**UNIVERSITE DE LIEGE**

**EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL**

**Géométrie et géométrie analytique**

**Enoncés et solutions de l'examen de première session 2016**

---

# Enoncés

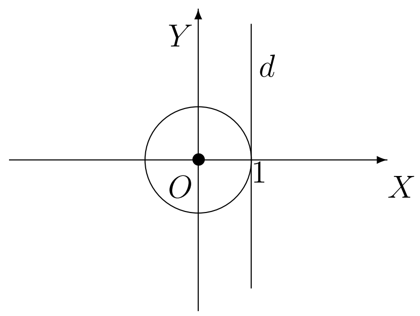
1. Par un point $P$ intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $r$, on mène deux droites perpendiculaires $d_1$ et $d_2$. On note $A_1$ un des points d'intersection de $d_1$ avec $\mathcal{C}$, et $A_2$ un des points d'intersection de $d_2$ avec $\mathcal{C}$. Le milieu de la corde $[A_1A_2]$ est noté $M$. Démontrer l'égalité
$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$
où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite $d$ tangente à un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à $d$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

# Exemples de solutions

1. La droite $OM$ relie le centre du cercle $\mathcal{C}$ au milieu d'une de ses cordes $[A_1A_2]$; on a donc $OM \perp A_1A_2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $OMA_1$, on obtient
$$|OM|^2 + |MA_1|^2 = |OA_1|^2 = r^2. \qquad (1)$$
Par ailleurs, le triangle $A_1PA_2$ est rectangle en $P$ par hypothèse. Ce triangle est donc inscrit dans un cercle de diamètre $[A_1A_2]$, dont le centre coïncide avec $M$. Par conséquent, on a
$$|MA_1| = |PM|.$$
En combinant cette égalité avec (1), on obtient bien
$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2.$$

2. On choisit un repère orthonormé de telle sorte que l'origine $O$ soit le centre du cercle, l'unité égale au rayon du cercle et l'axe des ordonnées parallèle à la droite donnée $d$. L'orientation est précisée par le schéma suivant.




Dans ces conditions, la droite $d$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont respectivement pour équation cartésienne

$$x = 1, \qquad\qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Soit alors un point $P$ de coordonnées cartésiennes $(x, y)$. La distance $dist(P, d)$ de $P$ à $d$ est égale à

$$|x - 1|$$

et la distance $dist(P, \mathcal{C})$ de $P$ au cercle est égale à

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right|$$

car les tangentes au cercle aux points d'intersection du cercle et de la droite $d_0$ joignant $P$ à $O$ (lorsque $P \neq O$) sont orthogonales à $d_0$. Cela étant, la recherche du lieu consiste donc à décrire l'ensemble des points $P$ dont les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ vérifient l'égalité

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right| = |x - 1|.$$

Lorsque l'abscisse de $P$ est supérieure ou égale à 1, on a

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right| = |x - 1| \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x \\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ et } x \geq 0. \end{aligned}$$

La partie correspondante du lieu est donc formée des points de l'axe $X$ dont l'abscisse est supérieure ou égale à 1.

Lorsque l'abscisse de $P$ est strictement inférieure à 1, alors on a (en fonction du fait que $P$ est intérieur ou extérieur au cercle)

$$dist(P, \mathcal{C}) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- Dans le premier cas, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| = |x-1| \;&\Leftrightarrow\; 1-\sqrt{x^2+y^2}-1 = 1-x\\ &\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2+y^2} = x\\ &\Leftrightarrow\; y=0 \text{ et } x\geq 0.\end{aligned}$$

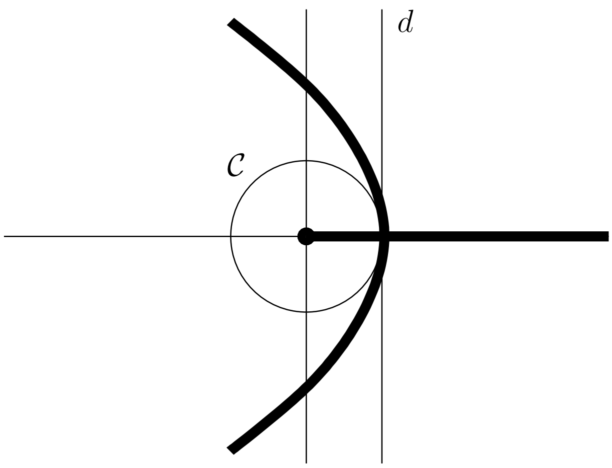
  La partie correspondante du lieu est donc formée des points de l'axe $X$ dont l'abscisse est positive (ou nulle) et strictement inférieure à 1.

- Dans le second cas, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| = |x-1| \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2+y^2}-1 = 1-x\\ &\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2+y^2} = 2-x\\ &\Leftrightarrow\; x^2+y^2=(2-x)^2 \text{ et } x\leq 2\\ &\Leftrightarrow\; y^2=4(1-x).\end{aligned}$$

  La partie correspondante du lieu est donc la parabole d'axe $X$, de sommet $(1,0)$ et passant par les points $(0,2)$ et $(0,-2)$.

En conclusion, le lieu correspond donc à l'union de la parabole d'équation $y^2=4(1-x)$ et de la demi-droite contenant les points de l'axe $X$ d'abscisse positive ou nulle.




**Remarque:** On aurait pu résoudre ce problème en revenant directement à la description géométrique d'une parabole: considérer le centre du cercle et la directrice $d_1$, parallèle à la droite $d$ donnée et située à l'extérieur du cercle et à une distance 1 de $d$. Mis à part la demi-droite correspondant à la partie de l'axe $X$ de la résolution précédente, le lieu est donc l'ensemble des points à égale distance de 0 et $d_1$.