UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Enoncés et solutions de l'examen de seconde session 2018

Enoncés

1. Soient deux droites perpendiculaires X, Y, sécantes en O. Sur X, on fixe les points A et B de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$. Quel est le lieu du ou des point(s) commun(s) aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où a, b sont des paramètres réels.

   i Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

   ii Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces droites soient sécantes.

   iii Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant ces droites.

Exemples de solutions

1. Afin de résoudre le problème par la géométrie analytique, on fixe un repère orthonormé dont les axes sont X et Y, et tel que $|OB| = 1$. Dans ce repère, les coordonnées des points qui interviennent dans le problème sont

$$\begin{aligned} A&: (2, 0) \\ B&: (1, 0) \\ P&: (0, 3a) \\ Q&: (0, a), \end{aligned}$$

où a est un paramètre réel.

À partir de ces coordonnées, on obtient facilement les équations cartésiennes des droites AP et BQ:

$$\begin{array}{rcl} AP & : & 3ax + 2y = 6a \\ BQ & : & ax + y = a \end{array}$$

On résout ensuite le système formé par ces deux équations, afin de déterminer l'intersection des droites.

- Si $a \neq 0$, alors $(x, y) = (4, -3a)$. En éliminant le paramètre a, on obtient que cette partie du lieu correspond à la droite d'équation $x = 4$, amputée du point $(4, 0)$.
- Si $a = 0$, alors on a $y = 0$, qui est l'équation de la droite X.

En résumé, le lieu est donc formé par l'union de la droite d'équation $x = 4$, c'est-à-dire la parallèle à Y issue du point C tel que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, et de la droite X.

2. i La droite d_a admet le vecteur directeur $(1, -3, 1)$, et la droite d_b le vecteur directeur $(1, 1, -3)$. Ces vecteurs n'étant pas multiples l'un de l'autre, les deux droites ne sont pas parallèles.

   ii Les deux droites admettent les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{array}{rcl} d_a & : & (x, y, z) = (a, -1, 0) + \lambda(1, -3, 1) \\ d_b & : & (x, y, z) = (-2b + \frac{14}{3}, 2b - \frac{7}{3}, 0) + \mu(1, 1, -3), \end{array}$$

   avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Ces droites sont sécantes si et seulement si elles possèdent une intersection non vide, c'est-à-dire si le système suivant admet une solution:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + \lambda & = & -2b + \frac{14}{3} + \mu \\ -1 - 3\lambda & = & 2b - \frac{7}{3} + \mu \\ \lambda & = & -3\mu \end{array} \right.$$

   En éliminant λ et μ de ce système, on obtient $a + b = 4$, qui est la condition demandée.

   iii Le plan cherché est caractérisé par les vecteurs directeurs de d_a et d_b, déjà calculés au point (i). Il contient tous les points de d_a et de d_b, et en particulier celui de coordonnées $(a, -1, 0)$ déjà utilisé pour établir l'équation paramétrique de d_a.

   Une équation paramétrique de ce plan est donc:

$$(x, y, z) = (a, -1, 0) + \lambda(1, -3, 1) + \mu(1, 1, -3),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Cette équation correspond au système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a + \lambda + \mu \\ y & = & -1 - 3\lambda + \mu \\ z & = & \lambda - 3\mu. \end{array} \right.$$

En élminant λ et μ de ce système, on obtient

$$2x + y + z = 2a - 1,$$

qui est l'équation recherchée.