UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2012

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O. On note P, Q, R et S les points symétriques à O par rapport aux côtés respectifs de ce quadrilatère. Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère les trois points $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$. Pour tout point P de la droite BC, on note Q la projection orthogonale de P sur la droite AB et R la projection orthogonale de P sur la droite AC.

   (a) En fonction de l'abscisse de P, évaluer le rapport de l'aire du triangle PQR à celle du triangle ABC.

   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de cette abscisse ce rapport est-il égal à 1/4?

3. On considère un triangle ABC isocèle en A (c'est-dire que l'on a $|AB| = |AC|$, où $|XY|$ désigne la longueur d'un segment $[XY]$). Soit P un point situé sur le côté $[AB]$ de ce triangle. Démontrer que l'on a

$$|PC|^2 - |PB|^2 = \frac{|AP|}{|AB|}|BC|^2.$$

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées

$$(0,2,4), \quad (2,0,-2), \quad (1,-1,3).$$

   (a) Déterminer l'équation du plan médiateur π du segment $[AB]$.

   (b) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale P du point C sur la droite AB.

   (c) Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

   (d) Déterminer l'aire du triangle ABC.

5. On considère un tétraèdre $ABCD$ et un plan parallèle à sa base ABC, qui coupe les arêtes $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$ en des points notés respectivement A', B' et C'. Dans le triangle ABC, les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ sont respectivement notés P, Q et R.

   Démontrer que les droites $A'P$, $B'Q$ et $C'R$ sont concourantes.

Exemples de solutions

1. Notons respectivement P, Q, R et S les points symétriques au point O par rapport aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère. On a par hypothèse $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$, où r est le rayon du cercle. Par symétrie, on obtient également $|PA| = |PB| = |QB| = |QC| = |RC| = |RD| = |SD| = |SA| = r$, d'où l'on déduit que les quadrilatères $OAPB$, $OBQC$, $OCRD$ et $ODSA$ sont des losanges dont la longueur des côtés est égale à r.

   De cette dernière propriété, on tire

   $$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{SD}$$

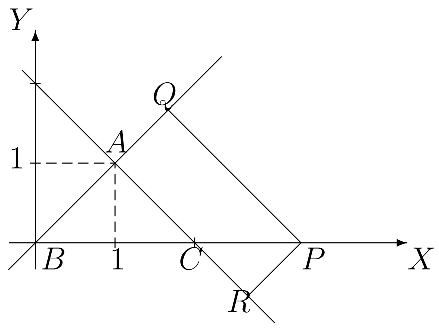
   ainsi que

   $$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DR}.$$

   On obtient alors

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}\\ &= \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}\\ &= \overrightarrow{SR},\end{aligned}$$

   qui établit bien que $PQRS$ est un parallélogramme.

2. 

(a) Soit P le point de la droite BC de coordonnées cartésiennes $(\lambda, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. (Remarquons que les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$ sont dégénérés car alors le triangle PQR n'existe pas.) Les droites AB et AC ont respectivement pour équation cartésienne $y = x$ et $y = -x + 2$. Comme le produit des coefficients angulaires de ces droites vaut $-1 = 1\ .\ (-1)$, ces droites sont perpendiculaires et le triangle ABC est rectangle en A.

De plus, comme Q est la projection orthogonale de P sur la droite AB, la droite PQ est perpendiculaire à AB. De même, comme R est la projection orthogonale de P sur la droite AC, la droite PR est perpendiculaire à AC. Dès lors, le quadrilatère convexe $AQPR$ qui a 3 angles droits et dont la somme des angles vaut 360° est un rectangle et le triangle PQR est rectangle en P.

L'aire du triangle ABC est donnée par

$$\frac{|AB|\,|AC|}{2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}\ .\ \sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}}{2} = 1$$

et celle du triangle PQR est donnée par $\dfrac{|PQ|\,|PR|}{2}$ où $|PQ|$ est la distance de P à la droite AB et $|PR|$ est la distance de P à la droite AC.[1]

Dès lors, l'aire du triangle PQR vaut

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{|\lambda - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \cdot \frac{|\lambda + 0 - 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|\lambda|\ |\lambda - 2|}{4};$$

c'est aussi la valeur du rapport demandée puisque l'aire du triangle ABC vaut 1.

(b) L'égalité $\dfrac{|\lambda|\ |\lambda-2|}{4} = \dfrac{1}{4}$ est équivalente à

$$\begin{aligned}
|\lambda^2 - 2\lambda| = 1 &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda = -1)\\
&\Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0)\\
&\Leftrightarrow ((\lambda-1)^2 - 2 = 0 \ \text{ ou }\ (\lambda - 1)^2 = 0)\\
&\Leftrightarrow (\lambda = 1 - \sqrt{2} \ \text{ ou }\ \lambda = 1 + \sqrt{2} \ \text{ ou }\ \lambda = 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, le rapport vaut 1/4 si l'abscisse du point P vaut $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ ou 1.

[1] Dans un repère orthonormé d'un plan, la distance d'un point de coordonnées (x_P, y_P) à une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est donnée par $\dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. On a

$$\begin{aligned}|PC|^2 &= \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PC}\\ &= (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC})\\ &= |PB|^2 + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{BC} + |BC|^2,\end{aligned}$$

qui donne

$$|PC|^2 - |PB|^2 = 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{BC} + |BC|^2. \tag{1}$$

Par ailleurs, on a

$$\overrightarrow{AP} = \frac{|AP|}{|AB|}\overrightarrow{AB}$$

et, étant donné que le triangle ABC est isocèle en A,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}|BC|^2,\end{aligned}$$

où M désigne le milieu du côté $[BC]$. En développant (1), on obtient alors

$$\begin{aligned}|PC|^2 - |PB|^2 &= 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{BC} + |BC|^2\\ &= 2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}).\overrightarrow{BC} + |BC|^2\\ &= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC} + |BC|^2\\ &= -|BC|^2 - 2\frac{|AP|}{|AB|}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + |BC|^2\\ &= \frac{|AP|}{|AB|}|BC|^2.\end{aligned}$$

4. (a) Le plan π est le plan passant par le milieu $M(1,1,1)$ du segment $[AB]$ et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}\,(2,-2,-6)$. En particulier, un vecteur normal a donc pour composantes $(1,-1,-3)$ et le plan a donc une équation du type

$$x - y - 3z + d = 0$$

où d est un réel qui va être déterminé en exprimant que le point $M(1,1,1)$ appartient au plan π:

$$1 - 1 - 3 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 3.$$

Il s'ensuit que π a pour équation cartésienne

$$x - y - 3z + 3 = 0.$$

(b) Le point P est l'intersection de la droite AB et du plan π_0, orthogonal à cette droite et passant par C. Le plan π_0 est parallèle au plan π et passe par $C(1, -1, 3)$; il a donc pour équation cartésienne

$$x - y - 3z + d_0 = 0, \quad \text{avec } 1 + 1 - 9 + d = 0 \quad \text{ou encore } d_0 = 7.$$

Quant à la droite AB, elle passe par $A(0, 2, 4)$ et a pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(1, -1, -3)$; des équations cartésiennes sont donc

$$x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-3}.$$

Il s'ensuit que les coordonnées (x, y, z) de P sont les solutions du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - 3z + 7 = 0 \\ y = 2 - x \\ z = 4 - 3x \end{array}\right.$$

La résolution conduit aux équivalences

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - (2 - x) - 3(4 - 3x) + 7 = 0 \\ y = 2 - x \\ z = 4 - 3x \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7}{11} \\ y = 2 - x = \frac{15}{11} \\ z = 4 - 3x = \frac{23}{11} \end{array}\right.$$

donc

$$P\left(\frac{7}{11}, \frac{15}{11}, \frac{23}{11}\right).$$

(c) Le cosinus demandé vérifie la relation (définition du produit scalaire)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos(\widehat{BAC})$$

où $\|.\|$ est la notation utilisée pour la norme d'un vecteur. Analytiquement, étant donné les coordonnées des points A, B, C, on a $\overrightarrow{AB}(2, -2, -6)$, $\overrightarrow{AC}(1, -3, -1)$, donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 + 6 + 6 = 14, \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{44}, \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{11}.$$

Il s'ensuit finalement que

$$14 = 22\cos(\widehat{BAC}) \;\Leftrightarrow\; \cos(\widehat{BAC}) = \frac{7}{11}.$$

(d) Etant donné tous les éléments précédents, l'aire peut se calculer aisément et directement des manières suivantes:

- soit en utilisant le fait qu'elle est égale à la moitié de la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$,
- soit en utilisant la forme standard *base* $\times$ *hauteur/2*, où la longueur de la base b est donnée par la norme de $\overrightarrow{AB}$ et la hauteur h correspondante (hauteur issue du sommet C) est la norme du vecteur $\overrightarrow{CP}$, déterminée en utilisant les coordonnées de P,
- soit en utilisant la forme standard *base* $\times$ *hauteur/2*, où la longueur de la base est donnée par la norme de $\overrightarrow{AB}$ et la hauteur correspondante (hauteur issue du sommet C) est la norme du vecteur $\overrightarrow{CP}$, égale (relation dans un triangle rectangle) au produit de la longueur du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et du sinus de l'angle $\widehat{BAC}$ dont on connaît la valeur exacte du cosinus.

Dans tous les cas, on trouve que cette aire est égale à $6\sqrt{2}$.

5. Dans le cas particulier où l'on a $A' = A$, $B' = B$ et $C' = C$, les droites $A'P$, $B'Q$ et $C'R$ correspondent aux médianes du triangle ABC, et sont donc concourantes en son centre de gravité. Le cas $A' = B' = C' = D$ est également immédiat, puisque les trois droites sont alors confondues.

   Supposons à présent que le plan $A'B'C'$ est distinct du plan ABC et ne contient pas D.Les droites AB et $A'B'$ sont les intersections respectives des plans parallèles ABC et $A'B'C'$ par le plan DAB. Ces droites sont donc parallèles. Par ailleurs, par la réciproque du théorème de Thalès appliquée dans le triangle ABC, on obtient que la droite PQ est parallèle à la droite AB.

   Par conséquent, les droites $A'B'$ et PQ sont parallèles, ce qui implique que les points A', B', P et Q sont coplanaires. Les droites $A'P$ et $B'Q$ n'étant pas parallèles sont donc sécantes, en un point que l'on note X.

   Par le même raisonnement, on établit que les droites $A'P$ et $C'R$ sont sécantes en un point Y, et que les droites $B'Q$ et $C'R$ sont sécantes en un point Z.

   Il reste à démontrer que les points X, Y et Z sont confondus. Les points Y et Z correspondent tous deux au point de percée de la droite $C'R$ dans le plan $A'B'PQ$, puisque l'on a $C'R \cap A'P = Y$ et $C'R \cap B'Q = Z$. Etant donné que ce point de percée est unique, Y et Z sont confondus.

Ce point de percée appartient à la fois à $A'P$ et à $B'Q$, et est donc également confondu avec l'intersection X de ces deux droites.