UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2012

Enoncés

On demandait de résoudre trois questions parmi les cinq énoncées.

1. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle, dont les diagonales AC et BD sont perpendiculaires. On note O le point d'intersection de ces diagonales, et P, Q, R et S les projections orthogonales respectives du point O sur les droites AB, BC, CD et DA.

   (a) Démontrer que la droite OQ est bissectrice de l'angle $\widehat{PQR}$.

   (b) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est inscriptible dans un cercle.

2. Soient ABC un triangle rectangle en A et d une droite passant par A. On note G la projection orthogonale de B sur d et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la droite parallèle à AC menée par G et d_2 la droite parallèle à AB menée par E.

   (a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.

   (b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et d_2 lorsque d varie.

3. On considère deux triangles équilatéraux ABC et ABD partageant le même côté $[AB]$ (les points C et D étant situés de part et d'autre de la droite AB), et un point quelconque P du plan.

   Démontrer la relation
   $$|PC|^2 + |PD|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |AB|^2,$$
   où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

4. On considère une droite d de l'espace et un point P n'appartenant pas à d. Pour tout plan π contenant d, on désigne par Q la projection orthogonale du point P sur le plan π. Déterminer le lieu géométrique décrit par le point Q lorsque π varie.

5. Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes AD, BD et CD sont perpendiculaires deux à deux. Démontrer que la projection orthogonale du sommet D sur le plan ABC coïncide avec l'orthocentre du triangle ABC.

Exemples de solutions

1. (a) Démontrons que les angles $\widehat{PQO}$ et $\widehat{RQO}$ sont égaux. Dans le quadrilatère convexe $OPBQ$, les angles opposés $\widehat{P}$ et $\widehat{Q}$ sont droits par hypothèse, donc supplémentaires. Ce quadrilatère est dès lors inscriptible dans un cercle. On en déduit l'égalité

$$\widehat{PQO} = \widehat{PBO}$$

car ces deux angles sont inscrits à ce cercle et en interceptent la même corde.

En appliquant le même raisonnement au quadrilatère convexe $ORCQ$, on obtient l'égalité

$$\widehat{RQO} = \widehat{RCO}.$$

Par ailleurs, les angles $\widehat{PBO}$ et $\widehat{RCO}$ sont tous deux inscrits au cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ et en interceptent la même corde DA. Ces angles sont donc égaux, ce qui entraîne bien

$$\widehat{PQO} = \widehat{RQO}.$$

(b) Il suffit d'établir que deux angles opposés du quadrilatère $PQRS$ sont supplémentaires. Démontrons que l'on a

$$\widehat{PQR} + \widehat{PSR} = 180°.$$

Dans la démonstration du point (a), on a obtenu

$$\widehat{PQO} = \widehat{RQO} = \widehat{PBO},$$

ce qui entraîne

$$\widehat{PQR} = \widehat{PQO} + \widehat{RQO} = 2\widehat{PBO}.$$

En suivant un raisonnement similaire afin d'établir que la droite OS est bissectrice de l'angle $\widehat{PSR}$, on obtient également

$$\widehat{PSR} = \widehat{PSO} + \widehat{RSO} = 2\widehat{PAO}.$$

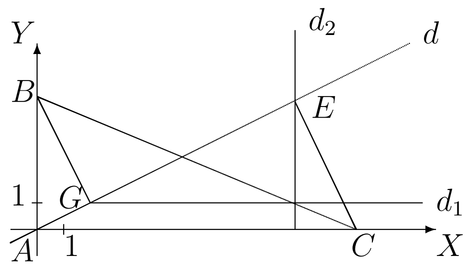
Le triangle ABO est rectangle en O par hypothèse, et l'on a dès lors

$$\widehat{PAO} + \widehat{PBO} = 90°,$$

ce qui fournit bien

$$\widehat{PQR} + \widehat{PSR} = 2(\widehat{PAO} + \widehat{PBO}) = 180°.$$

2. Choisissons un repère orthonormé d'origine A tel que la droite AC soit l'axe des abscisses et la droite AB celui des ordonnées. Les points A, B et C ont alors respectivement pour coordonnées $(0,0)$, $(0,b)$ et $(c,0)$ où b et c sont des constantes non nulles, strictement positives si on choisit l'orientation des axes en conséquence.



   (a) Si d coïncide avec AB alors $G = B$ et $E = A$. La droite d_1 est alors la parallèle à AC passant par B et d_2 coïncide avec AB. Dès lors, les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes en B.

   Si d diffère de AB, alors d a pour équation cartésienne $\lambda x - y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Toute perpendiculaire à d a une équation cartésienne du type $x + \lambda y + \alpha = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). La perpendiculaire à d passant par B a donc pour équation $x + \lambda y - \lambda b = 0$ et l'équation de celle passant par C est $x + \lambda y - c = 0$. Enfin, l'équation cartésienne de BC est $bx + cy - bc = 0$.

   Les coordonnées du point G sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - \lambda b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = \lambda b \end{array}\right.$$

   c'est-à-dire $\left(\dfrac{\lambda b}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$.

   De même, les coordonnées du point E sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y - c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \lambda x \\ (1+\lambda^2)x = c \end{array}\right.$$

   c'est-à-dire $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda c}{1+\lambda^2}\right)$.

   Dès lors, les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne $y = \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}$ et $x = \dfrac{c}{1+\lambda^2}$. Elles se coupent au point

P de coordonnées $\left(\dfrac{c}{1+\lambda^2}, \dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}\right)$. Ce point se trouve sur la droite BC car ses coordonnées vérifient l'équation de BC.
En effet, on a

$$b\,\frac{c}{1+\lambda^2}+c\,\frac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2}-bc=bc\left(\frac{1}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}-1\right)=0.$$

Dès lors, P est le point de concours des droites d_1, d_2 et BC.

(b) Lorsque la droite d varie, le lieu géométrique du point P s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations de d_1 et d_2. On a

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{\lambda^2 b}{1+\lambda^2} \\ x=\dfrac{c}{1+\lambda^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (b-y)\lambda^2=y \\ x\lambda^2=c-x \qquad (*) \end{array}\right.$$

Comme $x \neq 0$ (sinon $(*)$ s'écrirait $0=c$ ce qui est impossible puisque $c>0$), le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2=\dfrac{c-x}{x}\geq 0 \\ \dfrac{(b-y)(c-x)}{x}=y \end{array}\right.$$

et l'équation du lieu est $bx+cy-bc=0$ avec $x\in\,]0,c]$.
Ainsi, le point P se trouve sur la droite BC, son abscisse variant dans $]0,c]$. Comme B fait également partie du lieu (cf. ci-dessus), le lieu de P est le segment $[BC]$.

3. Notons O le milieu du côté $[AB]$.
On a

$$|PC|^2=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}\right)=|PO|^2+|OC|^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OC}$$

et

$$|PD|^2=|PO|^2+|OD|^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OD}=|PO|^2+|OC|^2-2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OC}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$|PC|^2+|PD|^2=2\,|PO|^2+2\,|OC|^2.$$

De la même manière, on obtient

$$|PA|^2 + |PB|^2 = 2\,|PO|^2 + 2\,|OA|^2 .$$

Par ailleurs, on a

$$|OC| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|AB| , \qquad |OA| = \frac{1}{2}\,|AB|$$

donc

$$|PC|^2 + |PD|^2 - |PA|^2 - |PB|^2 = 2\,|OC|^2 - 2\,|OA|^2 = |AB|^2 ,$$

ce qui est l'égalité qu'il fallait démontrer.

4. Ce problème peut indifféremment être résolu à l'aide de la géométrie analytique ou synthétique. Nous donnons ici une solution synthétique.

   Nommons π' le plan perpendiculaire à d issu de P. Les plans π et π' sont perpendiculaires, car π contient la droite d, qui est perpendiculaire à π' par hypothèse. On en déduit que la projection orthogonale Q de P sur π appartient au plan π'.

   Il reste donc à déterminer le lieu de Q au sein du plan π'. Soit R la projection orthogonale de P sur d, qui appartient également à π' par définition de la projection orthogonale.

   On a $PQ \perp \pi$ et $QR \subset \pi$, donc $PQ \perp QR$. Le triangle PQR, dont les trois sommets appartiennent à π', est donc rectangle en Q. On en déduit que Q appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[PR]$ contenu dans le plan π'. Le lieu recherché est donc inclus dans ce cercle.

   Montrons enfin que ce lieu correspond à l'entièreté de $\mathcal{C}$. Pour tout point $X \in \mathcal{C}$, il suffit en effet de choisir π égal au plan contenant à la fois d et X pour obtenir $PX \perp \pi$, donc $Q = X$.

5. Tout comme le problème précédent, cet énoncé peut être résolu en utilisant la géométrie analytique ou synthétique. Nous donnons ici une solution analytique.

   Choisissons un repère orthonormé adapté aux données: soient D l'origine du repère, la droite DA l'axe X, la droite DB l'axe Y et la droite DC l'axe Z; les coordonnées cartésiennes de A, B, C sont alors respectivement $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$ (avec a, b, c strictement positifs). Notons P la projection orthogonale de D sur le plan ABC, noté Π dans la suite.

Une équation cartésienne du plan Π est

$$bcx + acy + abz = abc$$

et des équations cartésiennes de la droite d orthogonale à Π passant par $D(0,0,0)$ sont

$$\frac{x}{bc} = \frac{y}{ac} = \frac{z}{ab}.$$

Cela étant, comme P est l'intersection de Π et de d, ses coordonnées constituent la solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} bcx + acy + abz = abc \\ by = ax \\ cz = ax \end{array}\right.$$

Déterminons à présent des équations cartésiennes de la hauteur h_A issue de A (dans le triangle ABC). Une équation cartésienne du plan Π_A contenant A et orthogonal à la droite BC est

$$by = cz.$$

Comme la hauteur h_A est l'intersection de Π et de Π_A, des équations sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} bcx + acy + abz = abc \\ by = cz \end{array}\right.$$

Le point P appartient donc à la droite h_A.

Le développement est analogue en ce qui concerne les hauteurs issues de B et C.