UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2017

Enoncés

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points distincts P et P' équidistants de O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ reste constant.

2. On donne un trapèze $ABCD$, avec $AB \parallel CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze sont de même longueur et se coupent à angle droit. Leur intersection est notée I.

   (a) Démontrer que les segments $[AI]$ et $[BI]$ sont de même longueur.

   (b) Calculer $|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2$ en fonction de $|AD|$.

   (c) Si l'on note M le milieu de $[AD]$, démontrer que IM est perpendiculaire à BC.

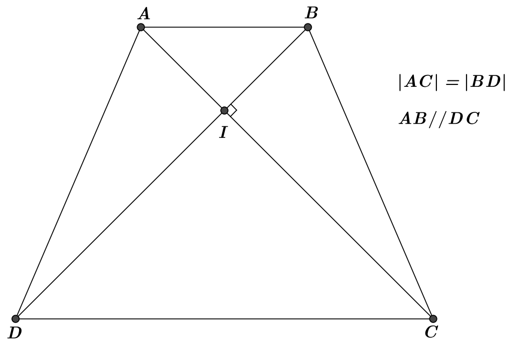
Exemples de solutions

1. Désignons par R le rayon du cercle et par r la distance entre P et O. (égale par hypothèse à celle entre P' et O.) On a successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M} &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM}\right) \\
&= \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{P'O} \ + \ \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} \ + \ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{P'O} \ + \ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} \\
&= -r^2 \ + \ \overrightarrow{OM} \cdot \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{P'O}\right) \ + \ R^2 \\
&= R^2 - r^2
\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{P'O}$.

2.



- *Méthode "synthétique":*

  (a) Les droites AB et CD étant parallèles, par le théorème de Thalès, on obtient
  $$\frac{|AI|}{|AC|} = \frac{|BI|}{|BD|}.$$
  Etant donné que l'on a $|AC| = |BD|$ par hypothèse, on en déduit immédiatement $|AI| = |BI|$.
  Notons que, les diagonales du trapèze étant égales, cette égalité implique $|DI| = |CI|$. Les triangles AIB et DIC sont donc tous deux isocèles. Cette propriété sera exploitée dans la suite de la résolution.

  (b) En utilisant la formule de Pythagore, on a
  $$|AB|^2 = |AI|^2 + |IB|^2, \quad |DC|^2 = |DI|^2 + |IC|^2.$$
  Par ailleurs, les triangles AID et BIC étant isométriques (parce qu'ils possèdent un angle égal compris entre deux côtés égaux), on obtient
  $$|BC| = |AD|.$$
  Il s'ensuit que
  $$\begin{aligned} &|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2 \\ &\qquad = \; 2|AD|^2 + \left(|AI|^2 + |DI|^2\right) + \left(|IB|^2 + |IC|^2\right) \\ &\qquad = \; 4|AD|^2. \end{aligned}$$

(c) Les triangles DAB et CAB ayant leurs côtés égaux sont isométriques et donc la mesure de leurs angles est la même. Notons γ la mesure de l'angle formé par les segments DA et DB; c'est aussi la mesure de l'angle formé par les segments CA et CB.

Cela étant, dans le triangle AID rectangle en I, on a $|AM| = |MI|$. Il s'ensuit que le triangle AMI est isocèle. Notons δ la mesure commune de deux angles de celui-ci. En utilisant encore le fait que le triangle AID est rectangle, on obtient $\delta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Si on désigne par H l'intersection des droites BC et IM, on obtient alors le triangle IHC dont les mesures de deux angles sont δ et γ. Il s'ensuit qu'il est rectangle en H et IM est bien perpendiculaire à BC.

- *Méthode analytique pour les points (b) et (c):*

Choisissons les axes du repère de telle sorte que l'origine soit le point I, l'axe X la droite IC et l'axe Y la droite IB. Cela étant, les triangles AIB et DIC étant isocèles (cf. point (a) de la méthode"synthétique"), les coordonnées des points A, B, C, D sont données par

$$A(-r, 0),\ B(0, r),\ C(r', 0),\ D(0, -r')$$

où r, r' sont des réels strictement positifs. On a donc

$$|AD|^2 = r^2 + r'^2$$

et

$$\begin{aligned} &|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2 \\ &\quad = (r^2 + r'^2) + 2r'^2 + + (r^2 + r'^2) + 2r^2 \\ &\quad = 4|AD|^2. \end{aligned}$$

Pour établir le dernier point (c), on remarque que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour composantes $\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r'}{2}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes $(r', -r)$. Il s'ensuit que leur produit scalaire vaut

$$\frac{1}{2}\left(-r.r' + r'.r\right) = 0,$$

ce qui démontre que IM est perpendiculaire à BC.