UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2016

Enoncés

1. On considère un triangle ABC et un point arbitraire P appartenant au côté $[BC]$ et distinct de B et C. Démontrer que l'on a

$$\frac{|AB|^2}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}}+\frac{|AC|^2}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}+\frac{|AP|^2}{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}}=1,$$

où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d passant par le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents à d et tangents extérieurement à $\mathcal{C}$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

Exemples de solutions

1. L'idée est d'exprimer la relation en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Par hypothèse, les points B, C et P sont alignés, donc il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$. Puisque P est distinct de B et C, on a aussi $k\notin\{0,1\}$. On peut alors calculer

$$\left\{\begin{array}{lllll}\overrightarrow{PC} & = & \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP} & = & (1-k)\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AP} & = & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP} & = & \overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}.\end{array}\right.$$

Le membre de gauche de l'équation donnée dans l'énoncé vaut alors

$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{k\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}+\frac{\overrightarrow{AC}^2}{(1-k)\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}-\frac{((1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})^2}{k(1-k)\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}$$

En réduisant cette expression au même dénominateur, on obtient

$$\frac{(1-k)\overrightarrow{AB}^2+k\overrightarrow{AC}^2-((1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})^2}{k(1-k)\,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}.$$

On développe ensuite le carré dans le numérateur en

$$(1-k)^2\overrightarrow{AB}^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + k^2\overrightarrow{AC}^2.$$

On regroupe les termes de manière naturelle et on obtient comme numérateur

$$k(1-k)[\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}] = k(1-k)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2 = k(1-k)\overrightarrow{BC}^2.$$

Le membre de gauche de l'équation donnée dans l'énoncé est donc égal à 1, quels que soient le triangle ABC et la position de P.

2. On choisit un repère orthonormé de telle sorte que l'origine O soit le centre du cercle, l'unité égale au rayon du cercle et l'axe des abscisses défini par d.

   La tangente à un cercle en un point est orthogonale au rayon joignant le centre du cercle au point. Dès lors un point P de coordonnées cartésiennes (x,y) appartient au lieu si et seulement si P est extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et la distance $dist(P,d)$ de P à d est égale à la distance $dist(P,\mathcal{C})$ de P à $\mathcal{C}$. Avec le choix du repère, ceci s'exprime par

$$|y| = \sqrt{x^2+y^2}-1.$$

   On obtient donc successivement

$$\begin{aligned} |y| = \sqrt{x^2+y^2}-1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ (|y|+1)^2 = x^2+y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ 1+2|y| = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad 1+2|y| = x^2. \end{aligned}$$

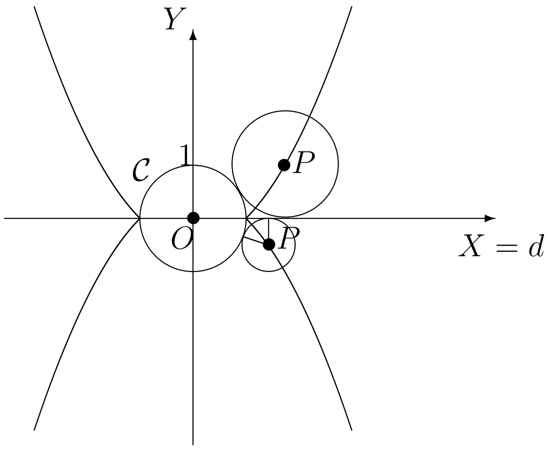
   Lorsque l'ordonnée de P est positive ou nulle, on obtient donc que P appartient au lieu si et seulement si

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

   et lorsqu'elle est négative, P appartient au lieu si et seulement si

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

   Le lieu est donc formé de deux parties de paraboles d'axe Y: les points de la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ dont l'ordonnée est positive et les points de la parabole d'équation $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ dont l'ordonnée est négative.



Remarque: On aurait également pu résoudre ce problème en revenant directement à la description géométrique de deux (parties de) paraboles: considérer le centre du cercle (O) comme foyer et comme directrices les deux droites parallèles à la droite donnée situées à une distance égale au rayon du cercle.