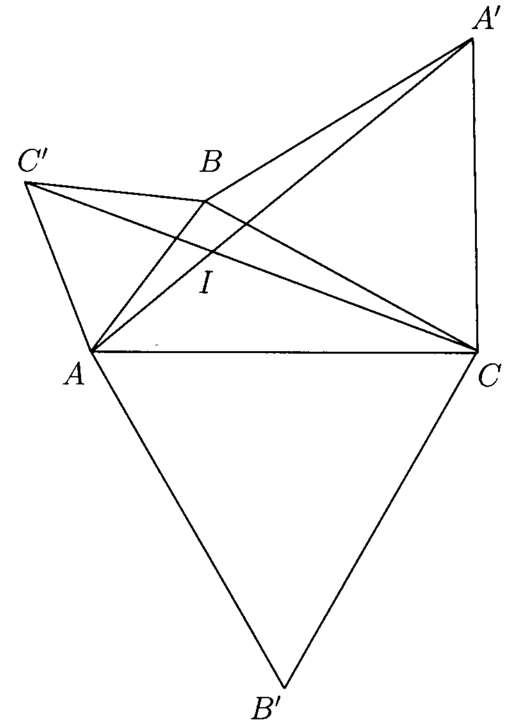
Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. On considère un triangle ABC dont les angles sont inférieurs à 120°. On construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et ACB' extérieurs à ABC. On note I l'intersection de AA' et CC'.

   a) Démontrer que $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

   b) Démontrer que $\widehat{BIC} = \widehat{BIA} = 120°$.

   c) Démontrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.



2. On considère un triangle ABC. Par B, on mène une droite d variable qui coupe AC en D. Déterminer l'équation carésienne du lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABD.

3. On considère un quadrilaère convexe $ABCD$. On note E le milieu de $[A, C]$ et F le milieu de $[B, D]$. Démontrer que

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + 4|\overrightarrow{EF}|^2.$$

4. Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $|AC| = |AD|$ et $|BC| = |BD|$ et tel que les triangles ACD et BCD aient même aire. Si M et M' sont les milieux de $[C, D]$ et $[A, B]$, démontrer que MM' est la perpendiculaire commune à AB et CD.

5. Pour tous réels a, b, c non simultanément nuls, on considère le plan
$$\pi_{abc} \equiv ax + by + cz = 1.$$
   a) Déterminer les conditions sur $a,\ b,\ c$ pour que la distance de π_{abc} à l'origine soit égale à 1.

   b) Déterminer les conditions sur $a,\ b,\ c$ pour que π_{abc} soit parallèle à la droite $d \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y \\ y & = & z \end{array} \right.$.

   c) Déterminer le lieu géométrique de l'intersection de π_{abc} et de la droite perpendiculaire à π_{abc} passant par l'origine, quand les paramètres $a,\ b, c$ satisfont les conditions de a) et b).

SEPTEMBRE 2003

ALGEBRE

1. Résoudre l'équation (en nombres complexes) :
$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0.$$
   Suggestion : développer $(z^2 + 1)^4$.

2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :
$$\left\{ \begin{array}{lllllll} ax & + & a^2y & + & a^3z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ a^3x & + & a^2y & + & az & = & 0. \end{array} \right.$$

3. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé :

   "Pour tout réel x tel que $|x| < 1/2$, on a $ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0$."

   est vrai.

ANALYSE

1. Etudier la fonction
   $$f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x - a}$$
   où a désigne un paramètre réel strictement positif.
   En discutant s'il y a lieu en fonction de a, déterminer

   a) le domaine de définition de f,

   b) les asymptotes éventuelles,

   c) croissance / décroissance / extrema,

   d) concavité / points d'inflexion.

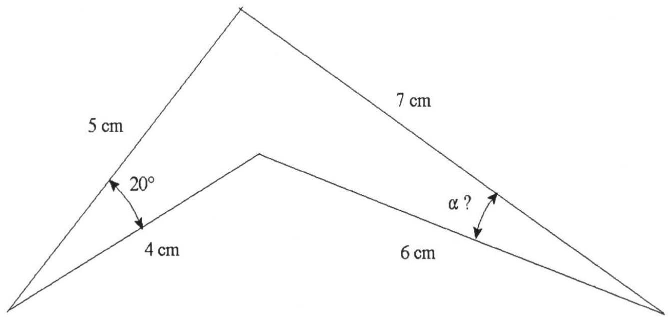
   Etablir le tableau des variations de f et esquisser le graphe de f.

2. **a)** Calculer
   $$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$
   et
   $$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$$

   b) Si on note
   $$I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx$$
   où n est un naturel, a-t-on
   $$I_n > I_{n+1}, \quad I_n = I_{n+1} \quad \text{ou} \quad I_n < I_{n+1}$$
   pour tout n ? Justifier sans évaluer aucune intégrale.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Pour la figure donnée, calculer l'angle α et l'aire du polygone.



2. On suppose que l'on connaît la valeur de $\cos 2\alpha$. Posons $\cos 2\alpha = m$. On demande alors de calculer la valeur de l'expression :

$$E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$$

   en fonction de la valeur de m.
   Vérifier le résultat obtenu pour $m = \frac{1}{3}$.

3. Trouver toutes les solutions x qui satisfont à l'équation suivante :

$$\cos 9x \; - \; 2 \, \cos 6x \; = \; 2$$

   Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

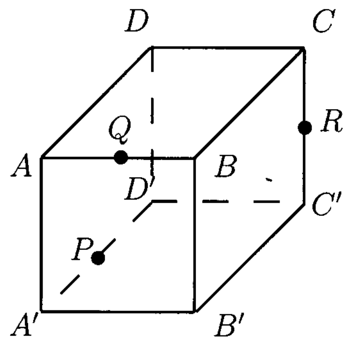
1. On considère un triangle quelconque ABC. On note H son orthocentre et D le pied de la hauteur issue de A. La droite AD coupe le cercle circonscrit au triangle en P.
   Démontrer que $|HD| = |DP|$.

2. On considère une ellipse ε de demi grand axe a et de demi petit axe b ($a > b > 0$). On note A_1 et A_2 les sommets du grand axe et d_1 et d_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2. Par un point P de ε distinct de A_1 et A_2, on mène une tangente T à ε qui coupe d_1 en P_1 et d_2 en P_2.
   Démontrer que $\overrightarrow{A_1P_1}.\overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.

3. On considère un parallélipipède dont DA, DB, DC sont des arêtes et AA', BB', CC' des diagonales.
   Montrer que

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AA'}|^2 + |\overrightarrow{BB'}|^2 + |\overrightarrow{CC'}|^2 &= |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &\quad + |\overrightarrow{DA}|^2 + |\overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2.\end{aligned}$$

4. On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$. On note P le milieu de $[D', A']$, Q le milieu de $[A, B]$ et R le milieu de $[C, C']$.



   a) Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$.
   b) Montrer que le plan PQR est parallèle au plan ACD'.
   c) Montrer que PQR coupe le cube selon un hexagone régulier.

5. On considère les droites d_1 et d_2 données par leurs équations dans un repère orthonormé de l'espace :

$$d_1 \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}, \quad d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}.$$

   a) Montrer que d_1 et d_2 sont gauches.

b) Ecrire l'équation du plan π parallèle à d_1 et à d_2 et qui contient le point P de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Ecrire l'équation d'une droite perpendiculaire à π et qui s'appuie sur d_1 et d_2.

EXAMENS DE 2004

JUILLET 2004

ALGEBRE

1. **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + 1 + i = 0.$$

Remarque : on demande seulement les formes trigonométriques des racines.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 = 0$$

sachant qu'elle admet une racine négative ainsi que deux racines positives dont l'une est le double de l'autre.

2. **a)** Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

où $n \in \mathbb{N}_0$.

Suggestion : on pourra éventuellement utiliser la méthode par récurrence.

b) Calculer la somme des cubes des entiers multiples de 3 compris entre 32 et 62, en justifiant le résultat.

3. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (a^2+a)x + (a^2-1)y + (a+1)^2 z = 2a^2 \\ x + (1-a)y + (1+a)z = 1 - 4a \\ (1-a)x + 2(1-a)y = 6 - 6a \end{cases}$$

ANALYSE

1. Soit
$$f(x) = \frac{ax^2 + b\,\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$$
où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

a) Déterminer a et b sachant que le graphe de f présente
- une asymptote oblique $y = x - 1$ en $+\infty$;
- un minimum local en $x = 1$.

b) Avec les valeurs de a et b identifiées plus haut, la fonction f possède-t-elle d'autres asymptotes et minima ou maxima locaux que ceux identifiés ci-dessus ? (Le calcul de la dérivée seconde peut être évité.)

c) Esquisser le graphe de f.

2. Soit
$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n dx$$
où n est un entier positif ou nul quelconque.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer, par une intégration par parties, que
$$I_n = \mathrm{e} - n\, I_{n-1}.$$

Remarque : ne pas calculer explicitement la valeur de I_n.

c) Exprimer
$$\int_0^1 u^n\, \mathrm{e}^u\, du$$
en fonction de I_n.

d) Montrer que
$$I_n > I_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y} = \operatorname{tg}(x+y).$$

2. Résoudre l'inéquation suivante :

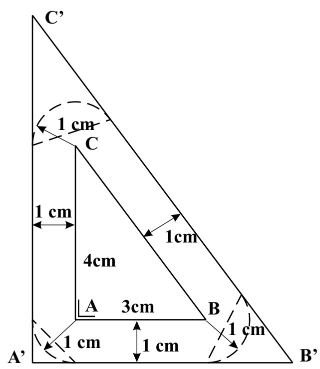
$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Soit le triangle ABC donné. L'angle en A est droit, $|AB| = 3\text{cm}$ et $|AC| = 4\text{cm}$.

   a) Calculer l'aire et le périmètre du triangle $A'B'C'$ dont les côtés sont situés à 1cm de ceux du triangle ABC (voir figure).

   b) Quel sera le résultat (aire et périmètre) pour la figure où les coins sont remplacés par des arcs de cercles tangents aux côtés ?



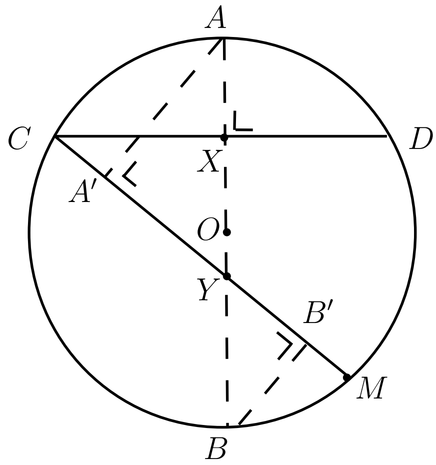
GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. On considère un diamètre AB et une corde CD perpendiculaire à AB, qui intersecte $[A, O]$ en X. Soit M un point de $\mathcal{C}$ tel que CM intersecte $[X, B]$ en Y. On note A' la projection orthogonale de A sur CM, B' la projection orthogonale de B sur CM et θ l'angle $\widehat{DCM}$.

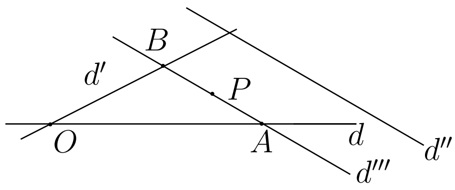
   a) Exprimer $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$ en fonction de R et θ.

   b) Démontrer que $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right|$.



2. On considère deux droites d et d' du plan qui s'intersectent en un point O. On considère une droite d'' qui n'est parallèle ni à d ni à d'. Une droite d''' parallèle à d'' intersecte d en A et d' en B.

   Déterminer l'équation cartésienne du lieu géométrique du milieu P de $[A, B]$ quand d''' varie.



3. Soit ABC un triangle tel que l'angle A soit obtus. On note E la projection orthogonale de B sur AC et F la projection orthogonale de C sur AB.

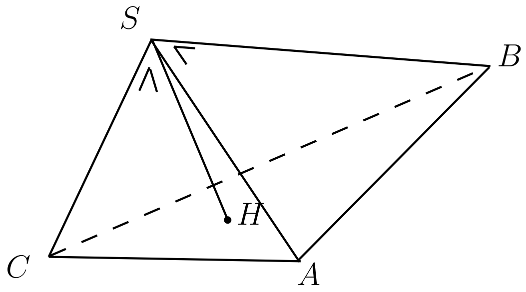
   Démontrer que $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{BF}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| \left|\overrightarrow{CE}\right|$.

4. On considère un tétraèdre $SABC$ tel que les droites SA, SB et SC soient perpendiculaires deux à deux. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan ABC.

   a) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

   b) Si on note a_{XYZ} l'aire du triangle XYZ, montrer que

$$\frac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \frac{a_{ASB}}{a_{AHB}}.$$

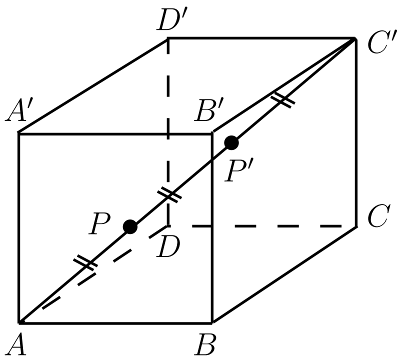


5. On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$. Sur la diagonale AC', on définit les points P et P' par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'C}$.

   a) Montrer que les droites PB et $D'P'$ sont parallèles.

   b) Montrer que PB et $A'D$ ont un point Q en commun.

   c) Montrer que PQ est la perpendiculaire commune aux droites AC' et $A'D$.



SEPTEMBRE 2004

ALGEBRE

1. **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^3 + 4z + \frac{1}{z} = 0.$$

Suggestion : on donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque racine.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4x^3 - 6x^2 - 12x + 9 \;=\; 0$$

sachant qu'elle admet une racine négative, ainsi que deux racines positives dont le quotient est $2 + \sqrt{3}$.

2. **a)** Construire un polynôme du troisième degré P_1 tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) \;=\; P_1(n)$$

pour tout entier naturel n.

Justifier le résultat proposé, par exemple par la méthode de récurrence.

b) Généralisation : pour quelles valeurs de k existe-t-il un polynôme du troisième degré P_k tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) \;=\; P_k(n)$$

pour tout entier naturel n ?

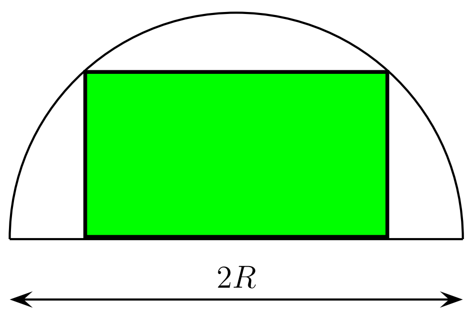
Justifier la réponse.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel m, on a

$$\mathsf{C}_{2m+1}^{m} \;=\; \mathsf{C}_{2m}^{m} + \mathsf{C}_{2m-1}^{m-1} + \cdots + \mathsf{C}_{m}^{0}\,.$$

ANALYSE

1. Calculer l'aire du plus grand rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon R. Justifier qu'il s'agit bien d'un maximum.



2. Soit
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx.$$

 a) Calculer I_0 et I_1.

 b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,
$$I_{n+1} = (n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1)I_{n-1}.$$

 c) Exprimer
$$\int_0^1 \frac{x \ \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$
 en fonction de I_n.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Démontrer que si les angles d'un triangle ABC satisfont à la relation
$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$
alors le triangle est rectangle en A.

2. Résoudre l'équation suivante :
$$\sin^3 x \ \cos x - \sin x \ \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Soit un triangle rectangle ABC dont l'angle en A est droit, $|AB| = 15\text{cm}$ et $|AC| = 8\text{cm}$.

 a) Calculer les valeurs des angles aux sommets B et C ainsi que la longueur de l'hypoténuse.

 b) Calculer la hauteur du triangle formé par le côté AC et les bissectrices intérieures des angles en A et C.

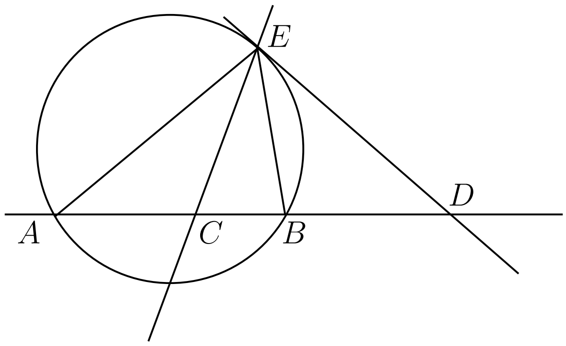
 c) Sachant que cette hauteur est aussi le rayon du cercle inscrit au triangle, calculer l'aire et le périmètre du triangle $A'B'C'$ dont les côtés sont situés à 1cm de ceux du triangle ABC, à l'extérieur de ce triangle.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point D extérieur au cercle. Par D, on trace une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B et une tangente au cercle dont on note E le point de contact. On construit un point C sur AB tel que $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DE}\right|$ et tel que C soit intérieur au cercle.

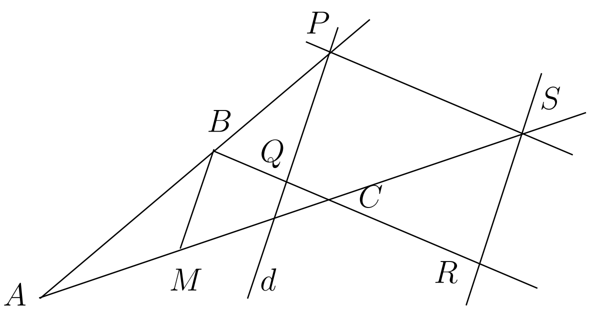
   Montrer que la droite EC est bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$.



2. On considère un triangle ABC et on note M le milieu de $[A, C]$. Une droite variable d parallèle à BM intersecte AB en P et BC en Q. La parallèle à BC passant par P coupe AC en S. La parallèle à d passant par S coupe BC en R.

   Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du parallélogramme $PQRS$ quand la droite d varie.

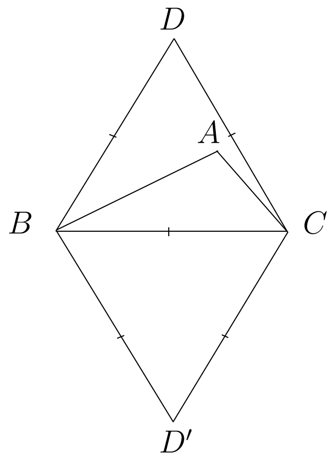
   Remarque : on pourra négliger les cas où le parallélogramme n'est pas défini.



3. On considère un triangle ABC (non isocèle) du plan. On construit sur le côté BC et dans le plan du triangle ABC deux triangles équilatéraux BDC et $BD'C$.

Démontrer la relation

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2.$$



4. On considère un tétraèdre $ABCD$. On note respectivement h_A, h_B, h_C et h_D les hauteurs du tétraèdre issues des sommets A, B, C et D. On suppose que h_A et h_B sont sécantes.

   a) Montrer que les droites AB et CD sont orthogonales.

   b) Montrer que h_C et h_D sont sécantes.

5. On se place dans des axes orthonormés et on considère la famille de plans d'équation
$$\pi_r \equiv r^2x + (-r^2 + 2r + 1)y - (2r + 1)z - 1 = 0$$
   où r est un paramètre réel.

   a) Démontrer que ces plans sont tous parallèles à une même droite d contenant l'origine et donner une équation cartésienne de d.

   b) Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de l'origine sur les plans π_r.

EXAMENS DE 2005

JUILLET 2005

ALGEBRE

1. **a)** Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} a^2x + y - az = 1\,, \\ x - ay + a^2z = -a\,, \\ -ax + a^2y + z = a^2\,. \end{cases}$$

b) Ce système admet-il une solution (x, y, z) satisfaisant les conditions additionnelles :

$$\begin{cases} xy + yz + zx = -4\,, \\ xyz = -4\,. \end{cases}$$

Justifier la réponse.

2. En évaluant de deux manières différentes une puissance de $(1+i)$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2m} \mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^{m+k} \; = \; 4^m\,.$$

En déduire que

$$2\left(1 - \mathsf{C}_{40}^{2} + \mathsf{C}_{40}^{4} - \mathsf{C}_{40}^{6} + \cdots - \mathsf{C}_{40}^{18}\right) \; = \; 2^{20} - \mathsf{C}_{40}^{20}\,.$$

3. Résoudre l'inéquation

$$\frac{x + \sqrt{3x+10}}{x - \sqrt{3x+10}} \;\leq\; \frac{x+1}{x-1}\,.$$

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha + x^2}$$

où α désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de α,

a) déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ;

b) déterminer les asymptotes éventuelles ;

c) rechercher les extrema éventuels et justifier leur nature ;

d) montrer, sans localiser précisément les points d'inflexion, que la concavité de f pour $|x|$ grand est opposée à la concavité de f au voisinage de $x = 0$;

e) esquisser le graphe.

2. On définit la seconde intégrale eulérienne $B(m, n)$ par

$$B(m, n) = \int 1_0 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

quels que soient les réels m et n strictement positifs.

a) Calculer $B(1, 2)$.

b) Calculer $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

c) Montrer que

$$B(m, n) = B(n, m)$$

en utilisant un changement de variable adéquat.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Un observateur relève l'angle $\alpha = 72°$ avec lequel il aperçoit la silhouette d'un arbre AB. L'oeil de l'observateur est situé au point Q placé à une hauteur $PQ = 1,80\ m$ du sol. On mesure également la distance $PB = 10,21\ m$ qui sépare l'observateur du pied de l'arbre. Quelle est la hauteur AB de l'arbre ?

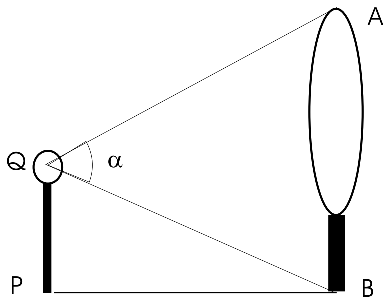


FIG. 1 Mesure de la hauteur d'un arbre

2. Résoudre l'équation suivante :

$$\cos^6 x + \sin^6 x \;=\; \frac{5}{8}$$

   Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3. Démontrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a} \;=\; \frac{\pi}{4}$$

   Pour quelles valeurs de a l'égalité est-elle vérifiée ?

4. Montrer que si les angles x et y vérifient

$$\operatorname{tg}^2 x \;=\; 2\ \operatorname{tg}^2 y + 1$$

   alors on a l'égalité

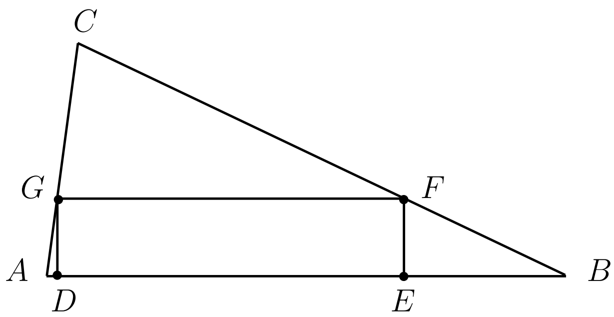
$$\cos 2x + \sin^2 y \;=\; 0$$

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

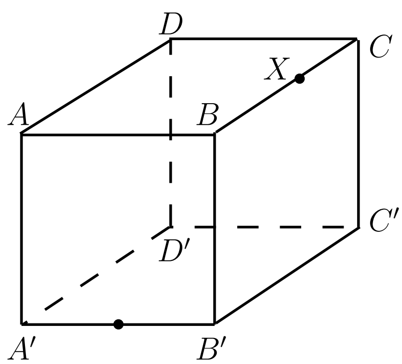
1. Soit ABC un triangle isocèle ($|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}|$). On note H le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[A, B]$ et N le pied de la bissectrice intérieure issue de B. On suppose que les droites AH, CM et BN sont sécantes en un point D. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2. On considère un triangle ABC, dont tous les angles sont aigus.
   Déterminer le lieu des centres de gravité des rectangles $DEFG$ satisfaisant (simultanément) les conditions suivantes :
   a) les sommets D et E appartiennent à la droite AB,
   b) le sommet F appartient à CB,
   c) le sommet G appartient à AC.



3. Soit ABC un triangle.
   a) Montrer qu'un point X satisfait
   $$(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})\cdot\overrightarrow{XC}=(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})\cdot\overrightarrow{XA}=(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA})\cdot\overrightarrow{XB}$$
   si et seulement si X est l'orthocentre de ABC.
   b) Montrer que si les trois membres sont égaux à zéro, alors ABC est rectangle.

4. On considère un cube $ABCDA'B'C'D'$ et un point X sur l'arête $[B,C]$, distinct de B. Dans le tétraèdre $BAB'X$, on note H le pied de la hauteur issue de B.
   a) Montrer que H est l'orthocentre de AXB'.
   b) On suppose que $X=C$ et on note M le milieu de $[A,B']$.
   Exprimer $|\overrightarrow{MH}|$ en fonction de $|\overrightarrow{BX}|$.



5. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer l'équation du plan médiateur de $[A, B]$.

   b) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de C sur la droite AB.

   c) Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

   d) Déterminer l'aire du triangle ABC.

SEPTEMBRE 2005

ALGEBRE

1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dfrac{a-1}{x} & + & \dfrac{a}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & a\,, \\ \dfrac{a-2}{x} & + & \dfrac{a-1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & 1-a\,, \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & - & \dfrac{a-1}{z} & = & 1\,. \end{array} \right.$$

   Suggestion : poser $\frac{1}{x} = X$, $\frac{1}{y} = Y$ et $\frac{1}{z} = Z$.

2. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 + (a+1)x - 1 \leq 0\ ?$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36 = 0\,,$$

   sachant qu'aucune racine n'est réelle et que l'une est double d'une autre.

ANALYSE

1. **a)** Soit la fonction
$$f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} + \beta x$$
dépendant des paramètres α et β réels avec $\alpha > 0$.

   i. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivation de f.

   ii. Déterminer les asymptotes éventuelles de f.

   iii. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles f admet au moins un extremum. Donner la nature de l'extremum (ou des extrema).

   b) Déterminer les conditions sur α et β pour que les graphes des fonctions $g(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$ et $h(x) = \beta x$ soient tangents au point d'abcisse $x = -1$.

2. **a)** Calculer
$$A = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$
et
$$B = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x \, dx$$
et montrer que $A = B$.

   b) Démontrer plus généralement que, si f est une fonction continue sur $[0, a]$,
$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$
Interpréter et justifier graphiquement cette propriété.

   c) Utiliser la propriété b) pour transformer l'expression
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$
et calculer I_n. Vérifier le résultat en évaluant I_2.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Sans l'aide de la calculatrice, calculer la valeur numérique de E :

$$E \;=\; \cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{2\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \sin^2\frac{4\pi}{10}$$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$\mathrm{tg}^3\, x - 3\ \mathrm{tg}^2\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 1 \;=\; 0$$

   Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

   Suggestion : calculer la valeur de $\mathrm{tg}\, 3x$.

3. Soit un système bielle - manivelle schématisé à la figure 2. On demande de :
   a) calculer l'angle α en fonction de l'angle θ, les paramètres r, l et e étant connus ;
   b) en déduire les conditions d'existence de l'angle α en fonction des valeurs des paramètres r, l et e ;
   c) calculer la valeur numérique de l'angle α pour $\theta = 30°$, $r = 1\,cm$, $l = 5\,cm$ et $e = 0,1\,cm$;
   d) en déduire et calculer la valeur correspondante de la position x du point C.

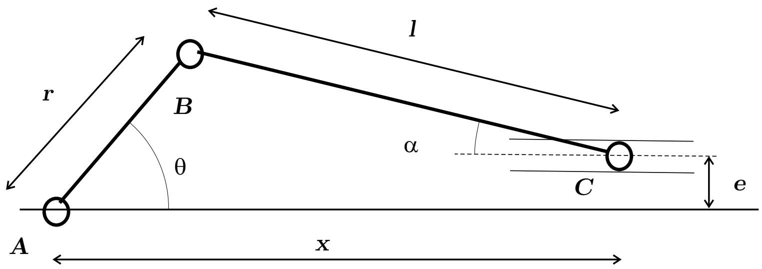


FIG. 2 Calcul de la position d'un piston

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

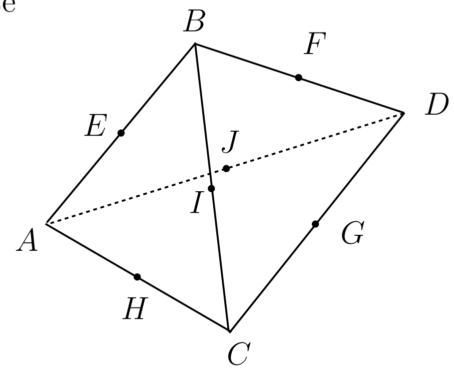
1. On considère un parallélogramme $ABCD$. Une droite d contenant A intersecte DB en E, CB en F et DC en G. On suppose que E est intérieur à $[D, B]$ et F intérieur à $[B, C]$.
   Montrer qu'on a $|\overrightarrow{AE}|^2 = |\overrightarrow{EF}|\,|\overrightarrow{EG}|$.

2. Dans le plan, on se donne deux points P_1 et P_2. Soit également a un nombre strictement positif.
   Déterminer le lieu des points P du plan dont le rapport des distances à P_1 et P_2 vaut a. Déterminer la nature du lieu.

3. On considère quatre points A, B, C, D de l'espace, non coplanaires. On suppose que les droites AB et CD sont orthogonales et qu'il en est de même pour AC et BD.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
   b) Démontrer les relations
   $$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2.$$

4. Soit un tétraèdre $ABCD$. On note

E	le milieu de	$[A, B]$,
F	le milieu de	$[B, D]$,
G	le milieu de	$[C, D]$,
H	le milieu de	$[A, C]$,
I	le milieu de	$[B, C]$,
J	le milieu de	$[A, D]$.

   Démontrer que les droites EG, FH et IJ sont concourantes.

5. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points A, B, C par leurs coordonnées respectives :
   $$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le lieu des points P tels que ABP soit un triangle équilatéral (donner sa nature).

b) Déterminer la distance de C à la droite AB.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

d) Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

e) Déterminer l'équation du plan ABC.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Chemin des Chevreuils, 1 (Bât. B52/3)
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36. Fax : 04/366.95.75.

http ://www.ulg.ac.be