UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de première session 2018

Enoncés

1. On donne quatre points de l'espace A, B, C et D.

   (a) Montrer que le vecteur

   $$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

   est indépendant du point M.

   (b) Notons $\vec{v}$ le vecteur dont il est question au point précédent. Montrer que si $\vec{v} = \vec{0}$, alors la valeur de

   $$2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2,$$

   où $\|\overrightarrow{XY}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{XY}$, est indépendante du point M.

2. Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses extrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.

   On demande

   (a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu).

   (b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

Exemples de solutions

1. (a) En utilisant la relation de Chasles et les règles du calcul vectoriel, on obtient

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &\quad - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= 0\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

qui est bien indépendant de M.

(b) Par les mêmes mécanismes qu'au point précédent, on obtient

$$\begin{aligned} & 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2 \\ &\quad = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MD} \\ &\quad = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \\ &\qquad + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &\quad = 0\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.(-2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD}) \\ &\qquad - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} \\ &\quad = 2\overrightarrow{MA}.\vec{v} - \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{AD}\|^2 \\ &\quad = -\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{AD}\|^2, \end{aligned}$$

qui est bien indépendant de M.

2. (a) On se place dans un repère orthonormé dont les axes correspondent aux côtés de l'angle droit donné. Dans ce repère, les points A et B possèdent les coordonnées $A : (\alpha, 0)$ et $B : (0, \beta)$, avec $\alpha, \beta \geq 0$. La longueur $|AB|$ étant constante, on peut choisir sans perte de généralité l'unité du repère égale à cette longueur, ce qui impose la contrainte $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Cette contrainte permet d'exprimer β en fonction de α, et dès lors d'exprimer les coordonnées de A et de B en termes du seul paramètre α. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &A : (\alpha, 0) \\ &B : (0, \sqrt{1-\alpha^2}), \end{aligned}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Si P est un point donné du segment $[AB]$, alors ses coordonnées (x_P, y_P) satisfont l'équation paramétrique de la droite AB:

$$\begin{aligned}(x_P, y_P) &= (\alpha, 0) + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= (\alpha, 0) + \lambda\left((0, \sqrt{1-\alpha^2}) - (\alpha, 0)\right) \\ &= ((1-\lambda)\alpha,\ \lambda\sqrt{1-\alpha^2}),\end{aligned}$$

avec $\lambda \in [0, 1]$ constant.

Pour obtenir une équation cartésienne du lieu, il suffit alors d'éliminer le paramètre α du système

$$\begin{cases} x_P = (1-\lambda)\alpha \\ y_P = \lambda\sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

On obtient l'équation

$$\lambda^2 x_P^2 + (1-\lambda)^2 y_P^2 = \lambda^2(1-\lambda)^2,$$

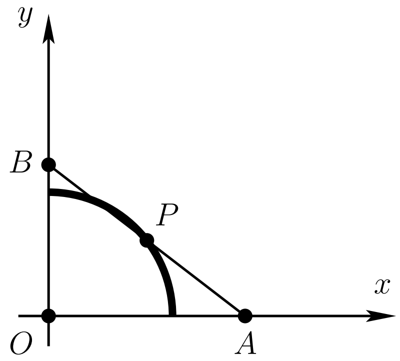
qui est celle d'une ellipse dont les axes sont parallèles à ceux du repère. (Cette ellipse dégénère en un segment de droite dans les cas particuliers $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.) Étant donné que les contraintes imposées à α et λ correspondent à $x_P \geq 0$ et $y_P \geq 0$, le lieu recherché est l'arc de cette ellipse limité au premier quadrant du repère.

(b) Il y a plusieurs façons de résoudre le problème pour ce cas particulier. Le plus simple consiste à poser $\lambda = \frac{1}{2}$ dans l'équation obtenue au point (a). Cette équation devient alors

$$x_P^2 + y_P^2 = \frac{1}{4},$$

qui montre que le lieu est l'arc du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré sur l'origine O du repère correspondant au premier quadrant.

Il était également possible de résoudre le problème par la géométrie synthétique. Le triangle OAB étant rectangle en O, son hypoténuse $[AB]$ est un diamètre de son cercle circonscrit, ce qui entraîne $|OP| = |AP| = |BP| = \frac{1}{2}|AB|$. La longueur $|AB|$ étant constante, $|OP|$ l'est aussi, dont on déduit que P se déplace sur un arc de cercle de rayon $\frac{1}{2}|AB|$ centré en O.


y
B
P
x
O
A