UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2014

Enoncés

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Par un point P extérieur à $\mathcal{C}$, on mène deux tangentes à ce cercle, qui le rencontrent aux points de tangence Q et R.

   (a) Démontrer que, dans le triangle PQR, la bissectrice issue de Q rencontre la droite OP en un point qui appartient à $\mathcal{C}$.

   (b) On considère un cercle $\mathcal{C}'$ de centre extérieur à $\mathcal{C}$, et ne possédant aucun point commun avec $\mathcal{C}$.
   Si le point P parcourt le cercle $\mathcal{C}'$, le cercle $\mathcal{C}$ restant fixe, déterminer le lieu du centre du cercle inscrit au triangle PQR.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

   où a et b sont des paramètres réels.

   (a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

   (b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.

   (c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation du plan contenant ces droites.

Exemples de solutions

1. (a) Notons X le point d'intersection de la droite OP et du cercle $\mathcal{C}$. Pour démontrer la propriété, il suffit d'établir que ce point X appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$.
   La droite OP étant un axe de symétrie du problème, les arcs $\overline{QX}$ et $\overline{XR}$ du cercle $\mathcal{C}$ sont égaux. Les angles $\widehat{PQX}$ et $\widehat{XQR}$ sont donc deux angles inscrits au cercle $\mathcal{C}$ interceptant des arcs égaux, et sont par conséquent égaux. On on déduit que X appartient bien à la bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$.

(b) Le centre du cercle inscrit au triangle PQR est situé à l'intersection des bissectrices de ce triangle. En utilisant la propriété démontrée en (a), on obtient que ce point correspond à l'intersection de la droite OP et du cercle $\mathcal{C}$. Lorsque le point P parcourt $\mathcal{C}'$, cette intersection parcourt:

- un arc de cercle si O est extérieur à $\mathcal{C}'$, cet arc étant délimité par les intersections de $\mathcal{C}$ avec les tangentes à $\mathcal{C}'$ issues de O. En effet, pour tout point $X \in \mathcal{C}$, la droite OX rencontre $\mathcal{C}'$ (et définit donc une position potentielle de P) si et seulement si X appartient à cet arc.
- la totalité du cercle $\mathcal{C}$ dans le cas particulier où O est intérieur à $\mathcal{C}'$. En effet, pour tout point $X \in \mathcal{C}$, la droite OX rencontre alors $\mathcal{C}'$ en une position possible de P.

2. (a) Une droite a pour vecteur directeur le produit vectoriel de vecteurs normaux aux plans dont elle est l'intersection. Dans le cas de d_a, un vecteur directeur (noté $\vec{v}_a$) est ainsi fourni par le produit vectoriel des vecteurs de composantes $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 3)$; les composantes de $\vec{v}_a$ sont $(1, -3, 1)$. Dans le cas de d_b un vecteur directeur (noté $\vec{v}_b$) est fourni par le produit vectoriel des vecteurs de composantes $(1, 2, 1)$ et $(3, 3, 2)$; les composantes de $\vec{v}_b$ sont $(1, 1, -3)$.

Comme il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v_a} = \lambda \vec{v}_b$ (ce qui se voit directement en regardant les composantes), les droites ne sont pas parallèles.

(b) Les droites sont concourantes si et seulement si le système formé par leurs équations cartésiennes admet une solution, c'est-à-dire si et seulement si le système (en les inconnues x, y, z)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - z - a & = & 0 \\ y + 3z + 1 & = & 0 \\ x + 2y + z - 2b & = & 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 & = & 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

admet une solution.

Résolvons le système (carré) de trois équations à trois inconnues formé par les deux premières et la dernière des équations ci-dessus.

En procédant par substitution, on a directement

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z + a \\ y = -1 - 3z \\ 3(z+a) + 3(-1-3z) + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = \frac{3}{4}a - \frac{5}{2} \\ x = z + a = \frac{7}{4}a - \frac{5}{2} \\ y = -1 - 3z = \frac{13}{2} - \frac{9}{4}a \end{cases}$$

Cela étant, le système (*) est donc équivalent au système

$$\begin{cases} z = \frac{3}{4}a - \frac{5}{2} \\ x = z + a = \frac{7}{4}a - \frac{5}{2} \\ y = -1 - 3z = \frac{13}{2} - \frac{9}{4}a \\ x + 2y + z - 2b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = \frac{3}{4}a - \frac{5}{2} \\ x = z + a = \frac{7}{4}a - \frac{5}{2} \\ y = -1 - 3z = \frac{13}{2} - \frac{9}{4}a \\ 4 - a = b \end{cases}$$

(pour résumer, on a omis les calculs de transformation de la dernière équation en utilisant les valeurs de x, y, z fournies par les trois premières égalités).

La condition nécessaire et suffisante de compatibilité du système de départ, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante sous laquelle les droites sont concourantes est donc

$$4 - a = b.$$

(c) Le plan cherché a pour vecteurs directeurs $\vec{v}_a(1, -3, 1)$ et $\vec{v}_b(1, 1, -3)$; un vecteur normal à ce plan est donc fourni par le produit vectoriel de $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ et a pour composantes $(2, 1, 1)$ (à un multiple près). Il s'ensuit que le plan cherché a une équation cartésienne du type

$$2x + y + z = \delta$$

où δ est un réel que l'on détermine afin que le plan contienne un point de d_a (ou d_b). Le point de coordonnées $(a, -1, 0)$ appartient à d_a; en utilisant celui-ci, on trouve finalement que le plan cherché a pour équation cartésienne

$$2x + y + z = 2a - 1.$$