UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2011

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{CA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Démontrer que l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut les sept tiers de celle du triangle ABC.

2. On se place dans un repère orthonormé du plan et on donne les points $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ (avec $a > 0$). On considère un cercle $\mathcal{C}$ variable passant par A et B. On demande de déterminer le lieu des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire, l'axe Y).

3. On donne quatre points A, B, C et D.

   (a) Montrer que le vecteur
   $$4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$
   est indépendant du point M.

   (b) Notons $\vec{v}$ le vecteur dont il est question au point précédent. Montrer que si celui-ci est nul, alors le nombre réel
   $$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 - 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MD}\|^2$$
   est indépendant du point M.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point P de coordonnées $(1, 1, 1)$ et la droite d d'équations cartésiennes
   $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3. \end{cases}$$

   (a) Montrer que le plan Π d'équation cartésienne
   $$3x + 2y + z - 6 = 0$$
   passe par P et contient la droite d.

(b) Déterminer l'équation générale des plans orthogonaux à Π qui passent par l'origine du repère.

(c) Parmi les plans évoqués au point précédent, déterminer celui dont l'intersection avec Π est parallèle à la droite d.

(d) Déterminer la distance entre P et d.

5. Dans un tétraèdre $ABCD$, on nomme h_A, h_B, h_C et h_D les hauteurs respectivement issues des sommets A, B, C et D.

(a) Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que si les droites h_A et h_B sont sécantes, alors les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ du tétraèdre sont orthogonales.

(b) Démontrer la réciproque de cette propriété.

(c) En déduire que si les droites h_A et h_B sont sécantes, alors les droites h_C et h_D le sont également.

Exemples de solutions

1. En notant $\mathcal{A}(XYZ)$ l'aire d'un triangle XYZ, on a

$$\mathcal{A}(A'B'C') = \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(AA'B') + \mathcal{A}(BB'C') + \mathcal{A}(CC'A').$$

Considérons le triangle $AA'B'$. Par hypothèse, sa base $|AB'|$ vaut le tiers de la base $|AB|$ du triangle ABC. Notons H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, et H' le pied de la hauteur issue de A' du triangle $AA'B'$.

Les triangles CHA et $A'H'A$ sont rectangles et partagent le même angle $\widehat{A}$. Ils possèdent donc trois angles égaux deux à deux et sont dès lors semblables. Par conséquent, on a

$$\frac{|A'H'|}{|CH|} = \frac{|A'A|}{|CA|} = 1 + \frac{|A'C|}{|CA|} = \frac{4}{3}.$$

On a donc établi que la base $|AB'|$ du triangle $AA'B'$ et la hauteur correspondante $|A'H'|$ sont respectivement égales au tiers de la base $|AB|$ du triangle ABC et aux quatre tiers de la hauteur correspondante $|CH|$. On obtient donc

$$\mathcal{A}(AA'B') = \frac{1}{2}|AB'|.|A'H'| = \frac{2}{9}|AB|.|CH| = \frac{4}{9}\mathcal{A}(ABC).$$

Par un raisonnement similaire, on obtient également

$$\mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(CC'A') = \frac{4}{9}\mathcal{A}(ABC),$$

ce qui donne finalement

$$\mathcal{A}(A'B'C') = \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)\mathcal{A}(ABC) = \frac{7}{3}\mathcal{A}(ABC).$$

2. Le centre d'un cercle passant par deux points donnés est situé sur la médiatrice du segment joignant les deux points (car le triangle formé par les deux points et le centre est isocèle). Il s'ensuit que le cercle $\mathcal{C}$ décrit dans l'énoncé a pour équation cartésienne

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = a^2 + \lambda^2,$$

où λ est un paramètre réel.

Cela étant, un point P appartient au lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées cartésiennes (x, y) de P vérifient

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + \lambda^2 \\ y = \lambda. \end{cases}$$

L'élimination de λ conduit alors au fait qu'un point P appartient au lieu si et seulement si ses coordonnées cartésiennes vérifient l'équation

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

qui est celle d'une hyperbole équilatère centrée à l'origine.

3. (a) Quel que soit le point M, on a

$$\begin{aligned}
&4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} \\
&\qquad = 4\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&\qquad = 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD},
\end{aligned}$$

vecteur indépendant de M.

(b) Quels que soient les points M et N, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 &= \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MN} \\
&= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \\
&= \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AN} + \left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2
\end{aligned}$$

En utilisant cette relation avec les points B, C, D en guise de N, on obtient

$$\begin{aligned} & 4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 - 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MD}\|^2 \\ & = 3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 5\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 \\ & \quad + 2\overrightarrow{MA}.\left(3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}\right) \\ & = 3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 5\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 \end{aligned}$$

qui est bien un réel indépendant de M.

4. (a) Le point $P(1, 1, 1)$ appartient au plan car ses coordonnées cartésiennes vérifient l'équation du plan:

$$3 + 2 + 1 - 6 = 0.$$

On a

$$3x + 2y + z - 6 = \frac{3}{2}(2x + y - 5) \ + \ \frac{1}{2}(y + 2z + 3).$$

Il s'ensuit directement que tout point qui appartient à la droite d possède des coordonnées qui vérifient l'équation de Π, donc lui appartient. Ainsi, la droite d est bien incluse dans le plan Π.

(b) Un vecteur normal au plan Π est $\vec{n}(3, 2, 1)$. Il s'ensuit qu'un plan Π_0 passant par l'origine et orthogonal au plan Π a une équation cartésienne du type

$$ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (composantes d'un vecteur normal, noté $\vec{n}_0$) et

$$3a + 2b + c = 0,$$

condition exprimant que $\vec{n}_0$ doit être un vecteur orthogonal à $\vec{n}$. La forme générale de l'équation de Π_0 est donc

$$ax + by - (3a + 2b)z = a(x - 3z) + b(y - 2z) = 0,$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$ (cette forme indique que les plans dont il est question sont ceux qui forment le faisceau d'axe d_0, droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{n}$).

(c) Vu le point précédent, Π_0 a pour vecteur normal

$$\vec{n_0}\ (a, b, -(3a+2b))$$

avec a, b réels non simultanément nuls. Il s'ensuit qu'étant donné Π_0, la droite $\Pi_0 \cap \Pi$ a pour vecteur directeur $\vec{n_0} \wedge \vec{n}$, de composantes

$$(6a+5b, -10a-6b, 2a-3b).$$

Ce vecteur est un vecteur directeur de d si et seulement si ses composantes vérifient le système homogène associé au système d'équations de d, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} 2(6a+5b)-10a-6b=0 \\ -10a-6b+2(2a-3b)=0 \end{array}\right. .$$

Ce système est équivalent à l'équation

$$a+2b=0,$$

dont les solutions non nulles sont les couples $b(-2,1)$, b réel non nul. Le plan cherché a donc pour équation

$$-2(x-3z)+y-2z=-2x+y+4z=0.$$

(d) La distance d'un point P à une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par A est donnée par l'expression

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Dans la situation présente, on peut prendre $A(1,3,-3)$ et $\vec{v}(1,-2,1)$ et on donne $P(1,1,1)$. Comme $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$ a pour composantes $(6,4,2)$, il s'ensuit que la distance cherchée est égale à

$$\sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Remarque. Sans recourir à l'expression explicite ci-dessus, la réponse s'obtient en cherchant la longueur du vecteur joignant P et P_0, P_0 étant la projection orthogonale de P sur d. Le point P_0 est en fait l'intersection de d et du plan orthogonal à d passant par P, lequel a pour équation cartésienne

$$x - 2y + z = 0.$$

On obtient

$$P_0 \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

et

$$\left\|\overrightarrow{PP_0}\right\| = \sqrt{\frac{28}{3}},$$

comme précédemment.

5. (a) Si h_A et h_B sont sécantes, alors elles appartiennent à un même plan π, qui contient également la droite AB.

   Le plan π contient la droite h_A qui est perpendiculaire au plan BCD, ce qui entraîne $\pi \perp BCD$. De même, π contient h_B qui est perpendiculaire au plan ACD, d'où l'on tire $\pi \perp ACD$.

   Si un plan est perpendiculaire à deux plans sécants, alors il est perpendiculaire à leur intersection. On a donc $\pi \perp CD$.

   La droite CD étant perpendiculaire au plan π, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc en particulier à la droite AB. Les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ du tétraèdre sont donc bien orthogonales.

   (b) Supposons à présent que les droites AB et CD sont orthogonales. Notons A' la projection orthogonale de A sur la droite CD, c'est-à-dire le pied de la hauteur issue de A du triangle ACD. On a $AA' \perp CD$ et $AB \perp CD$, ce qui entraîne $AA'B \perp CD$. Le plan $AA'B$ est donc le plan perpendiculaire à la droite CD qui passe par le point A.

   Par un raisonnement identique appliqué à la projection orthogonale B' de B sur la droite AB, on obtient $BB'A \perp CD$, d'où l'on déduit que le plan $BB'A$ est également le plan perpendiculaire à la droite CD qui passe par le point A. Le plan $AA'B$ est donc identique au plan $BB'A$. Ce plan, que nous notons π, est perpendiculaire à CD et contient la droite AB.

   La droite h_A est perpendiculaire au plan BCD par hypothèse, et est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à CD. Cette droite étant issue de A, elle appartient donc au plan perpendiculaire à CD passant par A, c'est-à-dire au plan π. Par un raisonnement analogue, h_B appartient au plan perpendiculaire à CD passant par B, c'est-à-dire au même plan π. Les deux droites h_A et h_B sont donc coplanaires, et ne peuvent être parallèles car elles sont respectivement perpendiculaires aux deux plans sécants BCD et ACD. Ces deux droites sont donc sécantes.

(c) Aux points (a) et (b), on a établi que h_A et h_B sont sécantes si et seulement si les droites AB et CD sont orthogonales. Par symétrie du problème, en permutant les rôles de A et de C ainsi que ceux de B et de D, on obtient que h_C et h_D sont également sécantes si et seulement si les droites AB et CD sont orthogonales. La propriété est alors immédiate.