UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2017

Enoncés

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un parallélogramme $ABCD$ dont l'intersection des diagonales coïncide avec O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que la valeur de

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$$

reste constante.

2. Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$ d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement notés A' et B'.

Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

Exemples de solutions

1. Notons r le rayon du cercle $\mathcal{C}$. Quel que soit le point Q du plan, on a

$$\begin{aligned}
|MQ|^2 &= \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MQ} \\
&= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ}\right) \\
&= r^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + 2\ \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OQ}
\end{aligned}$$

Dès lors on obtient

$$\begin{aligned}
&|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 \\
&\quad = 4r^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 \\
&\quad\quad +2\ \overrightarrow{MO} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \\
&\quad = 4r^2 + 2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2|\overrightarrow{OB}|^2
\end{aligned}$$

puisque

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}.$$

2. Choisissons un repère orthonormé de la manière suivante: O en est l'origine, la droite orientée OA est l'axe des abscisses et la droite orientée OB est l'axe des ordonnées. Dans ces conditions, les coordonnées des points A, B, A', B' sont les suivantes

$$A(a, 0), \quad B(0, b), \quad A'(a/2, 0), \quad B'(0, b/2),$$

avec $a > 0$ et $b > 0$.

Cela étant, recherchons les coordonnées du point C et du point E. Puisque le triangle OAC est équilatéral, l'abscisse de C est égale à $a/2$ et son ordonnée y_C vérifie

$$y_C^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

ce qui implique

$$y_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

puisque le triangle OAC a été construit à l'extérieur. De même, puisque le triangle OBE est équilatéral, l'ordonnée de E est égale à $b/2$ et son abscisse x_E vérifie

$$x_C^2 + \frac{b^2}{4} = b^2$$

ce qui implique

$$x_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

puisque le triangle OBE a été construit à l'extérieur.

On obtient ainsi directement les équations cartésiennes de la hauteur h du triangle OAB issue de O et des droites $A'E$ et $B'C$:

$$\begin{array}{rcl} h & : & ax - by = 0, \\ A'E & : & x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2}, \\ B'C & : & \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{array}$$

Ces droites sont concourantes si et seulement si le système suivant est compatible

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - by = 0 \\ x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2} \\ \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{array} \right.$$

Et cela a lieu si et seulement si le déterminant

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -1 & 0 \\ \sqrt{3} + \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{2} \\ 1 & \sqrt{3} + \frac{a}{b} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

est nul. En calculant celui-ci à partir de la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} D &= \frac{a}{b}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\,(\sqrt{3} + \frac{a}{b})\right) + \left(\frac{a}{2}\,(\sqrt{3} + \frac{b}{a}) - \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{a^2}{2b} - \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a^2}{2b} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Une autre façon de montrer que ce système est compatible aurait été de calculer l'intersection de deux des droites, et de vérifier ensuite que les coordonnées obtenues satisfont l'équation de la troisième.)