UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2010

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un cercle passant par les extrémités B et C de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC. Ce cercle coupe la droite AB en B et en un autre point noté B'. De même, il coupe la droite AC en C et en un autre point noté C'. Les points B' et C' sont distincts de A.

   Démontrer que la médiane issue de A du triangle ABC est confondue avec la hauteur issue de A du triangle $AB'C'$.

2. On fixe un repère orthonormé du plan. Quel est le lieu des points du premier quadrant par lesquels passe une et une seule droite déterminant, avec les axes, un triangle contenu dans le premier quadrant et d'aire égale à 4?

3. Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. Démontrer l'égalité
$$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DP} = |AP|^2 - c^2,$$
   où c désigne la longueur d'un côté du carré, et où $|XY|$ représente la longueur du segment $[XY]$.

4. Un plan π coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ d'un cube en trois points notés respectivement B', C' et D'. Dans le triangle $AB'C'$, on note H le pied de la hauteur issue de A.

   (a) Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que la droite $B'C'$ est perpendiculaire au plan $AD'H$.

   (b) En déduire que le plan $AD'H$ est perpendiculaire au plan π.

   (c) En déduire que la projection orthogonale de A sur le plan π coïncide avec l'orthocentre du triangle $B'C'D'$.

5. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes
$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$
   où a et b sont des paramètres réels.

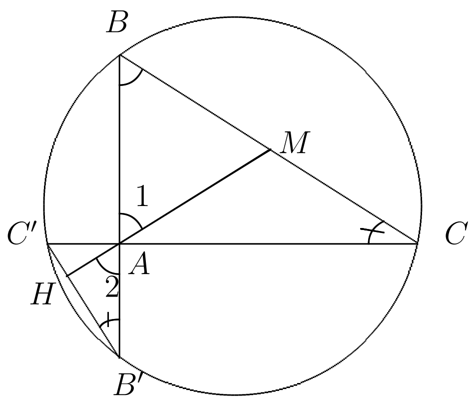
(a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

(b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.

(c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors l'équation du plan contenant ces droites.

Exemples de solutions

1. Envisageons tout d'abord le cas où A est un point intérieur au cercle.



Soit M le point d'intersection de la médiane issue de A du triangle ABC rectangle en A et H le point d'intersection de cette médiane avec la droite $B'C'$. Prouvons que AM est perpendiculaire à $B'C'$.

On sait que dans tout triangle rectangle la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de la longueur de celle-ci. Dès lors, comme M est milieu de $[B, C]$, on a

$$|AM| = \frac{|BC|}{2} = |BM|$$

et le triangle ABM est isocèle. Ses angles opposés aux côtés de même longueur $\widehat{B}$ et $\widehat{A_1}$ sont donc égaux. De plus, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ comme angles opposés par le sommet et ainsi $\widehat{B} = \widehat{A_2}$ par transitivité de l'égalité.

Les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B'}$ sont des angles inscrits dans un même cercle interceptant le même arc BC'; ils sont donc égaux.

Enfin, dans le triangle ABC rectangle en A, les angles aigus $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

Ainsi, on a

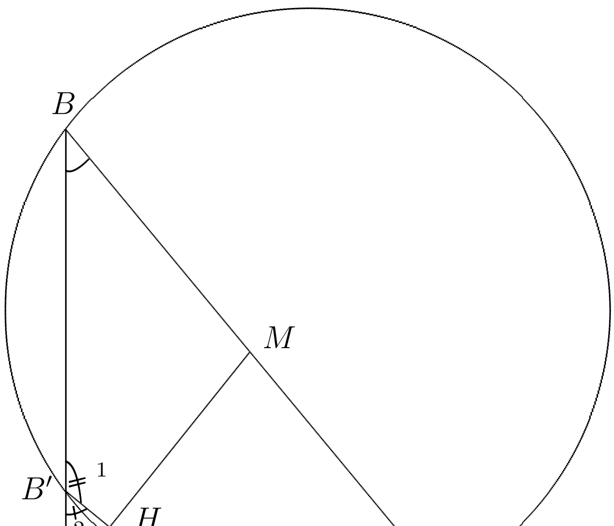
$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 90° \\ \widehat{B} = \widehat{A_2} \\ \widehat{C} = \widehat{B'} \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\widehat{A_2} + \widehat{B'} = 90°.$$

Dans le triangle AHB', la somme des angles vaut 180° avec $\widehat{A_2} + \widehat{B'} = 90°$. Dès lors, $\widehat{H} = 90°$ et la droite AM est perpendiculaire à la droite $B'C'$. Ainsi, la médiane issue de A du triangle ABC est confondue avec la hauteur issue de A du triangle $AB'C'$.

Envisageons à présent le cas où A est un point extérieur au cercle et prenons les mêmes notations que dans le cas précédent.



On a à nouveau que le triangle ABM est isocèle et que $\widehat{B} = \widehat{A_1}$.

Le quadrilatère convexe $BB'C'C$ étant inscrit dans un cercle, ses angles opposés sont supplémentaires et on a $\widehat{C} + \widehat{B'_1} = 180°$. De plus, comme les points B, B' et A sont alignés, on a $\widehat{B'_1} + \widehat{B'_2} = 180°$. Dès lors, $\widehat{C} = \widehat{B'_2}$.

Comme dans le cas précédent, dans le triangle ABC rectangle en A on a $\widehat{B}+\widehat{C}=90°$ et dans le triangle $AB'H$ on a $\widehat{A_1}+\widehat{B_2'}+\widehat{H}=180°$.

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \widehat{B}+\widehat{C}=90° \\ \widehat{B}=\widehat{A_1} \\ \widehat{C}=\widehat{B_2'} \\ \widehat{A_1}+\widehat{B_2'}+\widehat{H}=180° \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\widehat{H}=90°$$

et permet de conclure comme ci-dessus.

2. Les points qui se situent sur l'axe des abscisses et qui ont une abscisse strictement positive, de même que les points de l'axe des ordonnées qui ont une ordonnée strictement positive, sont des points du lieu.

   Recherchons maintenant les points du lieu qui se situent dans le premier quadrant mais pas sur les axes de coordonnées.

   Etant donné un point $P(x_0,y_0)$, la droite qui passe par ce point et qui a comme coefficient angulaire le réel non nul m a pour équation cartésienne

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

   Les intersections de cette droite avec les axes sont donc les points de coordonnées

$$\left(x_0-\frac{y_0}{m},0\right) \quad \text{et} \quad (0,y_0-mx_0)\,.$$

   Cela étant, le problème posé ici consiste à chercher le lieu des points P du premier quadrant, de coordonnées (x_0,y_0), pour lesquels il existe un unique réel m non nul tel que

$$\frac{\left(x_0-\frac{y_0}{m}\right)\,(y_0-mx_0)}{2}=4,$$

   cette dernière égalité exprimant l'aire du triangle dont il est question dans l'énoncé. Cette égalité peut se réécrire

$$x_0^2m^2+2\,(4-x_0y_0)\,m+y_0^2=0.$$

   Cette dernière équation (du second degré en m) admet une et une seule solution si et seulement si

$$0=\Delta=4\,(4-x_0y_0)^2-4x_0^2y_0^2$$

ou encore si et seulement si

$$x_0 y_0 = 2.$$

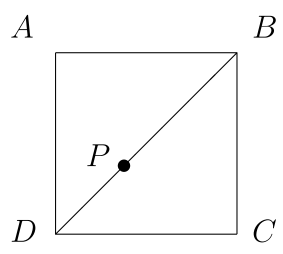
Il s'ensuit que le lieu cherché ici est l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes vérifient l'équation $xy = 2$ et sont situés dans le premier quadrant.

En conclusion, le lieu est constitué des points des axes qui se trouvent dans le premier quadrant et des points de la branche d'hyperbole d'équation $xy = 2$ qui se trouvent dans le premier quadrant.

Remarque: Cet exercice peut bien sûr être résolu de manière différente, par exemple en se servant de la forme de l'équation cartésienne d'une droite déterminée à partir de ses intersections avec les axes.

3. Vu la propriété d'orthogonalité entre côtés et entre diagonales du carré, on a successivement:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DP} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\right).\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\right).\overrightarrow{AP} \ + \ |AP|^2 \\ &= |AP|^2 \ - \ \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} \\ &= |AP|^2 \ - \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= |AP|^2 - |AB|^2 \\ &= |AP|^2 - c^2. \end{aligned}$$



4. (a) Les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ du cube sont perpendiculaires deux à deux, ce qui entraîne $AB' \perp AD'$ et $AC' \perp AD'$. Etant donné

que AB' et AC' sont deux sécantes du plan $AB'C'$, on en déduit que la droite AD' est perpendiculaire à ce plan $AB'C'$.

Par conséquent, la droite AD' est orthogonale à toutes les droites du plan $AB'C'$, et en particulier à $B'C'$. On a en outre $AH \perp B'C'$ par hypothèse. Les deux droites AD' et AH étant deux sécantes du plan $AD'H$, on en déduit que $B'C'$ est perpendiculaire au plan $AD'H$.

(b) Le plan π contient la droite $B'C'$ qui est perpendiculaire au plan $AD'H$ comme on l'a montré au point (a). Les plans π et $AD'H$ sont donc perpendiculaires.

(c) On a établi au point (b) que les plans π et $AD'H$ sont perpendiculaires. Dès lors, la projection orthogonale du plan $AD'H$ sur le plan π est la droite $D'H$, qui n'est autre que la hauteur issue de D' du triangle $B'C'D'$. On en déduit que la projection orthogonale de A sur π est située sur cette hauteur.

Par symétrie du problème, en permutant les points B, C et D dans l'énoncé et en suivant le même raisonnement, on peut établir que la projection orthogonale de A sur π appartient également aux hauteurs issues de B' et de C' du triangle $B'C'D'$. Cette projection coïncide donc avec l'orthocentre de ce triangle.

5. (a) Une droite a pour vecteur directeur le produit vectoriel de vecteurs normaux aux plans dont elle est l'intersection. Dans le cas de d_a, un vecteur directeur (noté $\vec{v}_a$) est ainsi fourni par le produit vectoriel des vecteurs de composantes $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 3)$; les composantes de $\vec{v}_a$ sont $(1, -3, 1)$. Dans le cas de d_b un vecteur directeur (noté $\vec{v}_b$) est fourni par le produit vectoriel des vecteurs de composantes $(1, 2, 1)$ et $(3, 3, 2)$; les composantes de $\vec{v}_b$ sont $(1, 1, -3)$.

Comme il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v_a} = \lambda\vec{v}_b$ (ce qui se voit directement en regardant les composantes), les droites ne sont pas parallèles.

(b) Les droites sont concourantes si et seulement si le système formé par leurs équations cartésiennes admet une solution, c'est-à-dire si et seulement si le système (en les inconnues x, y, z)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - z - a & = & 0 \\ y + 3z + 1 & = & 0 \\ x + 2y + z - 2b & = & 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

admet une solution.

Résolvons le système (carré) de trois équations à trois inconnues formé par les deux premières et la dernière des équations ci-dessus. En procédant par substitution, on a directement

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{l} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow \quad &\left\{\begin{array}{l} x=z+a \\ y=-1-3z \\ 3(z+a)+3(-1-3z)+2z-7=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow \quad &\left\{\begin{array}{l} z=\frac{3}{4}a-\frac{5}{2} \\ x=z+a=\frac{7}{4}a-\frac{5}{2} \\ y=-1-3z=\frac{13}{2}-\frac{9}{4}a \end{array}\right. \end{aligned}$$

Cela étant, le système (*) est donc équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{l} z=\frac{3}{4}a-\frac{5}{2} \\ x=z+a=\frac{7}{4}a-\frac{5}{2} \\ y=-1-3z=\frac{13}{2}-\frac{9}{4}a \\ x+2y+z-2b=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z=\frac{3}{4}a-\frac{5}{2} \\ x=z+a=\frac{7}{4}a-\frac{5}{2} \\ y=-1-3z=\frac{13}{2}-\frac{9}{4}a \\ 4-a=b \end{array}\right.$$

(pour résumer, on a omis les calculs de transformation de la dernière équation en utilisant les valeurs de x, y, z fournies par les trois premières égalités).

La condition nécessaire et suffisante de compatibilité du système de départ, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante sous laquelle les droites sont concourantes est donc

$$4-a=b.$$

(c) Le plan cherché a pour vecteurs directeurs $\vec{v}_a(1,-3,1)$ et $\vec{v}_b(1,1,-3)$; un vecteur normal à ce plan est donc fourni par le produit vectoriel de $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ et a pour composantes $(2,1,1)$ (à un multiple près). Il s'ensuit que le plan cherché a une équation cartésienne du type

$$2x+y+z=\delta$$

où δ est un réel que l'on détermine afin que le plan contienne un point de d_a (ou d_b). Le point de coordonnées $(a,-1,0)$ appartient à d_a; en utilisant celui-ci, on trouve finalement que le plan cherché a pour équation cartésienne

$$2x+y+z=2a-1.$$