UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES
D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2010

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un triangle ABC rectangle en A (c'est-à-dire, tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit droit). Le centre du cercle inscrit à ce triangle est noté O. Ce cercle rencontre les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ du triangle en trois points notés respectivement P, Q et R. Dans le triangle PQR, le pied de la hauteur issue de Q est noté H.

   (a) Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{PRQ}$.

   (b) Démontrer que les points O, C et H sont alignés.

2. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, et on considère les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ soient perpendiculaires. Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ.

3. Le centre O d'un cercle de rayon r est situé à l'intersection des diagonales d'un parallélogramme $ABCD$. Un point P parcourt ce cercle.

   (a) Démontrer que la valeur de
   $$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2,$$
   où $|XY|$ représente la longueur du segment $[XY]$, ne dépend pas de la position de P sur le cercle.

   (b) Exprimer cette valeur en fonction de r et des longueurs $|AB|$ et $|BC|$ des côtés du parallélogramme.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les plans Π_1, Π_2, Π_3 et Π_4 par leur équation cartésienne:
   $$\Pi_1 :\ x + y - 1 = 0, \qquad \Pi_2 :\ y + z - 1 = 0,$$
   $$\Pi_3 :\ z + x - 1 = 0, \qquad \Pi_4 :\ x - y + z = 0.$$

   On donne aussi le point A de coordonnées $(1, 1, \lambda)$, où λ est un paramètre réel.

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les projections orthogonales de A sur les plans Π_1, Π_2, Π_3 et Π_4 soient coplanaires.

5. On considère un cube $ABCDA'B'C'D'$, avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$, et un plan π perpendiculaire à la droite AC'. La longueur d'une arête du cube est notée ℓ.

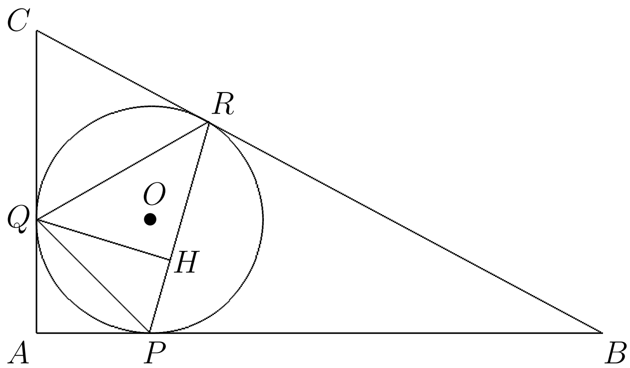
   On note respectivement H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 et H_6 les projections orthogonales des sommets B, C, D, D', A' et B' du cube sur π.

   (a) Démontrer que l'hexagone $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ est régulier. (*Suggestion:* Utiliser les propriétés de symétrie du cube.)

   (b) Déterminer l'aire de cet hexagone en fonction de ℓ.

Exemples de solutions

1.



   (a) Le cercle de centre O étant inscrit dans le triangle ABC, les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ de ce triangle sont tangents à ce cercle respectivement aux points P, Q et R.

   Dans ce cercle, les angles $\widehat{AQP}$ et $\widehat{APQ}$ sont des angles tangentiels et l'angle $\widehat{PRQ}$ est un angle inscrit. Ces 3 angles interceptant le même arc PQ sont donc égaux.

   Dans le triangle APQ rectangle en A, comme $\widehat{AQP} = \widehat{APQ}$, $\widehat{QAP} = 90°$ et que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, on a $\widehat{AQP} = \widehat{APQ} = \frac{180°-90°}{2} = 45°$.

   Dès lors, on obtient $\widehat{PRQ} = \widehat{AQP} = \widehat{APQ} = 45°$.

(b) Les tangentes au cercle issues du point C, extérieur au cercle, et limitées à leur point de contact Q et R sont égales. On a donc $|CQ| = |CR|$ et le point C appartient à la médiatrice du segment $[QR]$ puisqu'il est équidistant de Q et de R. De plus, les rayons d'un même cercle étant égaux, on a $|OQ| = |OR|$ et le point O appartient à la médiatrice du segment $[QR]$. Dès lors, CO est la médiatrice du segment $[QR]$.

Dans le triangle QHR rectangle en H, comme $H \in PR$, on a $\widehat{PRQ} = \widehat{HRQ} = 45°$ et $\widehat{QHR} = 90°$. Dès lors,

$$\widehat{HQR} = 180° - \widehat{HRQ} - \widehat{QHR} = 180° - 45° - 90° = 45°.$$

Le triangle HQR ayant deux angles égaux est isocèle et aux angles égaux sont opposés des côtés égaux. Ainsi, $|HQ| = |HR|$ et le point H appartient à la médiatrice du segment $[QR]$.

Dès lors, les points C, O et H sont alignés puisqu'ils appartiennent tous les trois à la médiatrice du segment $[QR]$.

2. Si P possède les coordonnées $(1, \lambda)$ et Q les coordonnées $(\mu, 1)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\lambda + \mu = 0$. Sous cette condition, le triangle POQ est isocèle puisque l'on a alors $|PO| = |QO| = \sqrt{1+\lambda^2}$. On en déduit que le point M est le milieu du côté $[PQ]$, et possède donc les coordonnées

$$\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right).$$

L'élimination de $\lambda \in \mathbb{R}$ fournit la la droite d'équation cartésienne

$$x + y = 1,$$

qui est le lieu recherché.

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
&|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \\
&\quad = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD})^2 \\
&\quad = 4\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 \\
&\qquad + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OD} \\
&\quad = 4r^2 + |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2 \\
&\qquad + 2\overrightarrow{PO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + 2\overrightarrow{PO}.(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\
&\quad = 4r^2 + |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2,
\end{aligned}$$

car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, ce qui entraîne

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

et

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

L'expression obtenue est bien indépendante de la position de P sur le cercle.

(b) En exploitant les résultats obtenus au point (a), on obtient

$$\begin{aligned}
&|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \\
&\qquad = 4r^2 + |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2 \\
&\qquad = 4r^2 + 2|OA|^2 + 2|OB|^2.
\end{aligned}$$

Soit M le milieu du côté $[AB]$. On a

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},$$

$$|MA| = \frac{1}{2}|AB|$$

et

$$|OM| = \frac{1}{2}|BC|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \\
&\qquad = 4r^2 + 2|OA|^2 + 2|OB|^2 \\
&\qquad = 4r^2 + 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 + 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})^2 \\
&\qquad = 4r^2 + 4\overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\
&\qquad = 4r^2 + 4\overrightarrow{OM}^2 + 4\overrightarrow{MA}^2 \\
&\qquad = 4r^2 + |AB|^2 + |BC|^2.
\end{aligned}$$

4. Cherchons les coordonnées cartésiennes de A_1, projection orthogonale de $A(1, 1, \lambda)$ sur le plan Π_1. Un vecteur normal à Π_1 ayant pour composantes $(1, 1, 0)$, les coordonnées de A_1 sont $(1 + r, 1 + r, \lambda)$. On détermine alors le paramètre r en exprimant que A_1 appartient au plan Π_1, à savoir $1 + r + 1 + r - 1 = 0$. On trouve $r = -1/2$ et finalement

$$A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right).$$

En procédant de même dans les autres cas, on obtient que les projections orthogonales A_2, A_3, A_4 de A respectivement sur les plans Π_2, Π_3 et Π_4 ont pour coordonnées

$$A_2\left(1, 1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right), \quad A_3\left(1-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2}\right), \quad A_4\left(1-\frac{\lambda}{3}, 1+\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}\right).$$

Cela étant les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont coplanaires si et seulement si les vecteurs

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_1A_2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right), \\
&\overrightarrow{A_1A_3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right), \\
&\overrightarrow{A_1A_4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{3}, \frac{1}{2}+\frac{\lambda}{3}, -\frac{\lambda}{3}\right)
\end{aligned}$$

sont linéairement dépendants, ce qui s'exprime par l'annulation du déterminant du tableau formé par leurs composantes. Ce déterminant étant égal à

$$\frac{\lambda^2}{12}\,(1+\lambda)\,,$$

la condition nécessaire et suffisante sous laquelle A_1, A_2, A_3, A_4 sont coplanaires est

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

5. (a) Montrons tout d'abord que le plan BDA' est parallèle à π. Des propriétés de symétrie du cube, on déduit que la droite BD est perpendiculaire au plan ACC'. Ce plan contient la droite AC', donc les droites BD et AC' sont orthogonales. Par le même raisonnement, on obtient que la droite $A'D$ est également orthogonale à AC'. Il s'ensuit que le plan BDA' est perpendiculaire à AC' et est donc bien parallèle à π.

   Le triangle BDA' est équilatéral, puisque ses trois côtés sont des diagonales de faces du cube. Par symétrie, le centre de gravité de ce triangle est situé sur la droite AC'. Le plan BDA' étant parallèle à π, le triangle $H_1H_3H_5$ est isométrique au triangle BDA', donc équilatéral, et possède un centre de gravité situé au point de percée O de la droite AC' dans le plan π. La longueur des côtés de ce triangle est donc égale à celle des diagonales des faces du cube.

De la même façon, on établit que le triangle $H_2H_4H_6$ est équilatéral, et possède les mêmes dimensions ainsi que le même centre de gravité O que $H_1H_3H_5$. Ces deux triangles possèdent donc le même cercle circonscrit $\mathcal{C}$, sur lequel sont situés les six points H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 et H_6.

Pour montrer que l'hexagone $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ est régulier, il reste à établir que l'on a $|H_1H_2| = |H_2H_3|$. En effet, par des rotations de 120° de centre O dans le plan π, laissant invariants les deux triangles équilatéraux $H_1H_3H_5$ et $H_2H_4H_6$, cette propriété entraîne

$$|H_1H_2| = |H_2H_3| = |H_3H_4| = |H_4H_5| = |H_5H_6| = |H_6H_1|.$$

Pour démontrer la propriété, on remarque que le plan médiateur ACC' du segment $[BD]$ est un plan de symétrie du problème et contient le point C, donc également sa projection H_2. Les points B et D étant symétriques par rapport à ce plan, leurs projections H_1 et H_3 le sont également, dont on déduit que les segments $[H_1H_2]$ et $[H_2H_3]$ sont les images l'un de l'autre par cette symétrie, et possèdent donc la même longueur.

(b) Il a été établi au point (a) que les côtés des triangles équilatéraux $H_1H_3H_5$ et $H_2H_4H_6$ possèdent la même longueur que les diagonales des faces du cube, c'est-à-dire $\ell\sqrt{2}$.

En appliquant le théorème de Pythagore, on calcule facilement la hauteur h de ces triangles:

$$h = \ell\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

On sait que le centre de gravité d'un triangle est situé au deux tiers de ses médianes, qui sont identiques aux hauteurs lorsque le triangle est équilatéral. Cela fournit le rayon r du cercle $\mathcal{C}$:

$$r = \frac{2\ell}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \ell\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

L'hexagone $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ étant régulier, on a

$$|H_1H_2| = |H_2H_3| = |H_3H_4| = |H_4H_5| = |H_5H_6| = |H_6H_1| = r,$$

et son aire $\mathcal{A}$ est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 = \ell^2\sqrt{3}.$$