UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2014

Enoncés

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en un point A, tels que $\mathcal{C}_1$ est intérieur à $\mathcal{C}_2$. Une droite issue de A rencontre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en deux points (distincts de A) notés respectivement P et Q. La tangente à $\mathcal{C}_1$ issue de P rencontre $\mathcal{C}_2$ en deux points notés R et S.

   (a) Démontrer que la droite RS est parallèle à la tangente à $\mathcal{C}_2$ issue de Q.

   (b) En déduire que la droite AQ est bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne
$$y = (x+1)^2.$$
Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.

Exemples de solutions

1. (a) Notons respectivement O_1 et O_2 les centres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le triangle AO_1P est isocèle en O_1, car ses deux côtés $[O_1A]$ et $[O_1P]$ sont des rayons de $\mathcal{C}_1$. On en déduit que les angles $\widehat{O_1AP}$ et $\widehat{O_1PA}$ sont égaux.

   Un raisonnement similaire dans le triangle AO_2Q permet d'établir l'égalité des angles $\widehat{O_2AQ}$ et $\widehat{O_2QA}$. Les droites O_1P et O_2Q forment donc le même angle avec AP, et sont donc parallèles.

   La droite RS est perpendiculaire à O_1P, car tangente à $\mathcal{C}_1$ en P. De même, la tangente à $\mathcal{C}_2$ issue de Q est perpendiculaire à O_2Q, donc également à O_1P. Dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, ce qui démontre la propriété.

(b) Deux droites parallèles découpent sur un cercle des arcs égaux. En utilisant le résultat établi au point (a), on obtient donc que les arcs $\overline{RQ}$ et $\overline{QS}$ de $\mathcal{C}_2$ sont égaux.

Les angles $\widehat{RAQ}$ et $\widehat{QAS}$ sont inscrits au cercle $\mathcal{C}_2$, et interceptent donc des arcs égaux. On en déduit que ces angles sont égaux, ce qui établit que AQ est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$.

2. Remarquons tous d'abord que l'axe des ordonnées ne découpe pas de corde sur la parabole $y = (x+1)^2$. La droite variable peut donc être décrite par l'équation cartésienne

$$y = mx,$$

où m est un paramètre réel.

Les intersections de cette droite avec la parabole sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = (x+1)^2, \end{cases}$$

donc leurs abscisses x sont les solutions de l'équation

$$(x+1)^2 - mx = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + (2-m)x + 1 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré est égal à

$$\Delta = (2-m)^2 - 4 = m^2 - 4m = m(m-4),$$

qui est non négatif si et seulement si $m \leq 0$ ou $m \geq 4$. Dans ce cas, les deux points d'intersection de la droite avec la parabole possèdent les coordonnées

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{m^2-2m-m\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

et

$$\left(\frac{m-2+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{m^2-2m+m\sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

Le milieu M de la corde délimitée par ces deux points possède donc les coordonnées

$$M\left(\frac{m-2}{2}, \frac{m^2-2m}{2}\right)$$

En éliminant le paramètre m, on obtient

$$y = 2x(x+1),$$

qui est l'équation cartésienne d'une parabole.

Le lieu cherché est donc composé de l'union de deux arcs de cette parabole: l'un correspondant à $m \leq 0$, c'est-à-dire à $x \leq -1$, et l'autre à $m \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq 1$. En résumé, le lieu est l'ensemble des points de la parabole

$$y = 2x(x+1)$$

tels que $|x| \geq 1$.