UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2011

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un parallélogramme $ABCD$ et une droite d issue de A qui coupe la diagonale $[BD]$ en un point P, le côté $[BC]$ en un point Q et la droite CD en un point R.

   Démontrer que l'on a
   $$|AP| = \sqrt{|PQ|.|PR|},$$
   où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

2. On se place dans un repère orthonormé du plan. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le cercle C_λ de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe Y et le cercle Γ_λ de centre (λ, λ) tangent à l'axe X. Démontrer que le lieu des points d'intersection de C_λ et Γ_λ est une union de deux droites, et donner les équations cartésiennes de celles-ci.

3. Soient deux cercles concentriques $\mathcal{C}$ (intérieur) et $\mathcal{C}'$ (extérieur). Un point P fixe est situé sur $\mathcal{C}$. Une droite mobile d issue de P rencontre $\mathcal{C}'$ en deux points notés A et B. La droite perpendiculaire à d issue de P rencontre $\mathcal{C}$ en P et en un autre point noté C.

   Démontrer que la position du centre de gravité G du triangle ABC est indépendante du choix de d.

   Suggestion: Calculer le vecteur $\overrightarrow{OG}$, où O est le centre de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1, passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 2)$, et la droite d_2, passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0, 1, 7)$ et $(2, 0, 5)$.

   (a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

   (b) Déterminer la distance entre la droite d_1 et le plan Π .

   (c) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

(d) Déterminer un point P_1 de d_1 et point P_2 de d_2 tels que le vecteur joignant P_1 à P_2 soit orthogonal à d_1 et à d_2.

5. On considère une pyramide droite à base carrée $SABCD$ (en d'autres termes, la base $ABCD$ de cette pyramide est un carré, et le pied H de la hauteur issue de S est le centre de ce carré). Cette pyramide est telle que $|AB| = |SH|$, où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$. Cette pyramide est également inscrite dans une sphère (c'est-à-dire que les points A, B, C, D et S sont situés à la surface de cette sphère). Si V et V' désignent respectivement le volume de la pyramide et de la sphère, calculer la valeur du rapport $\frac{V'}{V}$ et en donner une expression indépendante du rayon de la sphère et du côté de la base de la pyramide.

Exemples de solutions

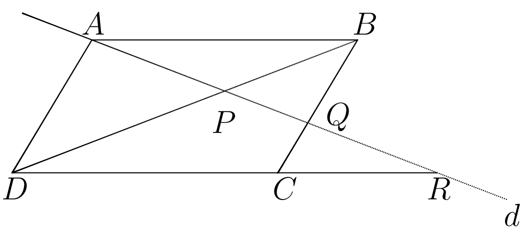
1. Comme d coupe $[BC]$ en Q, envisageons tout d'abord le cas particulier[1] où d passe aussi par C.La droite d est alors la deuxième diagonale du parallélogramme, P est le point d'intersection des diagonales et les points Q, R et C sont confondus.

   Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, on a $|AP| = |PC| = |PQ| = |PR|$ et dès lors

   $$\sqrt{|PQ|.|PR|} = \sqrt{|AP|^2} = |AP|$$

   puisqu'une longueur est toujours positive.

   Envisageons maintenant le cas où Q est un point de $]BC[$.



   Les côtés opposés d'un parallélogramme étant parallèles, comme les points A, P et R d'une part et les points B, P et D d'autre part sont

[1] d ne peut pas passer par B car d coupe CD et les droites AB et CD sont parallèles puisque $ABCD$ est un parallélogramme

alignés, les triangles ABP et RDP ont leurs côtés parallèles 2 à 2. Ces triangles sont donc semblables et, dès lors, leurs côtés homologues sont proportionnels. Ainsi, on a notamment

$$\frac{|AP|}{|RP|} = \frac{|BP|}{|DP|}. \qquad (1)$$

De façon analogue, les triangles ADP et QBP ayant leurs côtés parallèles 2 à 2 sont semblables et leurs côtés homologues sont proportionnels. On a donc notamment[2]

$$\frac{|PQ|}{|AP|} = \frac{|BP|}{|DP|}. \qquad (2)$$

Par transitivité de l'égalité, vu que le rapport $\frac{|BP|}{|DP|}$ est commun dans (1) et (2), on a

$$\frac{|AP|}{|PR|} = \frac{|PQ|}{|AP|} \Leftrightarrow |AP|^2 = |PQ|.|PR|$$

puisque le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, ce qui démontre la propriété puisque les longueurs sont toujours positives.

2. Le point de coordonnées (x, y) appartient au lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ \lambda(\lambda - 2y) = 0, \end{array} \right. \qquad (*)$$

la deuxième équation du dernier système s'obtenant en retranchant la première équation de la deuxième dans le premier système. Il reste donc à éliminer le paramètre λ.

Supposons avoir λ, x, y vérifiant le système. Si $\lambda = 0$, alors $x = y = 0$. Sinon, $\lambda = 2y$ et la première équation donne

$$\begin{aligned} (x-2y)^2 + y^2 = 4y^2 &\Leftrightarrow (x-2y)^2 = 3y^2 \\ &\Leftrightarrow x - 2y = \sqrt{3}y \text{ ou } x - 2y = -\sqrt{3}y \end{aligned}$$

[2] On a évidemment $|XY| = |YX|$.

Comme $(0,0)$ vérifie aussi ces équations, on conclut donc qu'un point du lieu est nécessairement sur l'une des droites d_1 ou d_2 d'équation cartésienne

$$d_1 \equiv x = (2+\sqrt{3})y \quad d_2 \equiv x = (2-\sqrt{3})y.$$

Réciproquement, si x, y sont les coordonnées cartésiennes d'un point de d_1 ou d_2, alors $(x-2y)^2 = 3y^2$ ou encore

$$(x-2y)^2 + y^2 = 4y^2.$$

En posant $\lambda = 2y$, on obtient que λ, x, y vérifient le système (*), donc que (x, y) sont bien les coordonnées cartésiennes d'un point du lieu.

3. Le centre de gravité G du triangle ABC est le barycentre des points A, B et C, ce qui donne

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Notons M le milieu du segment $[AB]$ et N le milieu du segment $[PC]$. On a

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} & = & (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \\ & = & 2\overrightarrow{OM} \end{array}$$

car $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ par définition de M. On obtient donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$. $[AB]$ étant une corde du cercle $\mathcal{C}'$, on a $OM \perp AB$ et donc $OM \perp PM$. De même, $[PC]$ étant une corde de $\mathcal{C}$, on a $ON \perp PC$ et donc $ON \perp PN$. On en déduit que le quadrilatère $PMOC$ est un rectangle, et donc

$$\overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{OM},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{OM}$$

et

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OM}.$$

L'expression de $\overrightarrow{OG}$ devient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Cette expression reste constante lorsque d varie. Le centre O des cercles étant fixe, on en déduit que la position de G reste également constante.

4. (a) L'énoncé permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, respectivement de composantes $(2, 2, 1)$ et $(2, -1, -2)$, sont deux vecteurs directeurs du plan Π. Comme ceux-ci ne sont pas parallèles et que le plan contient la droite d_2 (donc en particulier le point $C(0, 1, 7)$), l'équation cartésienne du plan Π peut être directement obtenue en exprimant l'annulation du déterminant suivant (qui exprime que $P(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont linéairement dépendants)

$$det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= x(-4+1) \ - \ (y-1)(-4-2) \\ &\quad + (z-7)(-2-4) \\ &= -3x + 6y - 6z - 6 + 42 \\ &= -3\ (x - 2y + 2z - 12). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation demandée est

$$x - 2y + 2z = 12.$$

(b) La droite d_1 étant parallèle au plan Π, la distance entre cette droite et le plan est égale à la distance entre un point quelconque de la droite et le plan. Choisissons par exemple $B(-1, 0, 2)$ comme point de d_1 pour le calcul. En utilisant le résultat permettant de déterminer directement la distance d'un point à un plan dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on obtient ainsi

$$dist(d_1, \Pi) = dist(B, \Pi) = \frac{|-1-0+2.2-12|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

(c) La droite d_3 doit être orthogonale à d_1 et à d_2; par définition du plan Π, un vecteur directeur de d_3 est donc fourni par un vecteur normal au plan, à savoir par exemple $\vec{n}(1,-2,2)$. Cela étant, comme d_3 passe par $C(0,1,7)$, des équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 0 + r1 = r \\ y = 1 + r.(-2) = 1 - 2r, \qquad r \in \mathbb{R} \\ z = 7 + r.2 = 7 + 2r \end{cases}$$

et des équations cartésiennes sont

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-7}{2}.$$

(d) L'énoncé indique que les points P_1 et P_2 sont en fait les intersections, respectivement de d_1, d_2, avec la perpendiculaire commune aux deux droites (d_1 et d_2). Déterminons ces points.

Le point P_1 appartient à la droite d_1; il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_1 soient

$$P_1(1+2t, 2+2t, 3+t).$$

De même, comme le point P_2 appartient à la droite d_2, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_2 soient

$$P_2(2s, 1-s, 7-2s).$$

Cela étant, pour trouver s et t, il reste à exprimer que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est parallèle à $\vec{n}(1,-2,2)$ (vecteur directeur de d_3).

Avec les notations et les calculs précédents, les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont

$$\begin{aligned} &\Big(2s - 1 - 2t, 1 - s - 2 - 2t, 7 - 2s - 3 - t\Big) \\ = \ &\Big(-1 + 2s - 2t, -1 - s - 2t, 4 - 2s - t\Big). \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\vec{n}$ sont donc parallèles si et seulement si s et t vérifient le système

$$\frac{-1+2s-2t}{1} = \frac{-1-s-2t}{-2} = \frac{4-2s-t}{2}$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} -2+4s-4t = 1+s+2t \\ -2+4s-4t = 4-2s-t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s-2t=1 \\ 2s-t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ s=1 \end{array}\right.$$

Ils s 'ensuit que les points cherchés sont

$$P_1(1,2,3), \quad P_2(2,0,5).$$

Remarque. On aurait pu alternativement répondre au point (d) de la manière suivante:
D'une part on a $A(1,2,3) \in d_1$, $D(2,0,5) \in d_2$ (par construction); d'autre part $\overrightarrow{AD}$ a pour composantes $(1,-2,2)$ donc est orthogonal à d_1 et à d_2. Il s'ensuit directement que $P_1 = A$ et $P_2 = D$ sont les points cherchés.

5. Notons c la longueur d'un côté du carré et r le rayon de la sphère.

   Plaçons nous dans le plan SAC. Par symétrie du problème, le triangle SAC est isocèle en S, et inscrit dans un cercle de rayon r dont le centre O coïncide avec celui de la sphère.

   Dans ce triangle, la hauteur SH issue de S est aussi celle de la pyramide $SABCD$ et l'on a donc $|SH| = c$. La base $[AC]$ de ce triangle est quant à elle une diagonale de la base carrée $ABCD$ de la pyramide, ce qui donne $|AC| = c\sqrt{2}$ et $|AH| = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Le triangle SAC étant isocèle, le point O est situé sur la hauteur SH, et l'on a $|OS| = r$.

   Soit M le milieu du segment $[AS]$. Ce segment étant une corde d'un cercle de centre O, il vient $OM \perp AS$. Le triangle ASH est rectangle en H et tel que $|SH| = c$ et $|AH| = \frac{c}{\sqrt{2}}$. En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient donc $|AS| = c\sqrt{\frac{3}{2}}$, et dès lors $|MS| = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Les triangles SMO et SHA sont semblables. En effet, il sont tous deux rectangles et partagent en outre l'angle $\widehat{ASH}$, ce qui entraîne qu'ils possèdent les mêmes angles. On en déduit l'égalité

$$\frac{|SO|}{|SM|} = \frac{|SA|}{|SH|},$$

   qui devient lorsque l'on remplace les longueurs des segments par les valeurs calculées

$$\frac{r}{\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{c\sqrt{\frac{3}{2}}}{c},$$

ce qui se simplifie en

$$r = \frac{3c}{4}.$$

On obtient donc pour le volume V de la pyramide et le volume V' de la sphère

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}c^3 \\ V' &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3c}{4}\right)^3 \\ &= \frac{9\pi}{26}c^3, \end{aligned}$$

d'où l'on extrait finalement

$$\frac{V'}{V} = \frac{27\pi}{16}.$$