Introduction à l'informatique

Bernard Boigelot

E-mail : Bernard.Boigelot@uliege.be
WWW : https://people.montefiore.uliege.be/boigelot/
https://people.montefiore.uliege.be/boigelot/cours/info/

Chapitre 1

Les ordinateurs et les programmes

Les ordinateurs

Définition: Un ordinateur est une machine capable de

- résoudre des problèmes et de
- traiter des données

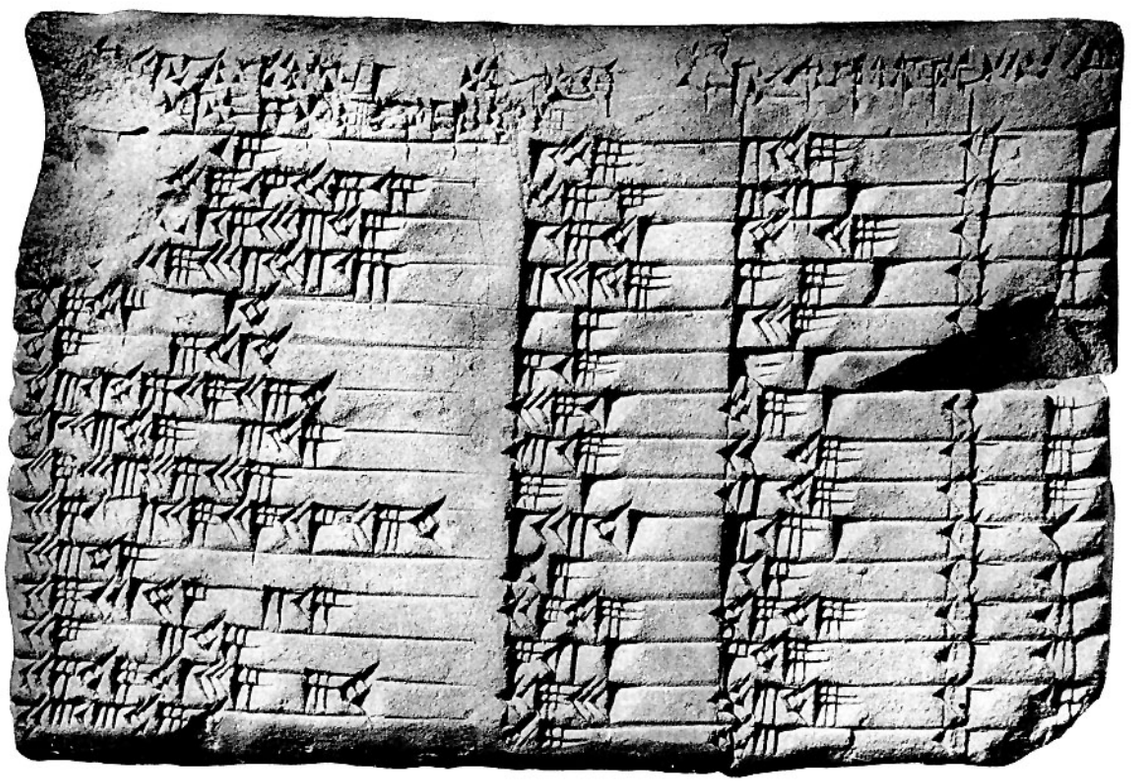
en effectuant des opérations préétablies.

Objectifs du cours:

- Apprendre à programmer un ordinateur.
- Être capable d'apporter une solution algorithmique à un problème.

Un peu d'histoire . . .

≈ -2000: Notation positionnelle des nombres, abaque (Mésopotamie).

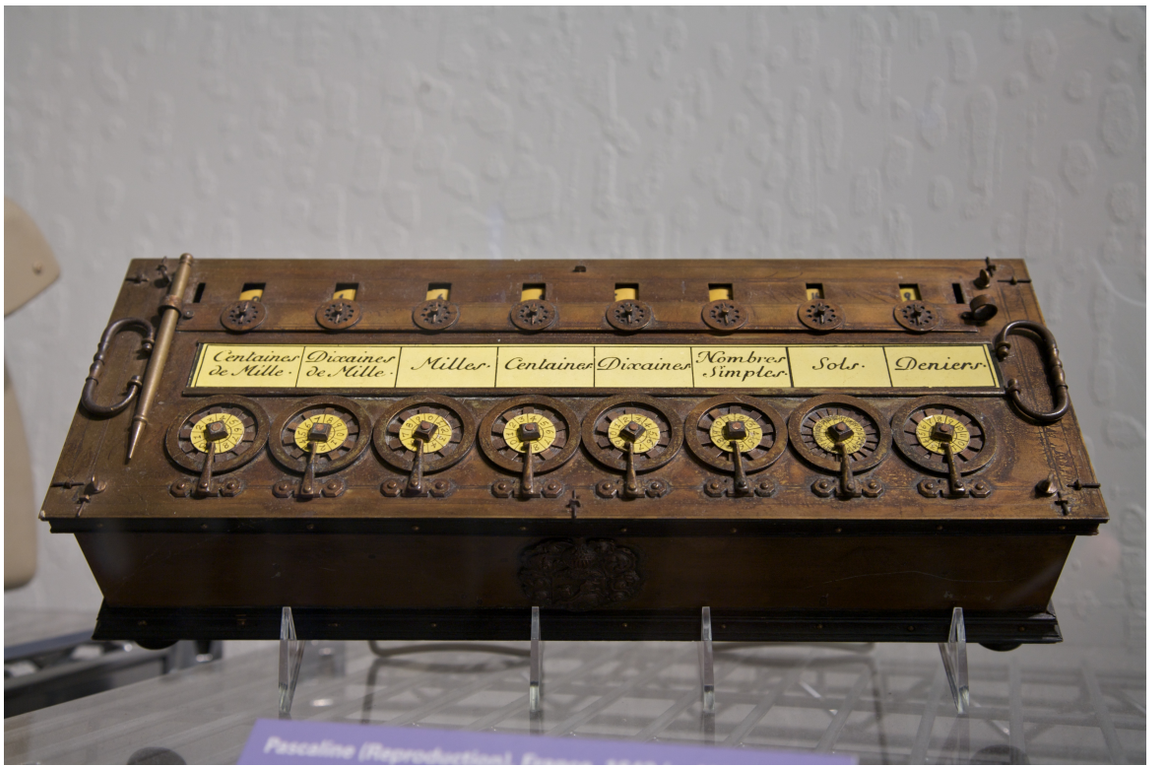


(Source: `http://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322`)

$\approx$ 825: Procédures de calcul symbolique (al-Khwārizmī, Perse).

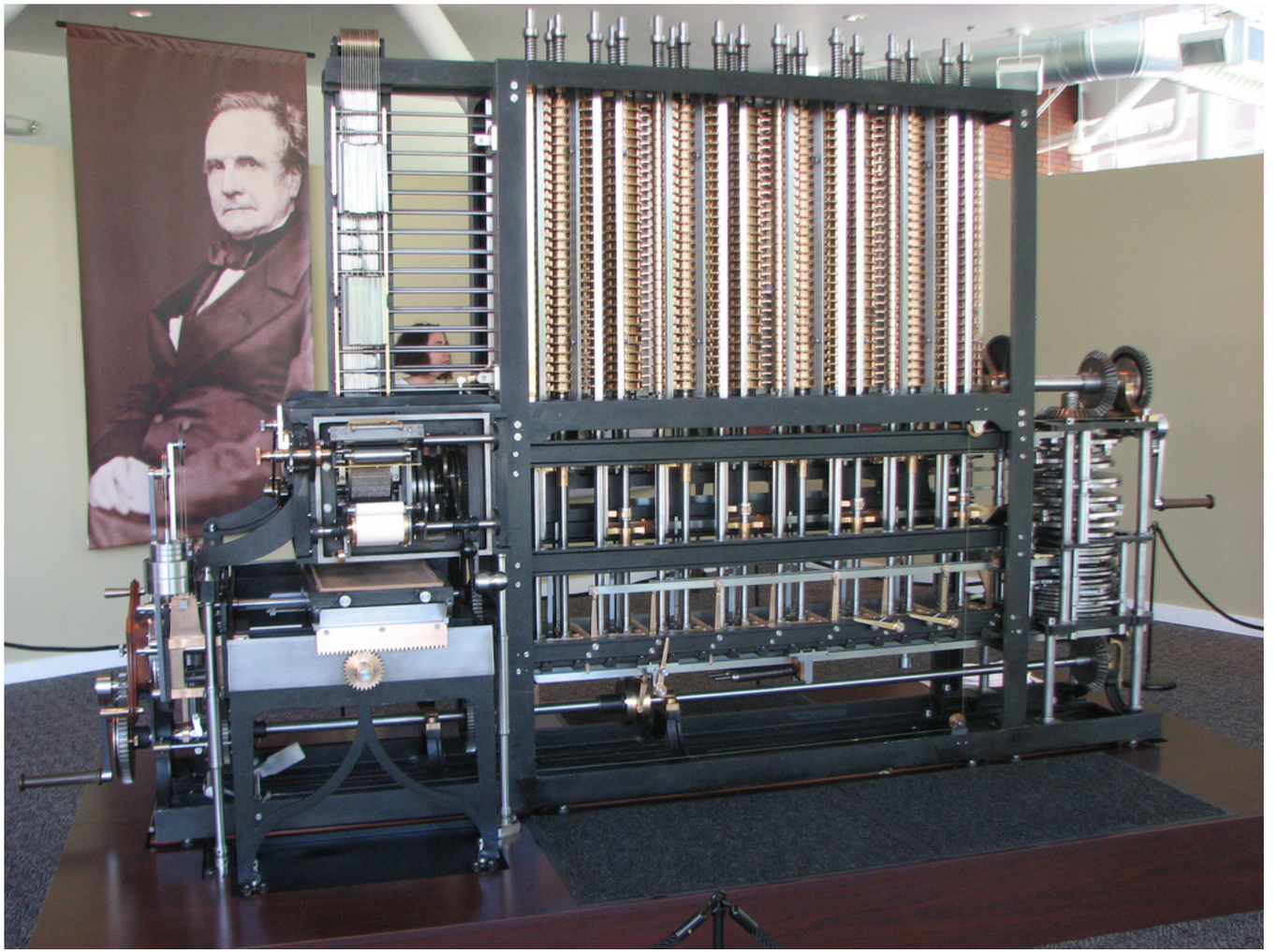
(Source: `http://en.wikipedia.org/wiki/Al-Khwarizmi`)

1625: Machine permettant d'automatiser le calcul d'opérations arithmétiques (Pascal).



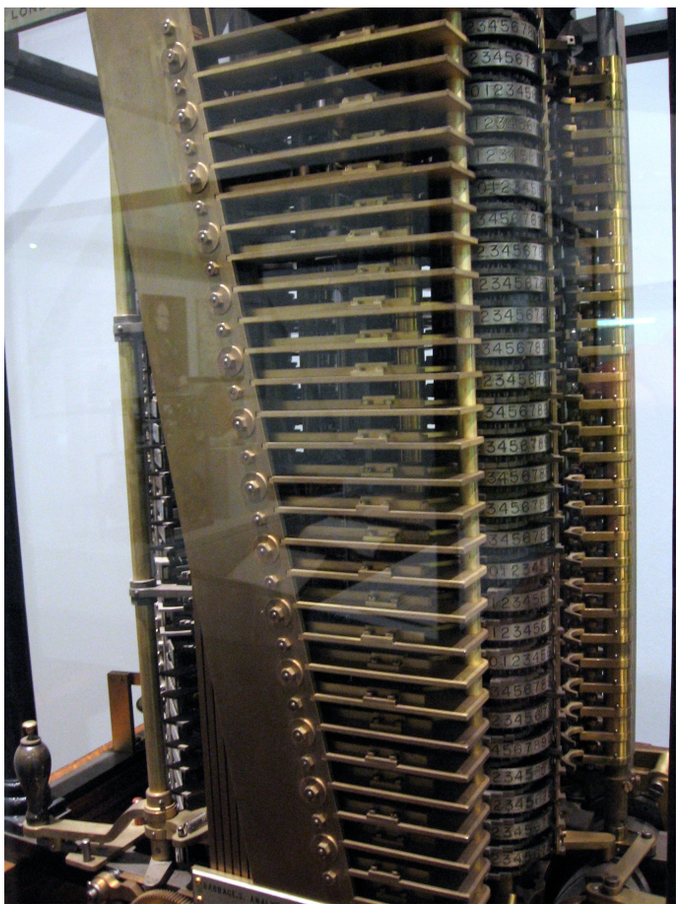
(Source: Marcin Wichary, `http://www.flickr.com/photos/mwichary/`)

1822: Machine capable d'effectuer automatiquement une combinaison particulière d'opérations arithmétiques (Babbage, *difference engine*).



(Source: Erik Pitti, `http://www.flickr.com/photos/epitti/`)

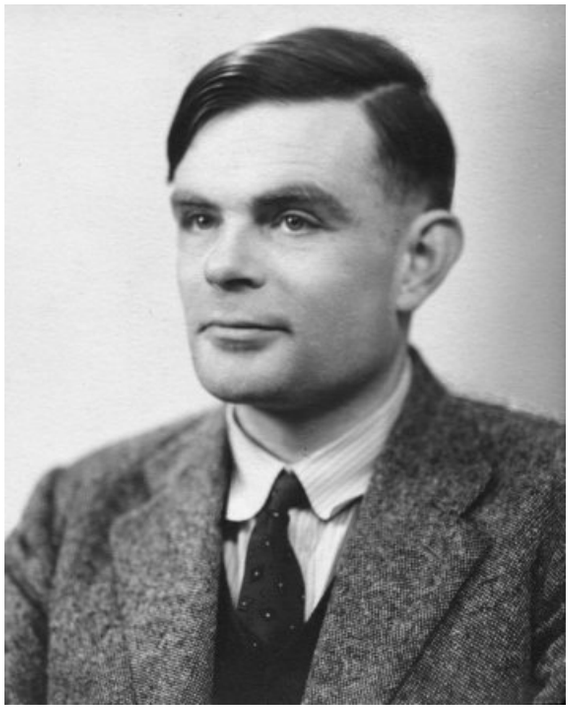
1837: Machine programmable (Babbage, *analytical engine*, travail inachevé).



(Source: Marcin Wichary, `http://www.flickr.com/photos/mwichary/`)

1937: (Turing) Étude théorique

- des opérations de calcul pouvant être effectuées par un procédé automatique, et
- de certaines limitations fondamentales de l'informatique.



(Source: `http://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing`)

1941: Premier ordinateur programmable entièrement fonctionnel (Zuse Z3).

(Source: `http://en.wikipedia.org/wiki/Z3_(computer)`)

Caractéristiques:

- Programmes introduits à l'aide de bandes perforées.
- Mécanismes électromécaniques ($\approx$ 2000 relais).
- Puissance de calcul de 5 à 10 opérations par seconde.

1948 – 1951: Premiers ordinateurs capables de retenir et de gérer leurs propres programmes:

- Manchester *Small-Scale Experimental Machine*.
- *Electronic Delay Storage Automatic Calculator (EDSAC)*, Cambridge, Angleterre.
- *Electronic Discrete Variable Automatic Computer (EDVAC)*, USA.

  Caractéristiques:

  – Capable de retenir environ 1000 nombres de 15 chiffres.

  – Puissance de calcul d'environ 1200 opérations par seconde.

  – Construit à l'aide d'environ 18000 tubes à vide.

  – 56 kW.

  – 7,8 tonnes.

  – Coût de fabrication de l'ordre de $500000 (en 1951).

1947 Invention du transistor. (Premier ordinateur à transistors en 1953.)

1954 Langage de programmation Fortran.

1958 Invention du circuit intégré.

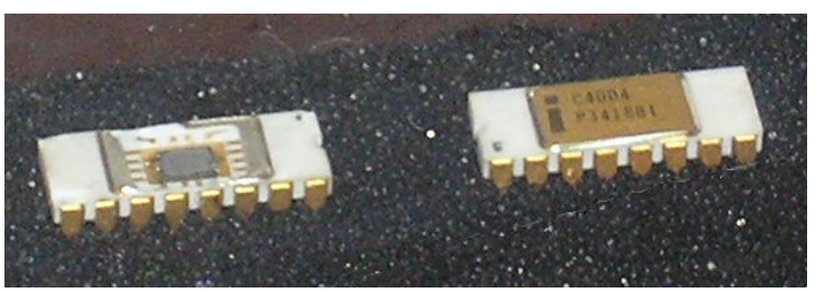
1959 Langage COBOL.

1969 Système d'exploitation UNIX.

1971 Premier microprocesseur (Intel 4004):

Caractéristiques:

- 2300 transistors.
- 92000 opérations par seconde.
- Prix initial de l'ordre de $200.



(http://en.wikipedia.org/wiki/Intel_4004)

1972 Langage C.

1974 Premiers microordinateurs.

1978 Microprocesseur Intel 8086.

1981 IBM PC.

1985 Système d'exploitation Windows.

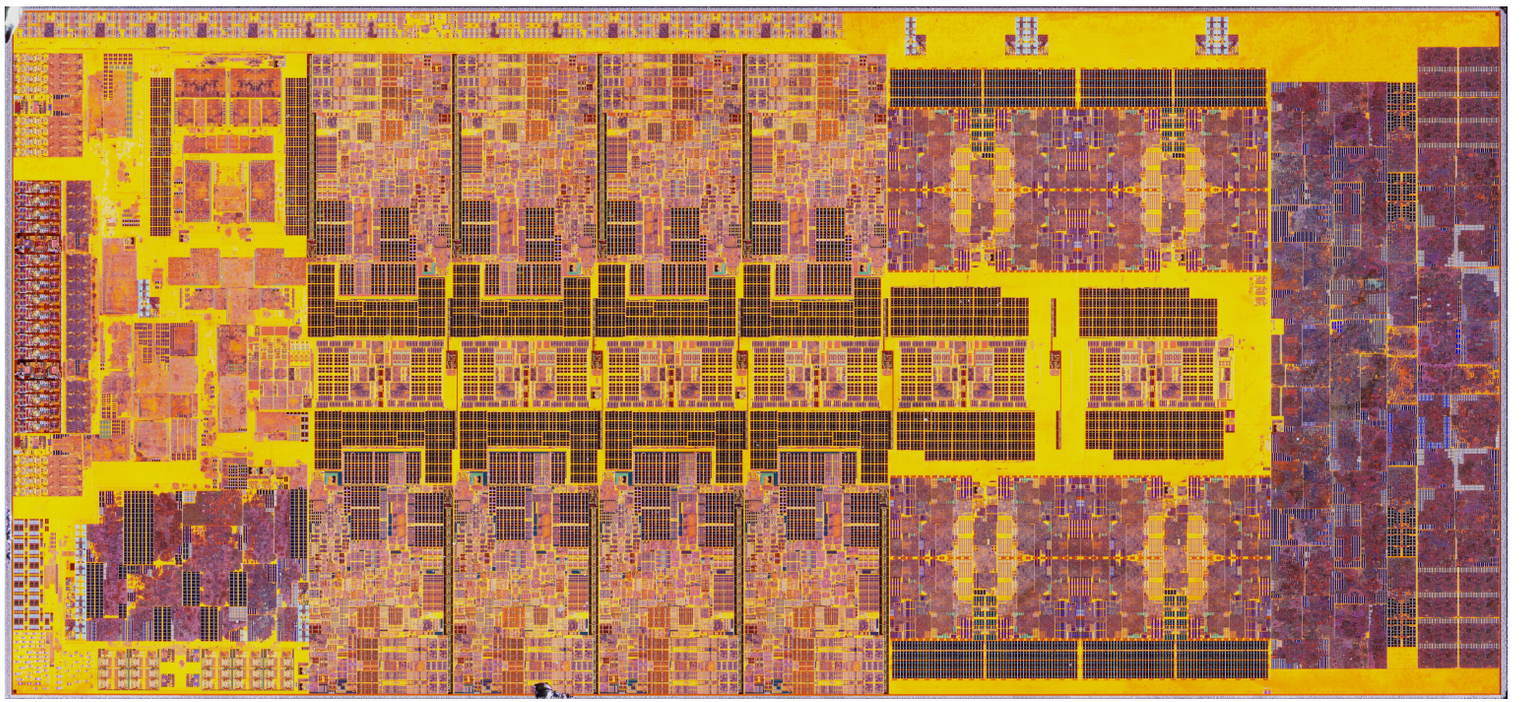
1989 *World-Wide Web*.

1995 Langage Java.

2003 Premier microprocesseur 64 bits destiné au grand public.

2007 iPhone.

2022 Microprocesseur Core i9 de 13ème génération:



(Source: Fritzchens Fritz)

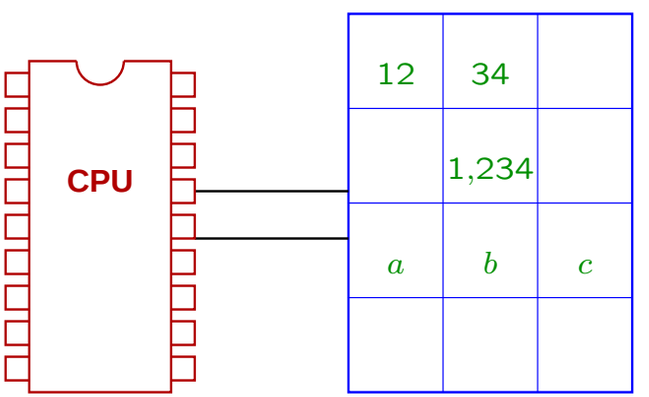
Caractéristiques:

- Puissance de calcul d'environ 845 milliards d'opérations par seconde.
- Probablement entre 20 et 25 milliards de transistors, pour une taille de 257 mm^2.
- 125 W.
- Environ $\$600$.

La forme abstraite d'un ordinateur

Du point de vue d'un programmeur, un ordinateur peut être vu comme une machine composée

- d'un processeur capable d'effectuer des opérations de traitement, et
- d'une ou plusieurs mémoires chargées de retenir
  - les données manipulées (données d'entrée, de sortie, de travail),
  - les programmes spécifiant les opérations à effectuer.



Les algorithmes

Définition: Un algorithme est une procédure permettant de résoudre un problème en décrivant précisément les opérations à effectuer.

Résoudre un problème implique généralement de transformer des données d'entrée en données de sortie.

- Les données d'entrée peuvent être soit entièrement connues avant d'exécuter l'algorithme, soit fournies au cours de son exécution.
- De même, les données de sortie sont soit générées en fin d'exécution, soit communiquées en cours d'exécution de l'algorithme.

Exemples de problèmes:

- Calculer la racine carrée d'un nombre positif, à une certaine précision près.

- Déterminer si un nombre naturel est premier ou non.
- Calculer le plus court chemin entre deux points dans un espace donné.
- Affronter un adversaire au jeu d'échecs.
- Piloter un avion en fonction de consignes spécifiées par un opérateur et de mesures transmises par des capteurs.
- Repérer la position d'un visage dans une image.
- Traduire une conversation du français vers l'anglais.
- Simuler l'évolution d'un phénomène physique.
- ...

Quelques problèmes algorithmiques

1. Fonction factorielle

Énoncé: Étant donné un nombre entier $n \geq 1$, calculer

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1.$$

Solution: Dans ce cas, la définition du problème mène directement à une solution algorithmique: On peut obtenir la valeur de $n!$ à partir de celle de n en calculant explicitement le produit de tous les entiers strictement positifs qui sont inférieurs ou égaux à n.

2. Plus grand commun diviseur (PGCD)

Énoncé: Étant donnés deux nombres entiers $a, b \geq 1$, calculer le plus grand entier $\gcd(a, b)$ qui divise à la fois a et b.

Exemples:

- $\gcd(24, 18) = 6$.
- $\gcd(1000, 1000) = 1000$.
- $\gcd(1, 107) = 1$.
- $\gcd(522982704508405 7754, 157088956581803 5132) = 67956946$.

Première solution (recherche exhaustive, *brute-force search*):

- De l'énoncé, on peut déduire immédiatement que pour tous $a, b \geq 1$, on a:

$$1 \leq \gcd(a, b) \leq \min(a, b).$$

- Pour calculer $\gcd(a, b)$, il suffit donc d'énumérer tous les entiers dans l'intervalle $[1, \min(a, b)]$, de tester s'ils divisent à la fois a et b, et de garder le plus grand entier qui satisfait cette condition.

Inconvénient: Le nombre d'opérations à effectuer devient prohibitif pour de grandes valeurs de a et de b.

Meilleure solution (algorithme d'Euclide):

- On observe que l'on a pour tous $a, b \geq 1$:

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a).$$

- Si un nombre divise à la fois a et b, alors il divise également leur différence. On en déduit que pour tous $a, b \geq 1$ tels que $a \leq b$, on a:
  - $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$, et
  - $\gcd(a, b) = \gcd(a, b \bmod a)$,

  en considérant que
  - pour tout $n \geq 1$, $\gcd(n, 0) = n$, et
  - $x \bmod y$ dénote le reste de la division de x par y.

- On obtient donc la procédure suivante:

  1. Si $a > b$, alors permuter a et b.
  2. Tant que $a \neq 0$, répéter l'opération suivante:
     – Remplacer (a, b) par $(b \bmod a, a)$.
  3. Retourner la valeur de b.

Illustration: Calcul de $\gcd(24, 18)$:

Étape	a	b
1	24	18
2	18	24
3	6	18
4	0	6

Efficacité: Il a été démontré que le nombre d'étapes nécessaires au calcul de $\gcd(a, b)$ par cette méthode, avec $a \leq b$, est borné par cinq fois le nombre de chiffres de l'écriture décimale de a [Lamé, 1844].

3. Racine carrée

Énoncé: Étant donnés un nombre réel $r \geq 0$ et une précision souhaitée $\varepsilon > 0$, calculer une valeur sqrt(r) telle que

$$|\text{sqrt}(r) - \sqrt{r}| \leq \varepsilon.$$

Remarque: Dans ce cas, l'énoncé du problème ne mène pas directement à une solution algorithmique . . .

Exemple de solution (algorithme de Héron):

1. Partir d'une estimation initiale quelconque x de $\sqrt{r}$.
2. Remplacer x par $x' = \frac{1}{2}(x + \frac{r}{x})$.
3. Tant que les deux dernières estimations x et x' sont telles que $|x - x'| \geq \varepsilon$, répéter l'étape précédente.
4. Sinon, retourner la valeur de la dernière estimation x'.

Illustration: Calcul de $\sqrt{2}$, $\varepsilon = 10^{-6}$:

Étape	Estimation x
1	2.00000000
2	1.50000000
3	1.41666667
4	1.41421569
5	1.41421356
6	1.41421356

L'implémentation d'un algorithme

Un algorithme peut être implémenté sous la forme d'un programme, qui spécifie comment il peut être exécuté par un processeur d'un ordinateur.

Notes:

- L'ensemble des opérations élémentaires composant les programmes et pouvant être exécutées par un processeur est limité.
- Cet ensemble dépend de l'architecture matérielle du processeur utilisé.
- Il a été établi qu'un très petit ensemble d'opérations suffit à implémenter n'importe quel algorithme.

Les langages de programmation

Afin de pouvoir s'abstraire des détails matériels de l'ordinateur utilisé, on a défini des langages de programmation facilitant l'implémentation des algorithmes.

Il existe différentes catégories de langages: impératifs ou non, de haut ou de bas niveau, génériques ou spécifiques à un domaine d'application, ...

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons aux langages impératifs, qui précisent explicitement les opérations à effectuer à chaque étape de l'exécution des programmes.

Un programme écrit dans un langage de programmation n'est en général pas directement exécutable par un processeur, et doit être traduit en code machine afin de pouvoir être exécuté. Cette traduction peut être effectuée:

- soit préalablement à l'exécution du programme (compilation),
- soit au cours de cette exécution (interprétation).

La syntaxe et la sémantique d'un langage

Un langage de programmation est défini par:

- sa syntaxe, qui décrit précisément quels sont les programmes qu'il est permis d'écrire, et
- sa sémantique, qui donne un sens à ces programmes. On distingue:
  - la sémantique statique d'un programme, qui spécifie un ensemble de contraintes qu'un programme doit satisfaire afin d'être considéré valide, et
  - la sémantique dynamique, qui décrit les opérations effectuées lors de l'exécution d'un programme.

Exemple de programme: Calcul du PGCD en langage C

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  int a, b, c;

  printf("Entrez deux entiers strictement positifs: ");
  scanf("%d %d", &a, &b);

  if (a > b)
    {
      c = a;
      a = b;
      b = c;
    }

  while (a != 0)
    {
      c = a;
      a = b % a;
      b = c;
    }

  printf("Le PGCD est égal à %d.\n", b);
}
```

Quelques explications

Remarque: Les notions évoquées ici seront étudiées en détail dans la suite du cours.

- Le programme est composé principalement d'instructions:
  - `int a, b, c`
  - `scanf("%d %d", &a, &b)`
  - `c = a`
  - ...
- La syntaxe du langage impose de terminer la plupart des instructions par un point-virgule `;`.

- Des instructions peuvent être assemblées en séquences:

```
c = a;
a = b;
b = c;
```

- Une séquence d'instructions peut être englobée dans un bloc, délimité par des accolades.

```
{
  c = a;
  a = b;
  b = c;
}
```

  Un bloc joue le même rôle syntaxique qu'une instruction individuelle (langage structuré).

- Les espaces, tabulations et sauts de lignes sont ignorés, mais aident à rendre le programme plus lisible (indentation des instructions).

- Le bloc qui suit

```
int main()
```

  est celui qui est exécuté en premier lieu.

- Les instructions d'une séquence sont exécutées l'une après l'autre, dans l'ordre où elles apparaissent.

- L'instruction

```
int a, b, c
```

  est une déclaration de variables. Elle spécifie que les identificateurs `a`, `b`, `c` désignent, dans la suite du bloc, trois variables capables de retenir chacune une valeur entière.

- Une instruction de la forme

```
c = a
```

  est une affectation. Son effet consiste à évaluer le membre de droite de l'opérateur `=`, et à en écrire la valeur dans la variable donnée par son membre de gauche. (Ici, la valeur de `a` est transférée dans `c`.)

- L'instruction

  `a = b % a`

  est également une affectation, mais la valeur à transférer dans la variable `a` est ici obtenue en évaluant l'expression

  `b % a`,

  qui calcule le reste de la division de `b` par `a`.

- `if` et `while` sont des mots-clés du langage, et désignent des instructions de contrôle:

  – L'instruction

  `if` (*expression* E)
  instruction I

  évalue l'expression E, et n'exécute l'instruction I que si cette expression est vraie (choix conditionnel).

– L'instruction

`while` (*expression* E)
instruction I

évalue l'expression E. Ensuite,

* si l'expression est vraie, alors l'instruction I est exécutée et le processus d'évaluation de l'expression E est répété,
* si l'expression est fausse, alors l'exécution de l'instruction **`while`** se termine.

- Les expressions

`a > b` et `a != 0`

testent respectivement si `a` possède une valeur supérieure à `b`, et si la valeur de `a` est non nulle.

- Les instructions

`printf( ... )` et `scanf( ... )`

ne correspondent pas à des mots-clés du langage, mais constituent des invocations de fonctions, c'est-à-dire qu'elles conduisent à exécuter du code externe au programme, disponible dans une bibliothèque (*library*):

  - `printf` permet d'afficher des valeurs sur la console,
  - `scanf` permet de lire des valeurs entrées au clavier.

- La ligne

```
#include <stdio.h>
```

n'est pas une instruction du langage, mais une directive de compilation indiquant au compilateur de consulter le fichier `stdio.h`, dans lequel sont définies les modalités d'utilisation des fonctions `printf` et `scanf`.

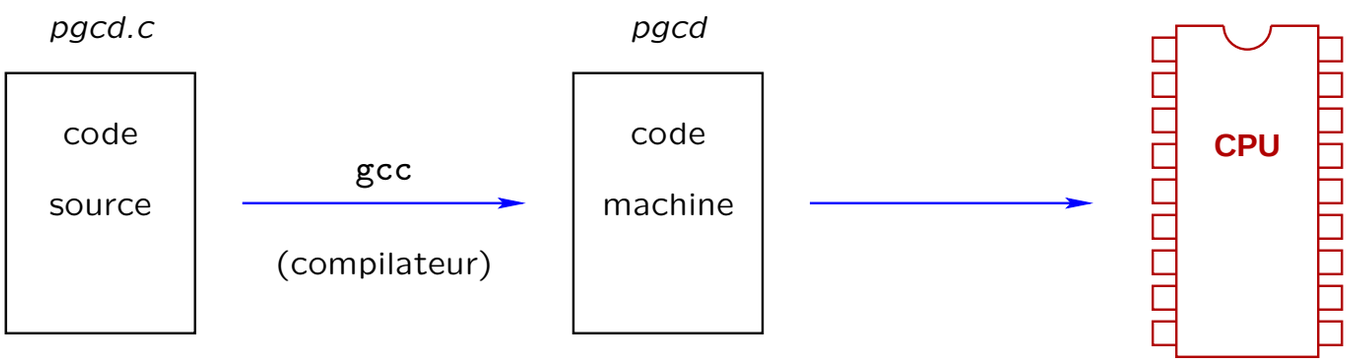
La compilation et l'exécution du programme

Principes:

- Un compilateur transforme le code source en code machine.
- Ce dernier peut être exécuté par le processeur.

Illustration (UNIX):

```
% gcc -o pgcd pgcd.c
% ./pgcd
Entrez deux entiers strictement positifs: 19675050 8178000
Le PGCD est égal à 4350.
```



Les ressources consommées

Nous avons vu que le problème de calculer le PGCD de deux nombres possède plusieurs solutions algorithmiques, présentant des coûts d'exécution très différents.

Dans la suite du cours, nous nous intéresserons à la complexité des algorithmes, qui vise à estimer

- le temps nécessaire à l'exécution d'un algorithme, et
- l'espace mémoire consommé.

En général, les complexités en temps et en espace sont calculées dans le pire des cas (c'est-à-dire, pour les instances les plus difficiles du problème). Il existe cependant également des notions de complexité moyenne.

Les limitations de l'informatique

Il est possible de démontrer que certains problèmes

- ne possèdent pas de solution algorithmique efficace, quelle que soit la solution choisie.

  Exemple: Déterminer si une formule de la théorie arithmétique additive des entiers est vraie ou non [Fischer & Rabin, 1974].

- n'admettent aucune solution algorithmique.

  Exemples:

  - Déterminer si une formule de la théorie arithmétique additive et multiplicative des entiers est vraie ou non [Gödel, 1931].
  - Déterminer si un programme fourni en entrée s'arrête ou non [Turing, 1936].
  - Déterminer si un polynôme à plusieurs variables possède ou non un zéro entier (dixième problème d'Hilbert) [Matiyasevich, Robinson, Davis & Putnam, 1970].

Chapitre 2

Les bases du langage C

Introduction

La forme la plus simple d'un programme C est la suivante:

```
int main()
{
   ...
}
```

Rappels:

- Une partie de code délimitée par des accolades `{ ... }` forme un bloc.
- Un bloc contient des instructions exécutables.
- Dans la plupart des cas, un bloc peut se substituer à une instruction exécutable (C est un langage structuré).

Remarques: Nous étudierons plus tard

- la signification exacte de la déclaration `int main()`,
- l'organisation de programmes plus complexes.

Les variables

Dans un programme, une variable désigne une zone de mémoire capable de retenir une valeur et de lui faire subir des opérations.

Une variable est caractérisée par

- un identificateur, qui permet d'y faire référence.

  En C, les identificateurs sont composés de lettres (`a`–`z`, `A`–`Z`, `_`) et de chiffres, et doivent commencer par une lettre. Les majuscules et les minuscules sont distinguées.

- un type, qui détermine
  - la quantité de mémoire associée à la variable,
  - la façon dont les valeurs de la variable sont encodées dans cette mémoire, et
  - les opérations permises sur cette variable.

Les types primitifs

Les types de base des variables sont les suivants:

`char`	Caractère, ou entier codé sur 8 bits
`int`	Entier
`float`	Nombre réel (IEEE 754 simple précision)
`double`	Nombre réel (IEEE 754 double précision)

Notes:

- La taille d'une variable de type `int` dépend de l'architecture utilisée. Sur un PC moderne (architecture x86-64), il s'agit souvent de 32 bits, ce qui signifie que les valeurs possibles forment l'intervalle

$$[-2^{31}, 2^{31} - 1].$$

- Les modificateurs `signed` et `unsigned` peuvent être appliqués aux types `char` et `int` afin de les rendre respectivement signés ou non signés.

Exemples:

- `unsigned char`: Valeur comprise entre 0 et 255.
- `unsigned int`: Valeur comprise entre 0 et $2^{32} - 1$ (x86-64).

- `signed` et `unsigned` employés seuls sont équivalents à `signed int` et `unsigned int`.
- Le type `int` est signé par défaut.
- Les modificateurs `short`, `long` et `long long` peuvent être appliqués au type `int` afin d'en modifier la taille.
  - Leur signification exacte dépend de l'architecture.
  - Ils peuvent être combinés avec `signed` ou `unsigned`.
  - Lorsqu'ils sont employés, l'écriture de `int` est facultative.

  Exemple: `unsigned long long`: Valeur comprise entre 0 et $2^{64} - 1$ (x86-64).
- Il existe également un type `long double`, correspondant à la précision étendue du standard IEEE 754.

La déclaration des variables

Une déclaration de variables est une instruction qui définit l'identificateur et le type d'une ou de plusieurs variables. En C, les variables doivent toujours être déclarées avant d'être utilisées.

Syntaxe:

```
[ const ] type identificateur [ = valeur ]
          [ , identificateur [ = valeur ] ]
                    ⋮
          [ , identificateur [ = valeur ] ] ;
```

Notes:

- Dans cette description de la syntaxe, les crochets *[...]* indiquent des éléments optionnels.
- Le mot-clé `const` permet de définir des variables dont la valeur ne peut pas être modifiée.

Exemples:

```
int             i = 0, j = -1, k;
unsigned long   code_barre;
char            symbole = 'a', marqueur = '\n';
const double    avogadro = 6.02214179e23;
```

Remarque: Lors de l'écriture d'un programme, on veillera à choisir des noms de variables qui

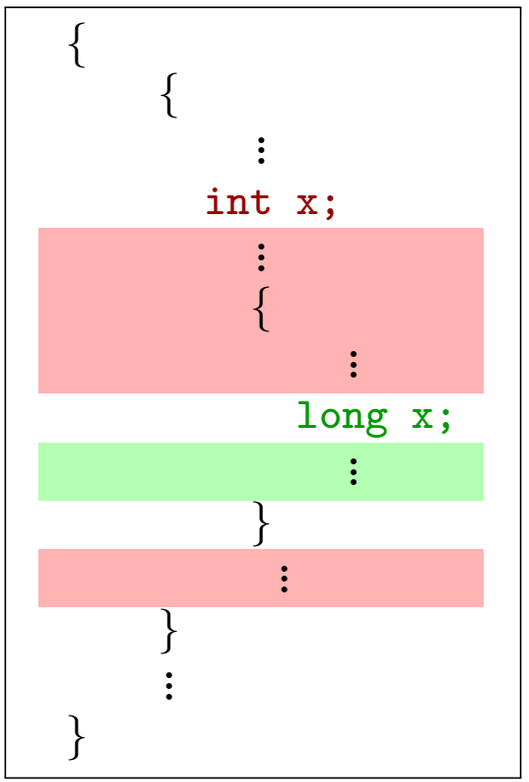
- décrivent clairement l'usage qui en est fait, et
- sont cohérents.

La portée d'une déclaration

À l'intérieur d'un bloc, une déclaration de variable

- est effective immédiatement, et jusqu'à la fin du plus petit bloc B contenant cette déclaration;
- masque les déclarations de variables de même nom situées dans des blocs extérieurs à B.

Illustration:



Note: Pour améliorer la lisibilité des programmes, il est conseillé de déclarer les variables au début des blocs.

(Cette contrainte n'est cependant pas imposée par le langage.)

Les expressions

Les expressions sont des formes particulières d'instructions exécutables, qui spécifient comment calculer une valeur. Une expression peut être

- une variable, dénotée par son identificateur. L'évaluation de l'expression retourne alors la valeur courante de cette variable.

  Exemple: `avogadro`.

- une constante, ou *littéral*.

  Exemples: `3.142592654`, `'a'`.

- obtenue par l'application d'opérateurs à d'autres expressions.

  Exemple: `(4.0 / 3.0) * pi * r * r * r`.

Les opérateurs arithmétiques

Ces opérateurs sont les suivants:

`+`	Addition
`-`	Soustraction
`*`	Multiplication
`/`	Division
`%`	Reste de la division (modulo)

Remarques:

- La nature de l'opération diffère selon le type des opérandes.

  Exemple:

  `2 / 3` $\longrightarrow$ 0
  `2.0 / 3.0` $\longrightarrow$ 0,666666...

- L'opérateur de modulo n'est applicable qu'à des entiers.

- La priorité des opérateurs suit les règles classiques de l'algèbre. Des parenthèses peuvent également être utilisées pour indiquer l'ordre d'évaluation.

  Exemple: `a * a + b * b` est équivalent à `(a * a) + (b * b)`.

- Les opérateurs `+` et `-` possèdent également une forme unaire.

Les opérateurs de comparaison

Ces opérateurs permettent de comparer deux valeurs:

<	Plus petit que
>	Plus grand que
<=	Plus petit ou égal à
>=	Plus grand ou égal à
==	Égal à
!=	Différent de

Notes:

Ces opérateurs retournent des valeurs booléennes, c'est-à-dire *vraies* ou *fausses*.

En langage C, *vrai* est représenté par une valeur entière non nulle, et *faux* par la valeur entière 0.

(Les versions récentes du langage incluent également un type de base spécifique pour les valeurs booléennes.)

Les opérateurs booléens

Ces opérateurs correspondent à des opérations logiques:

`&&`	Et logique
`||`	Ou logique
`!`	Négation (opérateur unaire)

Exemples:

- L'expression `c >= 'a' && c <= 'z'` est vraie si et seulement si la variable `c` contient une lettre minuscule.
- Les expressions `!(x >= 1000)` et `x < 1000` sont équivalentes (pour `x` entier).

Remarque importante: Les opérandes des opérateurs `&&` et `||` sont évaluées de gauche à droite et en circuit court.

Cela signifie que l'évaluation des opérandes cesse dès que la valeur de l'expression peut être déterminée.

Exemple:

Lors de l'évaluation de l'expression

```
n != 0 && m / n > 1
```

,

le quotient `m / n` n'est calculé que si `n` est non nulle, ce qui évite une division par zéro.

Les opérateurs d'affectation

L'opérateur `=` permet d'affecter une valeur à une variable.

- Son membre de gauche contient l'identificateur de cette variable ("*valeur à gauche*").
- L'évaluation de son membre de droite fournit la nouvelle valeur à attribuer à la variable.
- Après l'opération d'affectation, l'expression elle-même devient égale à la valeur qui a été affectée.

Exemples:

- `x = x + 2` incrémente la valeur de `x` de deux unités.
- `(a = b) < 10` recopie la valeur de `b` dans `a`, et teste ensuite si cette valeur est inférieure à 10.
- `i = j = k = 0` initialise à zéro les trois variables `i`, `j` et `k`.

Les opérateurs `+=`, `-=`, `*=`, `/=` et `%=` permettent des raccourcis d'écriture: L'expression

$$\boxed{\textit{var}\ \alpha{=}\ \textit{expr}},$$

avec $\alpha \in \{+, -, *, /, \%\}$, est équivalente à l'expression

$$\boxed{\textit{var} = \textit{var}\ \ \alpha\ \ \textit{expr}}.$$

Exemple: Les expressions `x += 2` et `x = x + 2` sont équivalentes.

Les opérateurs d'incrément et de décrément

Les opérateurs `++` et `--` sont des opérateurs unaires, dont l'opérande est une valeur à gauche (p. ex., un identificateur de variable). Ces opérateurs peuvent être placés à droite ou à gauche de leur opérande.

- *Si l'opérateur est placé à droite:* La variable est incrémentée (`++`) ou décrémentée (`--`) d'une unité. La valeur de l'expression correspond à celle de la variable avant l'opération.
- *Si l'opérateur est placé à gauche:* Idem, mais la valeur de l'expression correspond à celle de la variable après l'opération d'incrément ou de décrément.

Exemples: (Initialement, `x = y = 0` dans chaque cas.)

- `x = y++` $\longrightarrow$ `x` garde la valeur 0 et `y` devient égal à 1.
- `x = --y` $\longrightarrow$ `x` et `y` deviennent égaux à -1.

Remarques:

- À l'aide de ces opérateurs, il est possible d'écrire des expressions syntaxiquement correctes, mais dont la sémantique n'est pas définie.

  Exemple: `x = --x + x++`

  De telles constructions n'ont pas d'utilité et sont à éviter!

- Dans les expressions combinant ces opérateurs avec des opérateurs booléens, l'évaluation en circuit court de ces derniers influence le résultat.

  Exemple: L'expression `x > 0 && --x`

  – ne décrémente `x` que si cette variable est strictement positive.

  – retourne une valeur vraie si et seulement si `x` est initialement strictement supérieure à 1.

L'opérateur virgule

Dans certains cas, on souhaite effectuer plusieurs évaluations, dans un ordre donné, au sein d'une même expression.

L'opérateur `,` est un opérateur binaire qui évalue ses opérandes de gauche à droite, et prend la valeur et le type de son opérande de droite.

Exemple: (Initialement, `x = y = 0`.)

`x = (y++, y++)` $\longrightarrow$ `x` prend la valeur 1 et `y` devient égal à 2.

Remarque: L'opérateur `,` possède une priorité inférieure à celle de l'opérateur `=`. Dans l'expression précédente, les parenthèses sont donc nécessaires.

La conversion de type

Il est parfois permis d'affecter à une variable d'un certain type t_1 une valeur v d'un autre type t_2. C'est notamment le cas si t_1 et t_2 sont des types numériques.

Une conversion de la valeur v vers le type t_1 est alors effectuée.

Exemple:

```
double p = 3.1416;
int x;

x = p;   ⟶   x prend la valeur 3.
```

Il existe également un opérateur permettant d'effectuer une conversion explicite de type (*casting*).

Syntaxe:

(*type*) *expr* ,

où *expr* fournit la valeur à convertir vers le type *type*.

Exemple:

```
double a = 2.0, b = 3.0, x, y;

x = a / b;   ⟶   x prend la valeur 0,666666...
y = (int) a / (int) b;   ⟶   y prend la valeur 0.
```

Les expressions conditionnelles

Une expression E de la forme

cond ? *expr1* : *expr2*

s'évalue de la façon suivante:

- La condition *cond* est d'abord évaluée en une valeur booléenne.
- Si cette valeur est vraie, alors *expr1* est évaluée, et l'expression E en prend la valeur.
- Si cette valeur est fausse, alors *expr2* est évaluée, et l'expression E en prend la valeur.

Exemples:

- `max = (a > b) ? a : b`
- `incr_x ? x++ : y++`

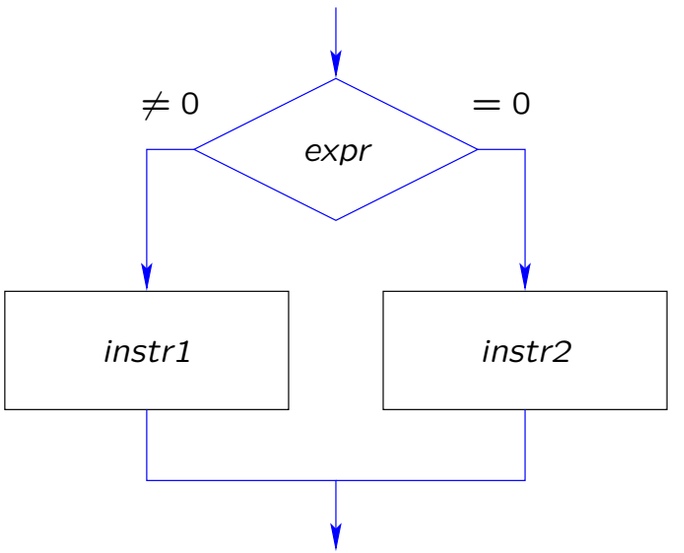
Le choix conditionnel binaire

L'instruction `if` est une instruction de contrôle qui permet d'orienter l'exécution du code selon l'évaluation d'une condition booléenne.

Syntaxe:

```
if (expr)
  instr1;
[ else
  instr2; ]
```

Sémantique:



- La condition *expr* est d'abord évaluée.
- Si cette condition est vraie, alors l'instruction *instr1* est exécutée.
- Sinon (et si la clause `else` est présente), l'instruction *instr2* est exécutée.

Remarques:

- Les instructions *instr1* et *instr2* peuvent prendre la forme d'autres instructions de contrôle, ou être remplacées par des blocs.
- Une clause `else` se rapporte à l'instruction `if` la plus proche appartenant au même bloc.

  Il s'agit d'une source d'erreur fréquente!

Illustration:

```
if (expr1)
    if (expr2)
        {
            ⋮
        }
else
    {
        ⋮
    }
```

Dans ce cas, la clause `else` se rapporte à la deuxième instruction `if`, contrairement à ce que l'indentation laisse supposer . . .

Version correcte:

```
if (expr1)
  {
    if (expr2)
        {
            ⋮
        }
  }
else
      ⋮
```

Exemple: Programme déterminant si une année est bissextile ou non:

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  int annee, est_bissextile;

  printf("Entrez une année: ");
  scanf("%d", &annee);

  if (!(annee % 400))
    est_bissextile = 1;
  else
    if (!(annee % 100))
      est_bissextile = 0;
    else
      est_bissextile = !(annee % 4);

  printf("Cette année ");

  if (est_bissextile)
    printf("est");
  else
    printf("n'est pas");

  printf(" bissextile.\n");
}
```

Le choix conditionnel multiple

L'instruction `switch` permet d'effectuer un choix possédant un nombre quelconque de branches.

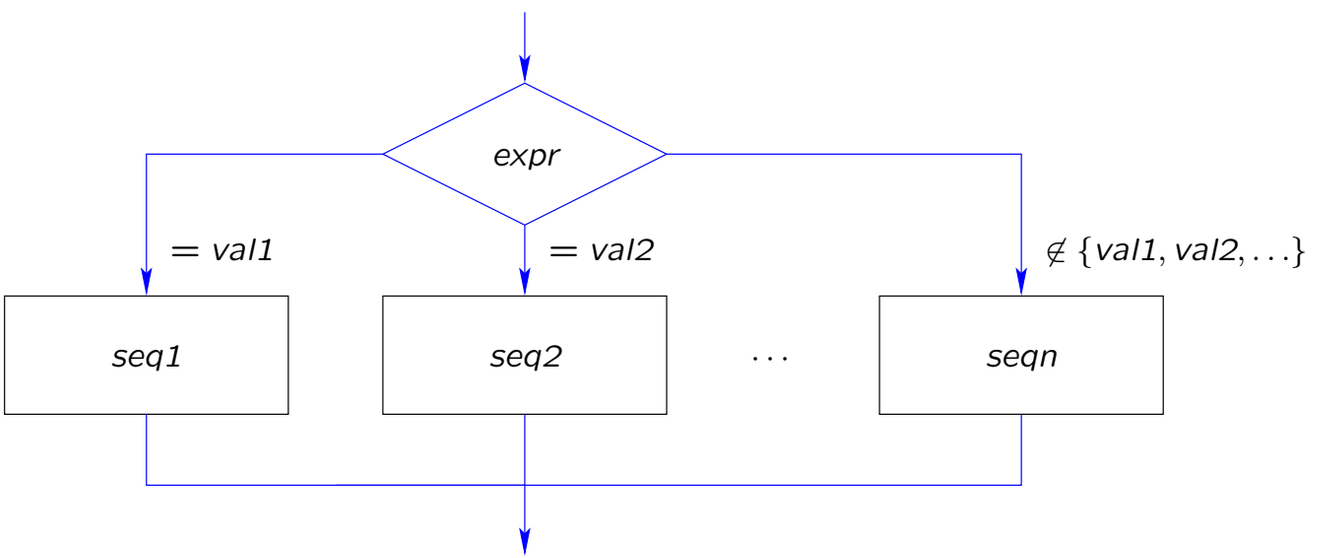
Syntaxe:

```
switch (expr)
  {
    case val1:
      seq1;
      break;
    case val2:
      seq2;
      break;
        ⋮
  [ default:
      seqn; ]
  }
```

Notes:

- *expr* est une expression de type entier ou caractère.
- *val1*, *val2*, ... sont des constantes du même type que *expr*.
- *seq1*, *seq2*, ..., *seqn* sont des séquences d'instructions exécutables.

Sémantique:



- L'expression *expr* est d'abord évaluée.
- Si la valeur de cette expression est égale à une des constantes *val1*, *val2*, . . . , alors l'exécution se poursuit après la clause `case` correspondante.
- Sinon l'exécution continue après la clause `default`, si celle-ci est présente. (Dans le cas contraire, le choix multiple se termine.)
- L'exécution d'une instruction `break` termine immédiatement l'exécution de l'instruction de choix multiple.

Remarques:

- Les instructions `break` sont facultatives, mais souvent utiles.

  Lorsqu'elles sont absentes, l'exécution se poursuit à la clause suivante, au lieu de terminer l'instruction `switch`.
- Une instruction `switch` est généralement plus efficace qu'un grand nombre d'instructions `if` imbriquées.

Exemple: Description d'une carte à jouer.

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  int carte;

  printf("Entrez un nombre entre 1 et 13: ");
  scanf("%d", &carte);

  printf("Cette carte est ");

  switch (carte)
  {
    case 1:
      printf("un as");
      break;

    case 2:
    case 3:
    case 4:
    case 5:
    case 6:
    case 7:
    case 8:
    case 9:
    case 10:
```

```
      printf("un %d", carte);
      break;

    case 11:
      printf("un valet");
      break;

    case 12:
      printf("une dame");
      break;

    case 13:
      printf("un roi");
      break;

    default:
      printf("invalide");
  }

  printf(".\n");
}
```

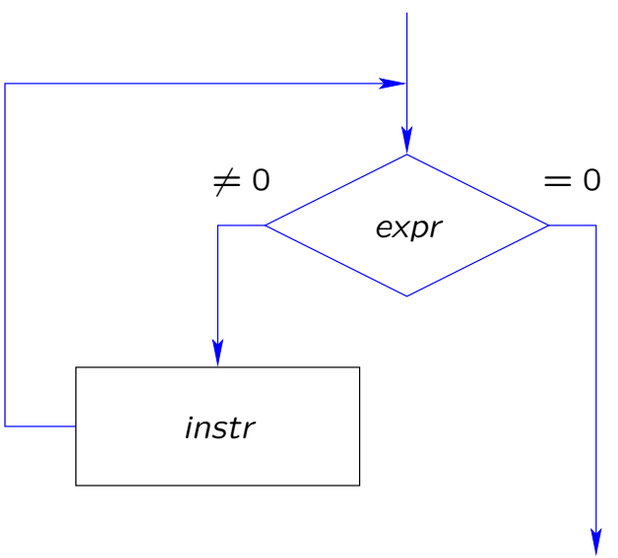
Les instructions de boucle

L'instruction `while` permet d'itérer une instruction tant qu'une condition est satisfaite. Cette condition est évaluée avant chaque itération.

Syntaxe:

```
while (expr)
instr;
```

Sémantique:

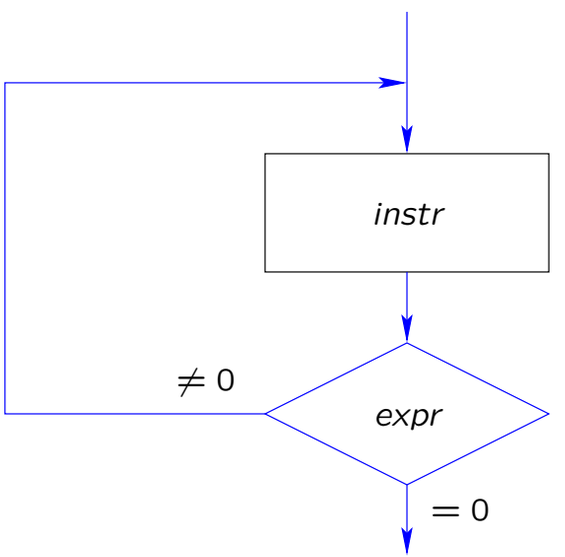


L'instruction `do ... while` est similaire, mais évalue la condition permettant de poursuivre l'itération après celle-ci.

Syntaxe:

```
do
    instr;
while (expr);
```

Sémantique:



L'instruction `for` permet de programmer une boucle en spécifiant explicitement les opérations à effectuer

- avant de rentrer dans cette boucle (*expr1*),
- afin de décider s'il faut ou non continuer à itérer la boucle (*expr2*),
- entre deux itérations (*expr3*), et
- dans le corps de la boucle (*instr*).

Syntaxe:

```
for (expr1; expr2; expr3)
    instr;
```

Sémantique: Cette instruction est équivalente à

```
{
  expr1;
  while (expr2)
    {
      instr;
      expr3;
    }
}
```

Notes:

- Les expressions *expr1* et *expr3* ainsi que l'instruction *instr* sont optionnelles.
- L'expression *expr2* peut également être omise, auquel cas elle est considérée comme étant toujours vraie.

  L'instruction suivante implémente donc une boucle infinie:

```
for (;;);
```

- Dans les versions modernes du langage C, *expr1* peut être remplacée par une déclaration de variable.
- L'instruction *instr* peut bien sûr être remplacée par un bloc.

Exemple: Générateur de tables de multiplication.

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  unsigned i, j;

  for (i = 1; i <= 9; i++)
    {
      printf("\nTable pour %d\n", i);
      printf("=============\n\n");

      for (j = 1; j <= 9; j++)
        printf("%d x %d = %d\n", j, i, i * j);
    }
}
```

Les instructions de rupture de séquence

- Nous avons vu que l'instruction `break` permet de terminer immédiatement l'exécution d'une instruction `switch`.

  Cette instruction `break` peut également être employée dans le corps d'une instruction `while`, `do ... while` ou `for`, afin de sortir anticipativement de la boucle.

  Exemple:

```
for (i = 0;; i++)
  if (i > 100)
    break;
```

- Dans le corps d'une instruction `while`, `do ... while` ou `for`, l'instruction `continue` permet quant à elle de passer immédiatement à l'itération suivante.

Remarque: Les instructions `break` et `continue` se rapportent toujours à l'instruction d'itération la plus proche.

Exemple:

```
for (i = 0; i < 100; i++)
  for (j = 1; j < i; j++)
    {
      if (!(i % j))
        continue;
       ⋮
    }
```

Les commentaires

Un programme n'est pas uniquement destiné à être traité par un ordinateur, mais doit également être lisible pour les programmeurs, qui sont fréquemment amenés à modifier ou compléter du code existant. Il est donc souvent utile d'y inclure des commentaires.

En langage C, les commentaires sont délimités par les marqueurs `/*` et `*/`. Leur contenu est ignoré par le compilateur.

(Les versions récentes du langage permettent également d'inclure des commentaires commençant par `//` et se terminant par un saut de ligne.)

Exemple:

```
/* Position de l'objet */

double x, y;  // Coordonnées
double h;     // Hauteur
```

Chapitre 3

Quelques notions d'algorithmique

Exemple de problème: Recherche de nombres parfaits

Définition: Un nombre entier positif est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs (excepté lui-même).

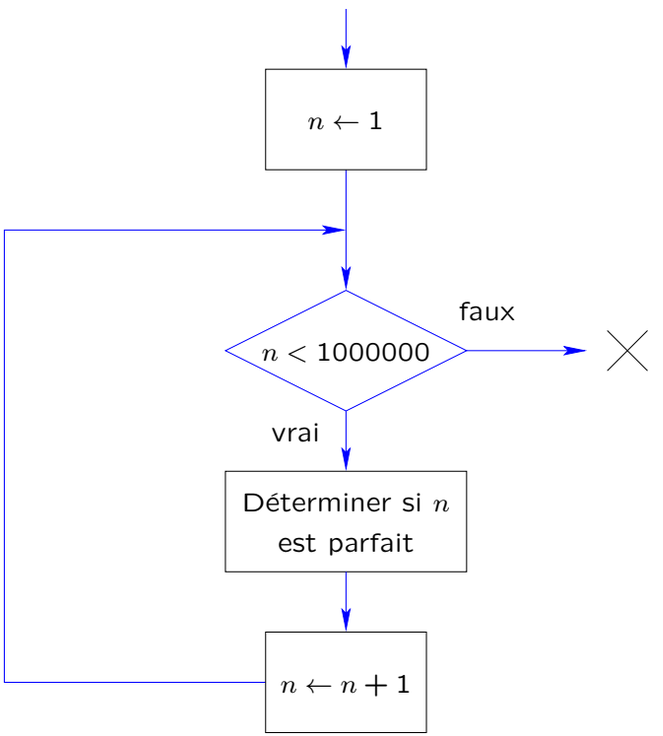
Exemple: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Énoncé du problème: Rechercher tous les nombres parfaits appartenant à un intervalle donné (p. ex., ceux inférieurs à 10^6).

Décomposition du problème

Approche: On peut distinguer deux sous-problèmes qui peuvent être résolus séparément:

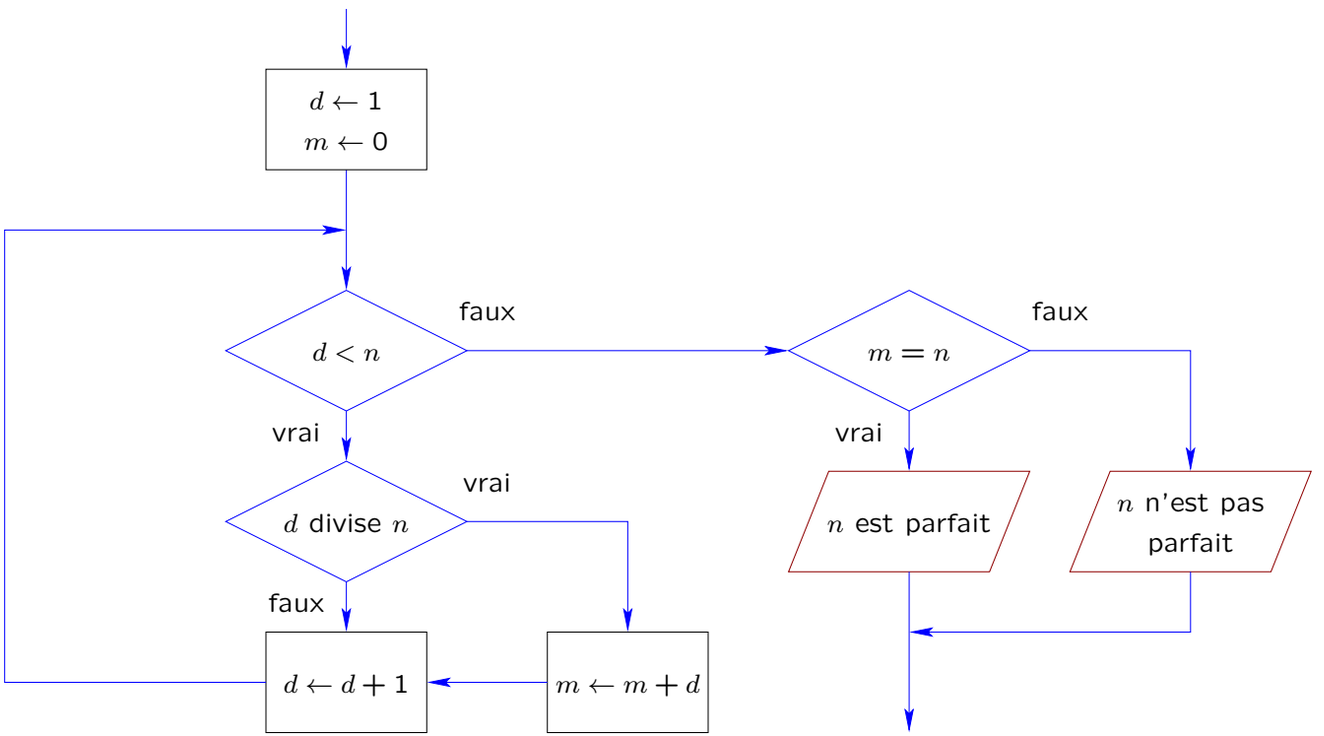
- Énumérer toutes les valeurs `n` appartenant à l'ensemble de recherche $[1, 10^6 - 1]$.
- Pour une valeur `n` donnée, déterminer si elle constitue ou non un nombre parfait.



Déterminer si un nombre `n` est parfait

Première solution: On peut explicitement:

- Énumérer les diviseurs `d` de `n`, en envisageant successivement tous les candidats possibles: 1, 2, . . . , $n - 1$.
- Calculer la somme `m` de ces diviseurs.
- Comparer cette somme avec la valeur de `n`.



Traduction en C

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  const unsigned  n_max = 999999;

  unsigned  n, m, d;

  for (n = 1; n <= n_max; n++)
    {
      for (d = 1, m = 0; d < n; d++)
        if (!(n % d))
          m += d;

      if (m == n)
        printf("%d\n", n);
    }
}
```

Améliorations possibles

- Tous les nombres entiers sont divisibles par 1.

  On peut donc commencer l'énumération des diviseurs à `d` $= 2$, en initialisant `m` à 1.

  Note: Il est alors nécessaire de commencer la recherche à `n` $= 2$, afin d'exclure le nombre 1 qui n'est pas parfait.

- Pour une valeur donnée de n, le plus grand diviseur à considérer est égal à $\lfloor n/2 \rfloor$.

- Lorsque la valeur de `m` dépasse celle de `n`, on peut arrêter l'énumération des diviseurs pour la valeur courante de `n`.

Traduction en C (version 2)

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  const unsigned  n_max = 999999;

  unsigned  n, m, d;

  for (n = 2; n <= n_max; n++)
    {
      for (d = 2, m = 1; d <= n / 2 && m <= n; d++)
        if (!(n % d))
          m += d;

      if (m == n)
        printf("%d\n", n);
    }
}
```

Amélioration supplémentaire

Observation: Si $\mathtt{d}$ est un diviseur de $\mathtt{n}$, alors $\frac{\mathtt{n}}{\mathtt{d}}$ l'est également.

On peut donc énumérer tous les diviseurs de $\mathtt{n}$ (exceptés 1 et $\mathtt{n}$) de la façon suivante:

- Considérer toutes les valeurs de $\mathtt{d}$ dans l'intervalle $[2, \lfloor\sqrt{\mathtt{n}}\rfloor]$ qui divisent $\mathtt{n}$.
- Pour chacune de ces valeurs de $\mathtt{d}$, considérer également le diviseur $\mathtt{d}' = \frac{\mathtt{n}}{\mathtt{d}}$.

Remarque: Si $\mathtt{n}$ est un carré parfait, alors il faut veiller à ne pas considérer deux fois le diviseur $\mathtt{d} = \mathtt{d}' = \sqrt{\mathtt{n}}$.

Traduction en C (version 3)

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  const unsigned  n_max = 999999;

  unsigned  n, m, d, d2;

  for (n = 2; n <= n_max; n++)
    {
      for (d = 2, m = 1; d * d <= n && m <= n; d++)
        if (!(n % d))
          {
            m += d;
            d2 = n / d;
            if (d2 != d)
              m += d2;
          }

      if (m == n)
        printf("%d\n", n);
    }
}
```

Comparaison des performances

Résultats expérimentaux: (Intel Core i7-9750H 2,60 GHz)

`n_max`	Temps d'exécution		
	version 1	version 2	version 3
999	0,95 ms	0,47 ms	58 μs
9999	93 ms	45 ms	1,4 ms
99999	9,2 s	4,4 s	37 ms
999999	930 s	447 s	1,1 s
9999999	$>$ 1 h	$>$ 1 h	33 s
99999999	$>$ 1 h	$>$ 1 h	1061 s

Observations: On constate que les versions 1 et 2 présentent un comportement similaire, mais que la version 3 est considérablement meilleure.

La complexité en temps

Objectif: Évaluer le temps de calcul nécessaire à l'exécution d'un programme

- en fonction de la taille des données d'entrée (dans notre exemple, la valeur de `n_max`),
- pour de grandes instances du problème,
- si plusieurs exécutions sont possibles, dans le cas le plus défavorable (*worst case*),
- de façon indépendante de la plate-forme d'exécution.

Solution:

- On compte le nombre d'instructions élémentaires exécutées par le programme, le temps d'exécution individuel de chacune de ces instructions étant supposé borné.
- On exprime le résultat dans la notation "grand-O".

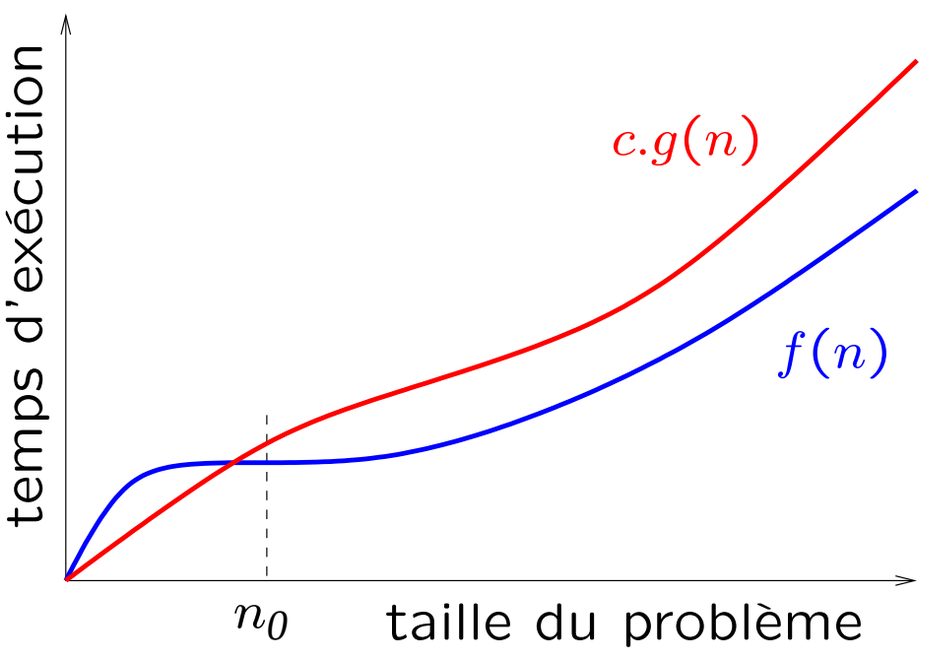
La notation asymptotique "grand-O"

Définition: Soient f et g deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. On a

$$f \in O(g) \text{ (par abus d'écriture: } f(n) \in O(g(n))\text{)}$$

ssi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, c \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \forall n > n_0 :\ f(n) \leq c.g(n).$$



Propriétés de la notation "grand-O"

- Si $f(n) \in O(g(n))$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $k.f(n) \in O(g(n))$.

  En particulier:

$$\begin{aligned} a^{n+b} &\in O(a^n) \quad \text{(pour } a > 0\text{)} \\ \log_a(n) &\in O(\log_b(n)) \quad \text{(pour } a > 1 \text{ et } b > 1\text{)}. \end{aligned}$$

- Si $e(n)$, $f(n) \in O(g(n))$, alors $e(n) + f(n) \in O(g(n))$.

  En particulier:

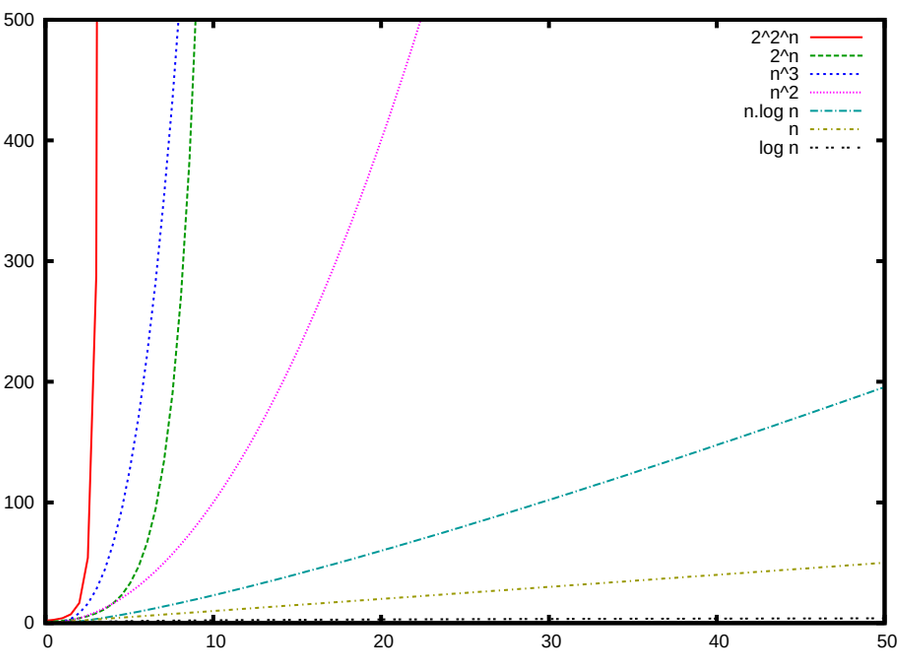
$$\sum_{i=1}^{m} a_i n^i \in O(n^m) \quad \text{(pour } a_m > 0\text{)}.$$

- Si $e(n) \in O(g(n))$ et $f(n) \in O(h(n))$, alors $e(n).f(n) \in O(g(n).h(n))$.

Une hiérarchie de classes de complexité

On a :

$$
\begin{aligned}
O(1) \subset\ & O(\log\log n) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n\log n) \\
\subset\ & O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(n^4) \subset \cdots \\
\subset\ & O(2^n) \subset O(2^{2^n}) \subset O(2^{2^{2^n}}) \subset \cdots \\
\subset\ & O(2^{2^{2^{\cdots}\}n}}) \subset \cdots
\end{aligned}
$$



Application

Question: Quelle est la complexité en temps du programme de recherche de nombres parfaits (version 1)?

Solution: Établissons un inventaire des instructions exécutées par le programme:

- Certaines instructions ne sont exécutées qu'une seule fois: déclarations de `n_max`, `n`, `m`, `d`, affectation `n = 1`:

$$O(1).$$

- D'autres instructions sont quant à elles exécutées `n_max` ou `n_max` $+ 1$ fois: `n <= n_max`, `d = 1`, `m = 0`, `n++`:

$$O(\texttt{n\_max}).$$

- Les instructions restantes sont exécutées au plus $1 + 2 + 3 + \cdots$ $\cdots +$ `n_max` fois:

$$O(\frac{\texttt{n\_max}(\texttt{n\_max} + 1)}{2}) = O(\texttt{n\_max}^2).$$

Réponse: La complexité en temps du programme vaut donc

$$O(1 + \texttt{n\_max} + \texttt{n\_max}^2) = O(\texttt{n\_max}^2).$$

En appliquant le même raisonnement aux versions améliorées du programme, on obtient:

- Version 2: $O(\texttt{n\_max}^2)$,
- Version 3: $O(\texttt{n\_max}\sqrt{\texttt{n\_max}}) = O(\texttt{n\_max}^{1,5})$.

L'analyse d'un programme

Question: Comment peut-on garantir qu'un programme est correct?

Réponse: On peut analyser certaines propriétés d'un programme en écrivant et en démontrant des triplets de la forme

$$\{P\}\, S\, \{Q\},$$

où

- S est un fragment de code exécutable,
- P est une précondition, et
- Q est une postcondition.

Principes:

- P et Q sont des assertions (c'est-à-dire des formules s'évaluant en une valeur booléenne), qui peuvent faire intervenir
  - la valeur courante des variables et des constantes du programme analysé,
  - les données d'entrée et de sortie de ce programme.
- Le triplet $\{P\}\, S\, \{Q\}$ est valide si et seulement si, dans tous les cas où P est vrai, alors après l'exécution de S, Q est également vrai.

  Exemples:

  - $\{10 \leq \mathtt{x} \leq 20\}$ `x++;` $\{11 \leq \mathtt{x} \leq 21\}$.
  - $\{\mathtt{x} \in [-2^{31}, 2^{31} - 1]\}$ `if (x < 0) x = 0;` $\{\mathtt{x} \in [0, 2^{31} - 1]\}$.
  - $\{\mathbf{V}\}$ `(n'importe quel code)` $\{\mathbf{V}\}$.
  - $\{\mathbf{V}\}$ `for (;;);` $\{\mathbf{F}\}$.
  - $\{\mathbf{F}\}$ `(n'importe quel code)` $\{$ n'importe quelle assertion $\}$.

- Il est souvent pratique d'utiliser des notations différentes pour la valeur d'une variable avant ($\mathtt{x}$) et après ($\mathtt{x}'$) l'exécution de S.

  Exemple:

$$\{\ \mathbf{V}\ \}\quad \texttt{x++;}\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathtt{x}' = \mathtt{x} + 1 & \text{si } \mathtt{x} < 2^{31} - 1 \\ \mathtt{x}' = -2^{31} & \text{si } \mathtt{x} = 2^{31} - 1 \end{array}\right\}$$

Notes:

- Pour analyser un programme S, on cherchera à démontrer un triplet $\{P\}\, S\, \{Q\}$ dans lequel P décrit les contraintes initiales imposées aux données d'entrée, et Q permet de déduire la propriété souhaitée du programme.
- L'utilisation de triplets permet de prouver qu'un programme fournit des résultats corrects à condition qu'il se termine *(correction partielle)*.

  Une autre technique sera employée pour prouver la terminaison du programme.
- Pour démontrer un triplet $\{P\}\, S\, \{Q\}$ dans le cas où S contient une boucle, on s'aidera d'un invariant de boucle, qui est une assertion vraie avant et après chaque itération.

Illustration: Recherche de nombres parfaits (v2)

Commençons par analyser la partie du programme chargée de déterminer si un nombre `n` donné est parfait ou non.

En d'autres termes, il s'agit de démontrer le triplet suivant:

$$\{\texttt{n} \geq 2\}$$

```
for (d = 2, m = 1; d <= n / 2 && m <= n; d++)
  if (!(n % d))
    m += d;
```

$$\{\texttt{m} = \texttt{n} \Leftrightarrow \texttt{n} \text{ est un nombre parfait}\}$$

En exécutant l'instruction d'initialisation de la boucle `for`, le problème se réduit à établir

$$\{\mathtt{n} \geq 2, \mathtt{d} = 2, \mathtt{m} = 1\}$$

```
for (; d <= n / 2 && m <= n; d++)
  if (!(n % d))
    m += d;
```

$\{\mathtt{m} = \mathtt{n} \Leftrightarrow$ `n` est un nombre parfait$\}$,

que l'on peut réécrire

$$\{\mathtt{n} \geq 2, \mathtt{d} = 2, \mathtt{m} = 1\}$$

```
while (d <= n / 2 && m <= n)
  {
    if (!(n % d))
      m += d;
    d++;
  }
```

$\{\mathtt{m} = \mathtt{n} \Leftrightarrow$ `n` est un nombre parfait$\}$.

Essayons maintenant de trouver un invariant de boucle I.

Cahier des charges:

- I doit être impliqué par la précondition

$$\texttt{n} \geq 2, \texttt{d} = 2, \texttt{m} = 1.$$

- I doit être vrai avant et après chaque itération de la boucle (c'est-à-dire, au moment d'évaluer son *gardien* `d <= n / 2 && m <= n`).
- À la sortie de la boucle `while`, la postcondition

$$\{\texttt{m} = \texttt{n} \Leftrightarrow \texttt{n} \text{ est un nombre parfait}\}$$

  doit être une conséquence de I.

Solution:

I : $\texttt{n} \geq 2$, $\texttt{d} \leq \left\lfloor \frac{\texttt{n}}{2} \right\rfloor + 1$, et $\texttt{m}$ = somme des diviseurs de $\texttt{n}$ inférieurs à $\texttt{d}$.

Justifications:

- On a bien $\mathtt{n} \geq 2, \mathtt{d} = 2, \mathtt{m} = 1 \Rightarrow I$, car quel que soit $\mathtt{n} \geq 2$, le seul diviseur de `n` qui est strictement inférieur à 2 est 1.
- I est un invariant de boucle, car on a

$$\{I\}$$

```
if (d <= n / 2 && m <= n)
  {
    if (!(n % d))
      m += d;
    d++;
  }
```

$$\{I\}.$$

En effet:

– si $\mathtt{d} > \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor$ ou $\mathtt{m} > \mathtt{n}$, alors ce triplet se réduit à $\{I\}$; $\{I\}$ qui est trivialement valide.

– si $\mathtt{d} \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor$ et $\mathtt{m} \leq \mathtt{n}$, alors il reste à démontrer:

$$\{I,\ \mathtt{d} \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor,\ \mathtt{m} \leq \mathtt{n}\}$$

```
if (!(n % d))
  m += d;
d++;
```

$$\{I\}.$$

L'exécution de ce fragment de code remplace la valeur de d par $\mathtt{d}' = \mathtt{d} + 1$, qui satisfait bien

$$\mathtt{d}' \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Il y a deux cas d'exécution possibles:

* Si d divise n, alors

$$\{I,\ \mathtt{d} \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor,\ \mathtt{d}\ \text{divise}\ \mathtt{n}\}\ \mathtt{m\ +=\ d;\ d{+}{+};}\ \{I\},$$

car

(somme des diviseurs de n inf. à d') = (somme des diviseurs de n inf. à d) + d.

∗ Si `d` ne divise pas `n`, alors

$$\{I,\ \mathtt{d} \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor,\ \mathtt{d} \text{ ne divise pas } \mathtt{n}\}\ \mathtt{d{+}{+};}\ \{I\},$$

car

(somme des diviseurs de `n` inf. à `d'`) = (somme des diviseurs de `n` inf. à `d`).

- À la sortie de la boucle `while`, on a

$$I \text{ et } (\mathtt{d} > \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor \text{ ou } \mathtt{m} > \mathtt{n}).$$

En d'autre termes, on a

– soit I et $\mathtt{d} > \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor$. Dans ce cas, on a nécessairement

$$d = \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor + 1 \leq \mathtt{n},$$

et `m` est égal à la somme des diviseurs de `n` inférieurs à `n`. Donc, $\mathtt{m} = \mathtt{n}$ ssi `n` est un nombre parfait (postcondition).

– soit I et $\mathtt{m} > \mathtt{n}$. Alors, la somme des diviseurs de `n` (hormis `n`) est supérieure à `n`. Donc, $\mathtt{m} \neq \mathtt{n}$ et `n` n'est pas un nombre parfait (et la postcondition est satisfaite).

Résumé: On vient donc d'établir que le triplet suivant est valide:

$$\{\texttt{n} \geq 2\}$$

```
for (d = 2, m = 1; d <= n / 2 && m <= n; d++)
  if (!(n % d))
    m += d;
```

$$\{\texttt{m} = \texttt{n} \Leftrightarrow \texttt{n} \text{ est un nombre parfait}\}$$

On en déduit que le code suivant détermine correctement si un nombre $\texttt{n} \geq 2$ est parfait ou non:

```
for (d = 2, m = 1; d <= n / 2 && m <= n; d++)
  if (!(n % d))
    m += d;

if (m == n)
  printf("%d\n", n);
```

Remarque: Le même procédé peut servir à démontrer que la boucle principale

```
for (n = 2; n <= n_max; n++)
  {
    /*  Traitement de n  */
  }
```

explore correctement toutes les valeurs de `n` dans l'intervalle $[2, \texttt{n\_max}]$. Il suffit en effet

- de considérer une variable fictive T représentant l'ensemble des valeurs déjà traitées,
- de poser la précondition $\texttt{n\_max} \geq 2$ et $T = \{\,\}$ et la postcondition $T = [2, \texttt{n\_max}]$,
- d'utiliser comme invariant de boucle l'assertion

$$\texttt{n} \leq \texttt{n\_max} + 1 \text{ et } T = [2, \texttt{n} - 1].$$

La terminaison d'un programme

La validité d'un triplet $\{P\}\ S\ \{Q\}$ n'implique pas que l'exécution du fragment de code S se termine.

Pour démontrer qu'un programme se termine, il faut prouver qu'il finit toujours par sortir de toutes ses boucles.

Un procédé simple consiste à munir chaque instruction de boucle d'un variant de boucle (ou fonction de terminaison), qui est une expression possédant les propriétés suivantes:

- Elle ne dépend que des variables et constantes du programme, et est évaluée avant chaque itération de la boucle.
- Sa valeur est un entier naturel, qui décroît strictement à chaque itération de la boucle.

Étant donné qu'il n'existe pas de séquence infinie d'entiers naturels strictement décroissants, la seconde propriété entraîne nécessairement la terminaison de la boucle considérée.

Remarques:

- Si une boucle possède un variant valide, alors elle se termine. Mais l'inverse n'est pas vrai: Il existe des boucles dont l'exécution se termine toujours et qui n'admettent pas de variant (sous la forme où nous l'avons défini).
- De façon plus générale, il n'existe aucun algorithme capable de déterminer si un programme donné s'arrête ou non [Turing, 1936].

Applications:

- Terminaison de la boucle

```
for (d = 2, m = 1; d <= n / 2 && m <= n; d++)
  if (!(n % d))
    m += d;
```

pour une valeur donnée de `n`: On peut employer le variant de boucle

$$v = \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor + 1 - \mathtt{d}.$$

En effet:

- Nous avons précédemment établi que la condition $\mathtt{d} \leq \left\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \right\rfloor + 1$ est un invariant de la boucle, ce qui entraîne $v \in \mathbb{N}$.
- Chaque itération de la boucle incrémente `d` et donc décrémente v d'une unité.

- Terminaison de la boucle:

```
for (n = 2; n <= n_max; n++)
  {
    /*  Traitement de n  */
  }
```

Il suffit d'utiliser le variant de boucle

$$v = \mathtt{n\_max} + 1 - \mathtt{n}.$$

Chapitre 4

Les fonctions et les procédures

Définition

En programmation, le terme fonction désigne un morceau de code qui peut être invoqué, ou appelé (c'est-à-dire que son exécution peut être déclenchée) à partir de plusieurs endroits d'un programme.

Principes:

- Pendant l'exécution d'une fonction, le code appelant (c'est-à-dire, celui qui a invoqué la fonction) est suspendu. Son exécution reprend dès que celle de la fonction invoquée est terminée.
- Une fonction peut posséder des paramètres, qui lui permettent de recevoir des arguments lors de son invocation.
- À la fin de son exécution, une fonction peut transmettre une valeur de retour au code qui l'a invoquée. Une fonction qui ne retourne pas de valeur est appelée une procédure.

La programmation des fonctions

En langage C, la définition d'une fonction prend une des formes suivantes:

```
type-retour id ([ type-par1 id1 [, type-par2 id2 [, ...]]])
  {
    ⋮
  }
```

```
type-retour id (void)
  {
    ⋮
  }
```

Notes:

- La deuxième forme est celle d'une fonction qui ne possède pas de paramètre.

- *id* est un identificateur qui nomme la fonction, afin de pouvoir y faire référence dans d'autres parties du programme.
- *type-retour* est le type de la valeur de retour de la fonction. Dans le cas d'une procédure, on utilise le type fictif `void`.
- *type-par1*, *type-par2*, ... spécifient le type des paramètres successifs de la fonction.
- *id1*, *id2*, ... sont des identificateurs qui nomment les paramètres de la fonction, afin de pouvoir y faire référence dans le corps de celle-ci.
- Le bloc `{ ... }` constitue le corps de la fonction, et comprend les instructions qui seront exécutées lors de l'invocation de celle-ci.
- En C standard, il est interdit de définir une fonction dans le corps d'une autre fonction. Un programme C est donc essentiellement composé d'une suite de définitions de fonctions, qui peuvent être réparties dans plusieurs fichiers source.

- Dans le corps d'une fonction, l'instruction de contrôle

  `return` *[valeur]*;

  termine immédiatement l'exécution de celle-ci, et retourne la valeur fournie au code appelant.

  Remarque:

  – Dans le cas d'une fonction dont le type de retour n'est pas `void`, l'instruction `return` doit être suivie d'une expression du type approprié, et une telle instruction doit toujours être exécutée avant de sortir de la fonction.

  – Dans une procédure, l'instruction `return` n'est jamais accompagnée d'une valeur, et son exécution en fin de procédure est facultative.

Exemple

Fonction calculant le plus grand commun diviseur de deux entiers strictement positifs:

```
int pgcd(int a, int b)
{
  int c;

  if (a > b)
    {
      c = a;
      a = b;
      b = c;
    }

  while (a)
    {
      c = a;
      a = b % a;
      b = c;
    }

  return b;
}
```

Remarque: Les paramètres d'une fonction (dans cet exemple, `a` et `b`) peuvent être vus comme étant des variables dont

- la portée est limitée au corps de la fonction, et
- la valeur est initialisée à l'aide des arguments fournis lors de l'invocation de la fonction.

Dans le corps d'une fonction, il est permis de modifier la valeur des paramètres comme pour toute autre variable. Une telle modification des arguments n'a aucune influence sur le code appelant (*passage par valeur*).

La déclaration d'une fonction

Pour pouvoir invoquer une fonction à partir d'un programme, il est nécessaire que le type des paramètres et de la valeur de retour éventuelle de cette fonction soient connus.

Ces informations peuvent être fournies au compilateur:

- soit implicitement, en définissant la fonction. Les détails de celle-ci sont alors connus à partir de cette définition.
- soit explicitement, en founissant une déclaration de la fonction, aussi appelée prototype.

  En C, un prototype prend une des deux formes suivantes, selon que la fonction admette ou non des paramètres:

```
type-retour id ( type-par1 [ id1 ] [, type-par2 [ id2 ] [, ...]]);
```

```
type-retour id (void);
```

Notes:

- Les identificateurs de paramètres *id1*, *id2*, ... sont facultatifs dans les prototypes. Ils ne doivent pas nécessairement correspondre à ceux figurant dans la définition de la fonction.
- L'ensemble des prototypes des fonctions définies dans un fichier source `source.c` sont habituellement regroupés dans un fichier d'en-tête (*header file*) `source.h`.

  Un tel fichier peut être incorporé à un fichier source grâce à la directive de pré-traitement (*preprocessing directive*) `#include`. Celle-ci possède deux formes:

  - `#include <source.h>` pour un fichier d'en-tête `source.h` standard.
  - `#include "source.h"` pour un fichier d'en-tête rédigé par le programmeur.

Remarques: Dans les programmes que nous avons étudiés jusqu'ici:

- `stdio.h` est un fichier d'en-tête standard, contenant les prototypes de plusieurs fonctions d'entrée et de sortie (*st*a*n*d*ard i*nput *and o*utput), dont `scanf` et `printf`.

  La directive `#include <stdio.h>` permet donc au compilateur de connaître les modalités d'invocation de ces fonctions.

- La définition `int main() { ... }` est celle d'une fonction appelée `main`, qui constitue le point d'entrée d'un programme C. Cela signifie que cette fonction est invoquée dès le début de l'exécution du programme.

- Cette fonction `main` retourne une valeur entière, qui représente un code de diagnostic renvoyé par le programme à la fin de son exécution. Par convention, le code 0 correspond à une exécution sans erreur. À partir de maintenant, nous ajouterons donc par défaut une instruction `return 0;` à la fin de la fonction `main` de nos programmes.

L'invocation d'une fonction

Si une fonction `f` a été correctement définie et (si nécessaire) déclarée, alors elle peut être invoquée en évaluant une expression de la forme

`f(`*expr1*`, `*expr2*`, ...)`

où *expr1*, *expr2*, ... sont des expressions dont le type correspond à celui des paramètres de `f`.

- Si le type de retour de `f` n'est pas `void`, alors cette expression devient égale à la valeur retournée par `f` à la fin de son exécution.
- Si `f` est déclarée `void`, alors cette expression ne possède pas de valeur.

Exemple

Calcul du plus petit commun multiple (PPCM) de deux nombres entiers strictement positifs:

```
int pgcd(int, int);

int ppcm(int a, int b)
{
  int g;

  g = pgcd(a, b);

  return (a / g) * b;
}
```

Remarque: Ce code est compilable. Pour qu'il puisse être exécuté, il est nécessaire que

- l'on compile également la fonction `pgcd`, et que
- l'on invoque la fonction `ppcm` à partir d'une autre partie du programme.

L'interface et l'implémentation d'une fonction

Dans un programme, une fonction possède:

- une interface, qui regroupe les informations permettant de l'utiliser:
  - son nom,
  - le nombre, le type, et la signification de ses paramètres,
  - le type et la signification de sa valeur de retour éventuelle,
  - une description du travail qu'elle effectue,
  - des contraintes d'utilisation éventuelles.
- une implémentation, formée par le détail des instructions qui composent son corps.

La présence de fonctions dans un programme y introduit donc de la modularité: En connaissant son interface, il est possible d'exploiter une fonction sans en connaître précisément les détails d'implémentation.

La récursivité

Il est permis d'écrire des fonctions qui s'invoquent elles-mêmes. Ces fonctions sont alors dites récursives.

Exemple 1:

```
int pgcd(int a, int b)
{
  int c;

  if (a > b)
    return pgcd(b, a);

  while (a)
    {
      c = a;
      a = b % a;
      b = c;
    }

  return b;
}
```

Exemple 2:

```
int pgcd(int a, int b)
{
  if (a > b)
    return pgcd(b, a);

  if (a)
    return pgcd(b % a, a);

  return b;
}
```

Note: Comme on le voit ici, le mécanisme d'invocation récursive permet parfois de simplifier l'écriture d'une fonction.

Cependant, chaque invocation d'une fonction nécessite de mémoriser:

- l'endroit où le code appelant devra continuer son exécution à la fin de cette invocation,
- la valeur des arguments fournis à la fonction,
- la valeur des variables locales à la fonction.

Dans le cas d'une fonction récursive, chaque invocation de la fonction au sein d'une invocation déjà existante nécessite d'allouer une nouvelle zone de mémoire pour retenir ces données. Les programmes récursifs peuvent donc être gourmands en mémoire.

Illustration: Fonction factorielle.

```
int fact(int n)
{
  if (n <= 1)
    return 1;

  return n * fact(n - 1);
}
```

On peut estimer la complexité en espace de cette fonction, correspondant à la quantité de mémoire nécessaire à son exécution. Tout comme la complexité en temps, on exprime cette complexité en espace à l'aide de la notation "grand-O" :

- Le calcul de `fact`(n) pour $n \geq 1$ nécessite n invocations imbriquées de la fonction `fact`.

- Chacune de ces invocations nécessite l'allocation d'une quantité identique de mémoire.

La complexité en espace du calcul de `fact`(n) est donc $O(n)$.

Remarques:

- Pour ce problème, il est facile d'écrire une version itérative de la fonction factorielle, possédant une complexité en espace $O(1)$ (donc meilleure):

```
int fact(int n)
{
  int r;

  for (r = 1; n > 1; n--)
    r *= n;

  return r;
}
```

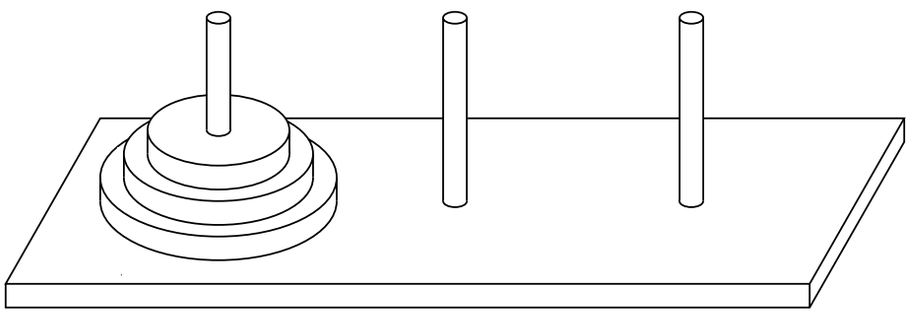
- Pour que l'exécution d'une fonction récursive se termine, il est nécessaire que celle-ci possède un ou plusieurs cas de base, libres d'appels récursifs, et qui finissent toujours par être atteints.

  Pour prouver qu'une fonction récursive se termine, on peut employer un variant, tout comme pour les instructions de boucles étudiées au chapitre 3.

- Il existe des langages de programmation dits fonctionnels, pour lesquels
  - la récursivité est le mécanisme de base permettant de répéter l'exécution de certaines opérations, et
  - des mécanismes spécifiques permettent d'éliminer ou d'atténuer le surcoût en mémoire des appels récursifs.

Exercice: Les tours de Hanoï

On considère un jeu comprenant trois tiges sur lesquelles sont empilés un certain nombre de disques de diamètres différents.



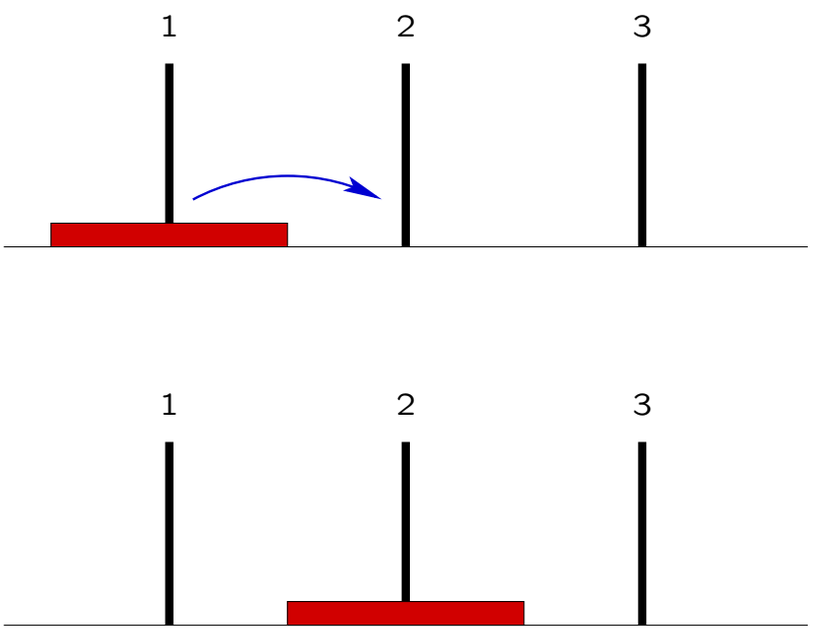
Règles du jeu:

- Initialement, tous les disques sont placés sur la première tige, par ordre décroissant de diamètre.
- L'objectif est d'amener tous les disques sur la deuxième tige.
- On ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois.
- À chaque étape, on ne peut poser un disque que sur un disque de diamètre supérieur (ou sur le plancher).

Problème: Écrire un programme capable de générer une séquence de mouvements permettant d'atteindre l'objectif, pour un nombre n donné de disques.

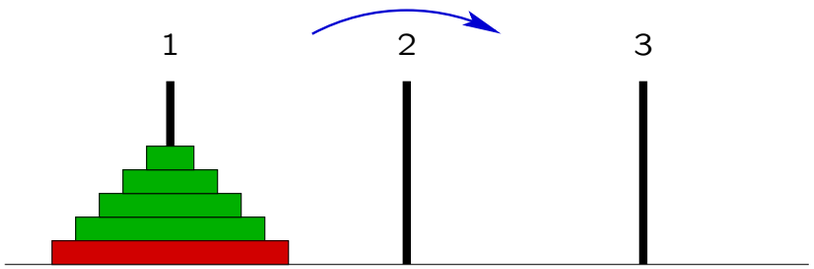
Observations:

- Si $n = 1$, la solution est immédiate:

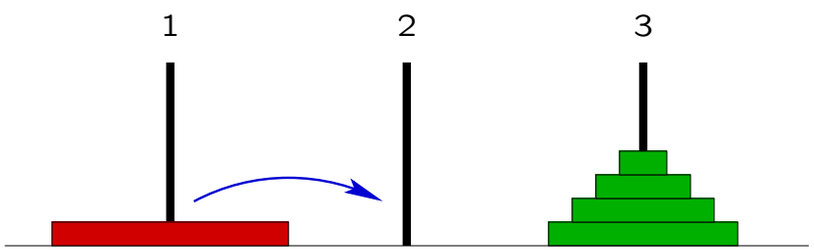


- Si $n > 1$, le problème peut se résoudre en trois étapes:

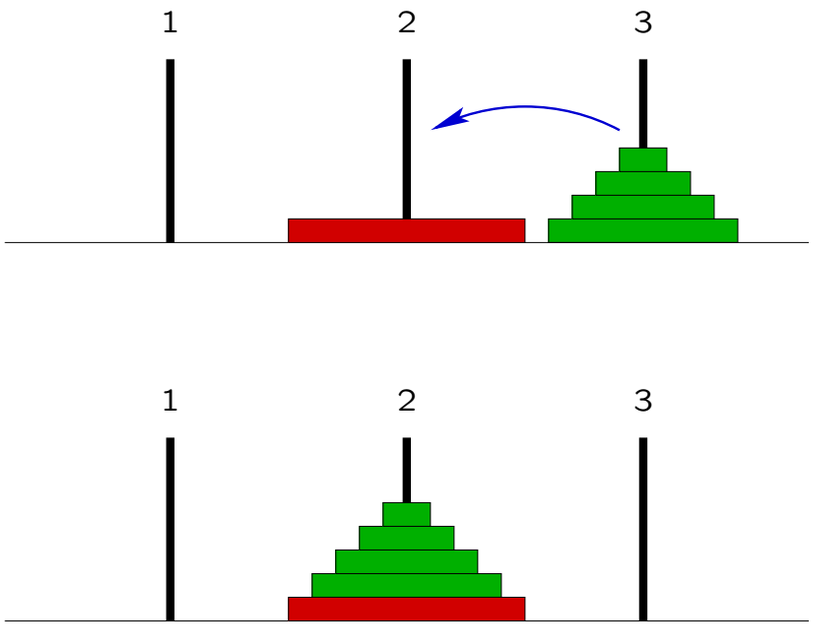
  1. Déplacer $n - 1$ disques de la tige 1 vers la tige 3.



  2. Déplacer le plus grand disque de la tige 1 vers la tige 2.



3. Déplacer $n-1$ disques de la tige 3 vers la tige 2.



Remarque: Les étapes 1 et 3 peuvent se résoudre d'une façon similaire au problème global pour $n-1$ disques. (La seule différence est qu'il faut explicitement préciser quelles sont les tiges de départ et d'arrivée.)

Cela mène donc à une solution récursive naturelle.

Solution en C

```
#include <stdio.h>

/* Déplace <n> disques de la tige <origine> vers la tige
   <destination>, en s'aidant de la tige <autre>. */

void hanoi(int n, int origine, int destination, int autre)
{
  if (n <= 1)
    {
      printf("Déplacer un disque de la tige %d vers la tige %d.\n",
             origine, destination);
      return;
    }

  hanoi(n - 1, origine, autre, destination);
  hanoi(1, origine, destination, autre);
  hanoi(n - 1, autre, destination, origine);
}
```

```
int main()
{
  int n;

  do
    {
      printf("Entrez un nombre de disques: ");
      scanf("%d", &n);
    }
  while (n < 1);

  hanoi(n, 1, 2, 3);

  return 0;
}
```

Question: Quelles sont les complexités en temps et en espace de ce programme?

Réponse:

Pour un nombre de disques $n > 1$ donné:

- le nombre d'appels de la fonction `hanoi` afin d'effectuer les étapes 1 et 3 vaut

$$2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 2.$$

- le nombre d'appels de `hanoi` en vue d'effectuer l'étape 2 est égal à

$$1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1.$$

- Le nombre total d'appels de `hanoi` est donc égal à

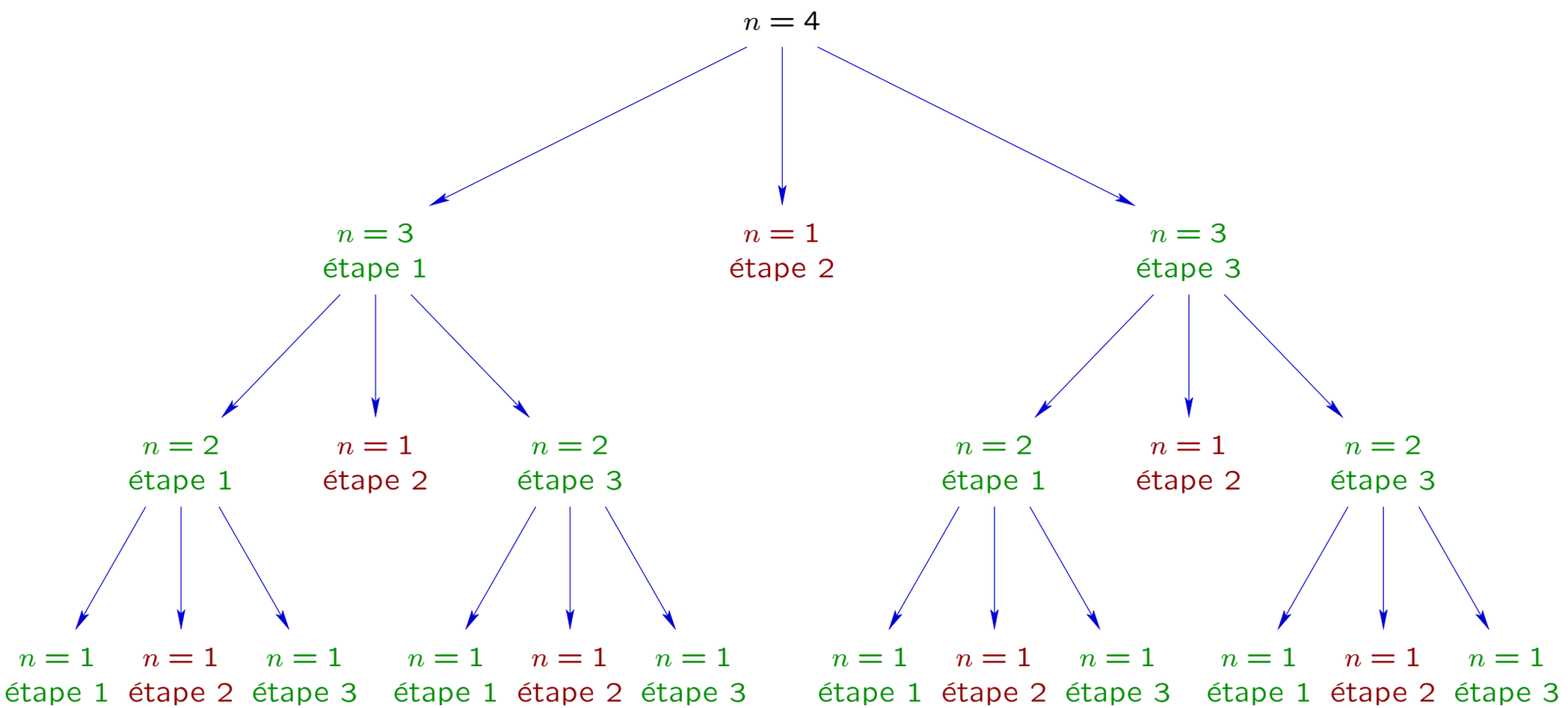
$$1 + (2^n - 2) + (2^{n-1} - 1),$$

  dès lors la complexité en temps du programme est $O(2^n)$.

- La profondeur de récursion (c'est-à-dire, le nombre maximum d'invocations imbriquées) de la fonction `hanoi` est égal à n.

  La complexité en espace du programme est donc $O(n)$.

Illustration ($n = 4$):



Les variables globales

Jusqu'à présent, nous n'avons rencontré que des variables déclarées à l'interieur de blocs d'instructions exécutables (variables locales). La portée de ces variables a été étudiée au chapitre 2.

En C, il est également possible de définir des variables en dehors de toute fonction. Ces variables sont alors dites globales.

Syntaxe:

[`static` *]* *[* `const` *]* *type* *identificateur* *[* = *valeur* *]*
[, *identificateur* *[* = *valeur* *]* *]*
⋮
[, *identificateur* *[* = *valeur* *]* *]*;

Notes:

- Les instructions de définition de variables globales se placent au même endroit que les définitions de fonctions.

- Si le mot-clé `static` est employé, alors la portée des variables est limitée au fichier source contenant leur définition.
- En l'absence du mot-clé `static`, la portée des variables définies s'étend à l'ensemble du programme, même si le code de celui-ci est réparti dans plusieurs fichiers source.

  Remarque: Si une variable globale est définie dans un fichier source et utilisée dans un autre, il est nécessaire que ce dernier fichier contienne une déclaration de la variable, afin que le compilateur connaisse son nom et son type.

  Une telle déclaration de variable(s) prend la forme suivante:

`extern` *type identificateur [, identificateur [, . . .]];*

- L'utilisation de variables globales présente plusieurs inconvénients:
  - Les fonctions qui manipulent ces variables peuvent produire des effets de bord: Les opérations effectuées peuvent dépendre d'autres données que les arguments de la fonction, et peuvent conduire à modifier la valeur des variables globales.
  - Dans les programmes de grande taille, les définitions de variables globales non marquées `static` peuvent potentiellement conduire à des conflits de noms.

  On visera donc à limiter dans la mesure du possible l'emploi de variables globales, afin de garder une bonne modularité des programmes.

- Il est également possible d'employer le mot-clé `static` pour déclarer des variables locales à une fonction. La valeur de telles variables est alors préservée d'un appel à l'autre de cette fonction (ce qui conduit également à des effets de bord).

- Enfin, il est aussi permis de déclarer des fonctions `static`. Comme pour les variables, cela signifie que leur portée est alors limitée au fichier source qui contient leur définition

Exemple 1: Compteur simple

Fichier `compteur.c`:

```
#include "compteur.h"

static int compteur_valeur = 0;

void compteur_init(void)
{
  compteur_valeur = 0;
}

void compteur_plus(void)
{
  compteur_valeur++;
}

void compteur_moins(void)
{
  if (compteur_valeur)
    compteur_valeur--;
}

int compteur_est_zero(void)
{
  return !compteur_valeur;
}
```

Fichier `compteur.h`:

```
void compteur_init(void);
void compteur_plus(void);
void compteur_moins(void);
int  compteur_est_zero(void);
```

Fichier `compteur-test.c`:

```
#include <stdio.h>
#include "compteur.h"

void  affiche()
{
  printf(compteur_est_zero() ? "= 0\n" : "!= 0\n");
}

int main()
{
  compteur_init();
```

```
  compteur_plus();
  compteur_plus();
  compteur_moins();

  affiche();

  compteur_moins();

  affiche();

  return 0;
}
```

Exemple 2: Mesure du nombre d'appels à une fonction

Fichier `nombre-appels.c`:

```
#include "nombre-appels.h"

unsigned  nombre_appels = 0;

void f(void)
{
  nombre_appels++;

  /* Autres opérations */
}
```

Fichier `nombre-appels.h`:

```
extern unsigned  nombre_appels;

void f(void);
```

Fichier `nombre-appels-test.c`:

```
#include <stdio.h>
#include "nombre-appels.h"

int main()
{
  f();
  f();
  f();

  printf("nombre d'appels de f(): %u\n", nombre_appels);

  return 0;
}
```

Les macros

En plus des fonctions, le langage C possède un autre mécanisme permettant de déployer un même fragment de code à plusieurs endroits d'un programme.

La construction

```
#define nom[([ id1 [, id2 [, ... ]]])] texte
```

définit une macro. Il s'agit d'une directive de pré-traitement réalisant une substitution syntaxique, appliquée avant la compilation proprement dite:

- Dans la suite du programme, toutes les occurrences de *nom* suivies du nombre approprié d'arguments (entre parenthèses), seront remplacées par *texte*.
- Dans le texte de substitution *texte*, toutes les occurrences des identificateurs *id1*, *id2*, ... (éventuels) sont remplacées par les arguments qui suivent *nom* dans le programme.

Exemples:

- `#define PI 3.14159265358979323846`
- `#define carre(x) ((x) * (x))`
- `#define max(a, b) ((a) > (b) ? (a) : (b))`

Notes:

- Les macros ne sont pas des fonctions! En particulier, leur comportement diffère lorsque l'évaluation de leurs arguments provoque un effet de bord.

  Illustration: `carre(n++)` se substitue en `((n++) * (n++))`, dont l'évaluation incrémente `n` deux fois.

- La priorité des opérateurs peut conduire à des erreurs difficiles à déceler.

Illustration: Si l'on avait écrit

`#define carre(x) x * x`,

alors `carre(a + b)` se transformerait en `a + b * a + b`, qui ne correspond pas à l'opération souhaitée.

L'emploi de parenthèses dans le texte des macros est donc vivement conseillé!

- Il est possible de définir des macros possédant un texte de substitution qui s'étend sur plusieurs lignes du programme, en terminant chaque ligne intermédiaire par le marqueur de continuation `\`.

Chapitre 5

Les tableaux et les chaînes de caractères

Les vecteurs

Principes: Un vecteur, ou tableau unidimensionnel, est une collection

$$[x_0\, x_1\, \cdots\, x_{n-1}]$$

de n variables x_i, avec $n > 0$, dont chacune

- possède le même type, et
- est accessible sur base de son indice $i \in [0, n-1]$.

En langage C, une définition de vecteur(s) prend la forme suivante:

```
[ static ] [ const ] type id[taille] [ = { val1, val2, ... } ]
                                     [ , id[taille] [ = { val1, val2, ... } ] ]
                                                  ⋮
                                     [ , id[taille] [ = { val1, val2, ... } ] ];
```

Notes:

- Une telle définition se place au même endroit que les autres définitions de variables.
- Les règles de portée et la signification des mots-clés `static` et `const` sont inchangées.
- *type* désigne ici le type de chaque élément d'un vecteur.
- *taille* spécifie le nombre d'éléments alloués à un vecteur. Ces éléments sont toujours indicés consécutivement et à partir de 0.
- Les constructions $= \{ \textit{val1}, \textit{val2}, \ldots \}$ sont facultatives, et permettent d'attribuer des valeurs initiales aux éléments d'un vecteur. Lorsqu'elles sont présentes, on peut omettre la taille du vecteur dans sa définition.
- On peut accéder à un vecteur via des expressions de la forme *id*[*expr*], représentant l'élément du vecteur *id* dont l'indice est donné par la valeur de *expr*.

  Attention: C'est au programmeur de garantir que la valeur de *expr* correspond toujours à un indice valide!

Application: *Crible d'Ératosthène*

Objectif: Déterminer l'ensemble des nombres premiers (c'est-à-dire, ceux possédant exactement deux diviseurs) jusqu'à une borne n donnée (par exemple, $n = 10^6$).

Algorithme:

1. On considère un ensemble P contenant initialement tous les nombres dans l'intervalle $[2, n]$.
2. Le plus petit nombre p contenu dans P (initialement, 2) est un nombre premier. On peut donc afficher p, et ensuite enlever de P ses multiples p, $2p$, $3p$, $4p$, ...
3. S'il reste des nombres dans P, on recommence l'étape 2.

Amélioration: À l'étape 2, les multiples $2p$, $3p$, ..., $(p-1)p$ de p ont déjà été éliminés lors des itérations précédentes. On peut donc se contenter d'enlever de P, outre p, uniquement ses multiples p^2, $(p+1)p$, $(p+2)p$, ...

Implémentation:

- On peut représenter l'ensemble P par un vecteur de booléens `B`: Pour tout $i \in [2, n]$, on aura `B[`i`]` $= 0$ si $i \notin P$, et `B[`i`]` $= 1$ si $i \in P$.
- Pour rechercher le plus petit élément de P, on parcourt `B` jusqu'à trouver une valeur égale à 1.

  Remarque: Les valeurs de p considérées à l'étape 2 de l'algorithme sont croissantes. On peut donc à cette étape

  – commencer le parcours de `B` juste après la valeur de p obtenue à l'itération précédente (ou en $p = 2$ pour la première itération), et

  – se dispenser de retirer de `B` les nombres premiers p qui ont déjà été détectés.

Traduction en C:

```
#include <stdio.h>

#define N_MAX  999999

static unsigned char b[N_MAX + 1];

int main()
{
  unsigned i, p;

  for (i = 2; i <= N_MAX; i++)
    b[i] = 1;

  for (p = 2; p <= N_MAX; p++)
    {
      if (!b[p])
        continue;

      printf("%d\n", p);

      for (i = p; (unsigned long long) i * p <= N_MAX; i++)
        b[i * p] = 0;
    }

  return 0;
}
```

Remarques:

- Les deux premiers éléments du vecteur `b` sont inutilisés.

  Il aurait été possible de représenter l'appartenance d'un indice i à l'ensemble P par le contenu de `B[`$i-2$`]`, mais cela aurait légèrement nui à la lisibilité du code, tout en apportant un gain en espace peu significatif.

- Le type `unsigned char` choisi pour les éléments du vecteur est un bon compromis entre l'espace mémoire occupé et la facilité d'accès à ces éléments.

- Une conversion de type est nécessaire pour évaluer `i * p <= N_MAX` sans provoquer de dépassement arithmétique, si les entiers sont représentés sur 32 bits.

Les fonctions sur les tableaux

Un vecteur peut être passé en argument à une fonction. Pour déclarer le paramètre correspondant, on utilise alors la forme

$$\boxed{\textit{type}\ \ \textit{id}\texttt{[]}},$$

où *type* est le type d'un élément du vecteur, et *id* l'identificateur représentant ce vecteur dans le corps de la fonction.

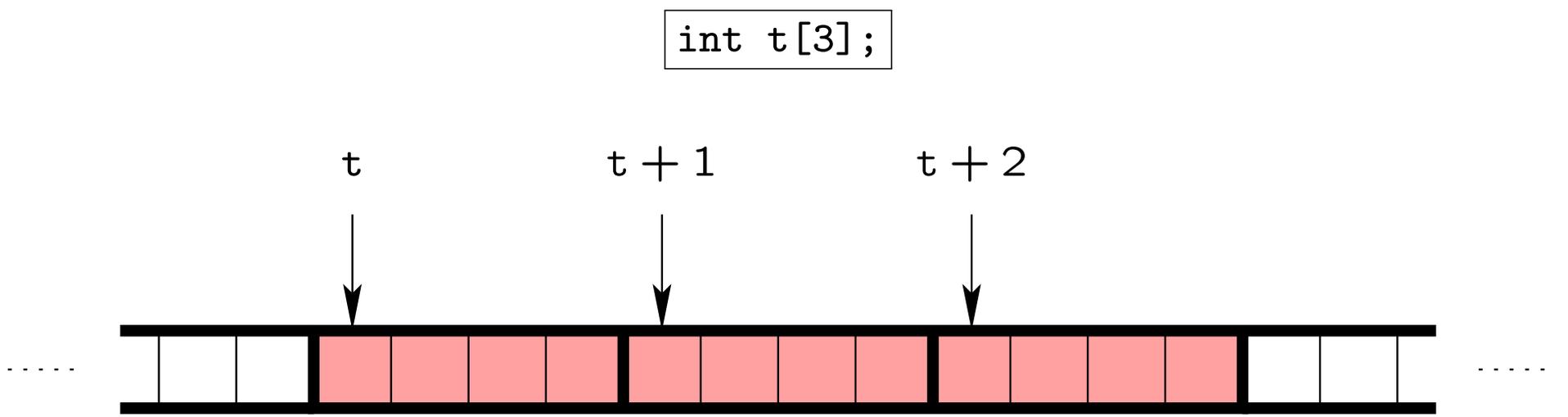
Notes:

- Lorsqu'un tableau est passé en argument à une fonction, la seule donnée effectivement transmise à celle-ci est un pointeur vers ce tableau (c'est-à-dire, l'endroit où se trouve ce tableau dans la mémoire de l'ordinateur).

  Par conséquent, les modifications apportées par la fonction aux éléments du tableau ont un effet global.

- En C, les éléments d'un tableau sont toujours placés dans des emplacements consécutifs de la mémoire. Un pointeur vers un tableau pointe en fait vers son premier élément.
- Si `p` est un pointeur vers un tableau et i une valeur entière, l'expression $\texttt{p} + i$ fournit un pointeur vers le $(i+1)$-ème élément du tableau.

Illustration: (en supposant les entiers codés sur 32 bits)



Exemple:

Fonction permutant deux éléments consécutifs d'un vecteur d'entiers:

```
void permute_consecutifs(int t[])
{
  int aux;

  aux = t[0];
  t[0] = t[1];
  t[1] = aux;
}
```

Exemple d'utilisation:

```
int v[100];

  ⋮

permute_consecutifs(v + 10);   /* Permute les 11ème et 12ème éléments du vecteur. */
```

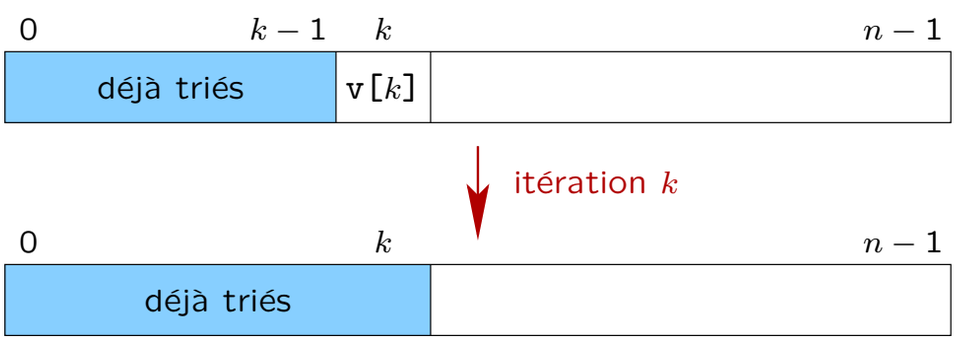
Le tri d'un vecteur

Problème: Comment peut-on réordonner les éléments d'un vecteur donné, de façon à les disposer par ordre croissant de valeur?

Première solution (tri par insertion, *insertion sort*):

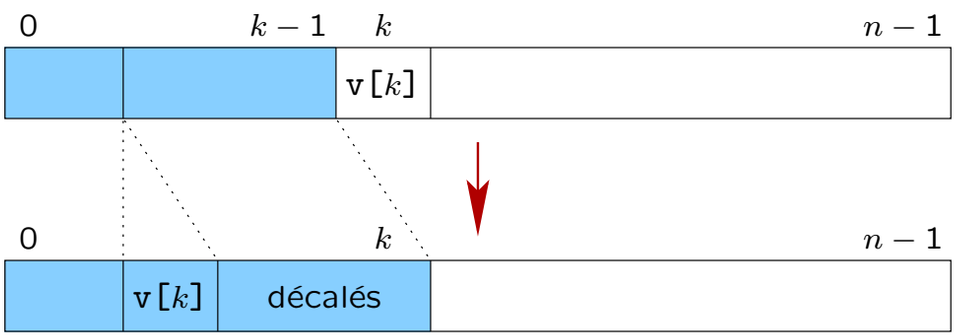
Pour trier un vecteur `v` de taille n:

- On effectue $n-1$ itérations successivement chargées de trier les préfixes de taille 2, 3, 4, . . . , n du vecteur.
- Juste avant l'itération k, pour $k \in [1, n-1]$, les k premiers éléments du vecteur sont déjà triés. Le but de cette itération est d'y insérer la valeur du $(k+1)$-ème élément.



Pour effectuer cette insertion:

1. On recopie la valeur de $\mathtt{v}[k]$ dans une variable auxiliaire a.
2. On balaie de la droite vers la gauche les éléments du vecteur $\mathtt{v}[0 : k-1]$ qui sont supérieurs à a, et on les décale d'une position vers la droite.
3. On insère la valeur sauvegardée dans a immédiatement à gauche du dernier élément décalé.



Traduction en C:

```
/* Tri du vecteur v de taille n, par ordre croissant */

void tri_insertion(int v[], int n)
{
  int  k, i, a;

  for (k = 1; k < n; k++)
    {
      a = v[k];
      for (i = k - 1; i >= 0 && v[i] > a; i--)
        v[i + 1] = v[i];

      v[i + 1] = a;
    }
}
```

Complexité:

- En temps: $O(n^2)$.
- En espace: $O(n)$ en comptant les données d'entrée, $O(1)$ sinon.

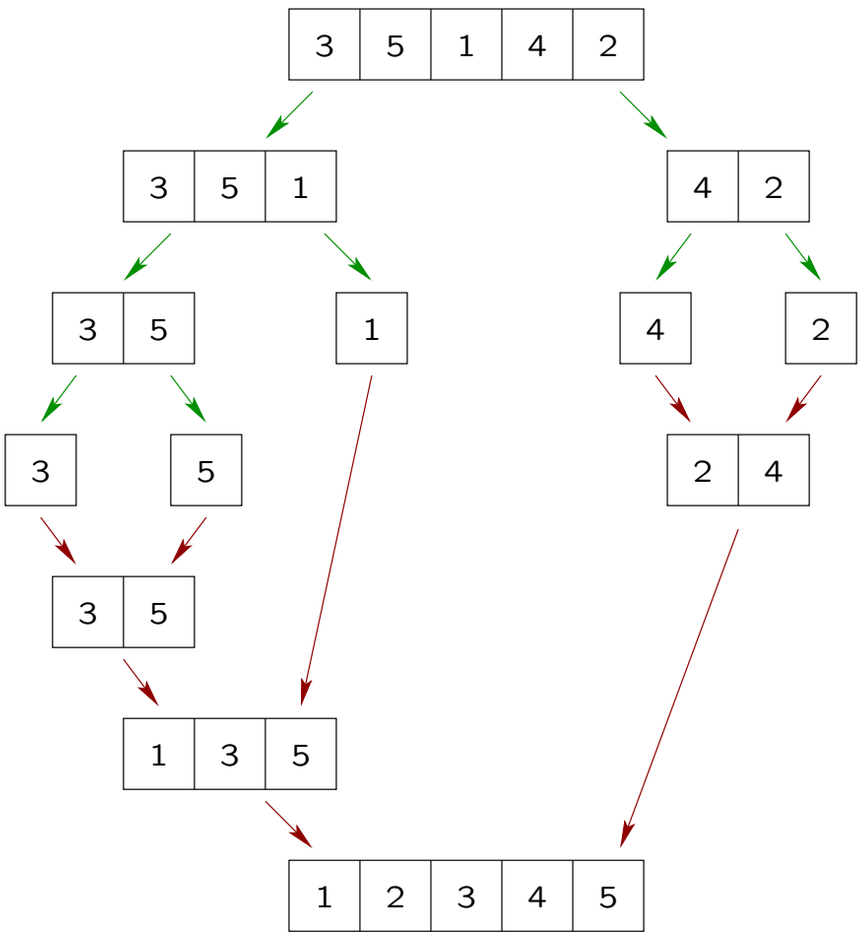
Meilleure solution (tri par fusion, *merge sort*)

Principe: On procède récursivement. Pour trier un vecteur de taille n:

- Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Si $n > 1$:
  1. On divise le vecteur en deux sous-vecteurs de tailles égales (ou égales à une unité près dans le cas d'un nombre impair d'éléments).
  2. On trie récursivement chaque sous-vecteur.
  3. On fusionne les deux sous-vecteurs triés.

L'opération de fusion de deux sous-vecteurs peut s'effectuer en retirant un par un leurs éléments à partir du premier, en les comparant, et en les plaçant dans un nouveau vecteur dans l'ordre approprié.

Illustration:



Implémentation

Problème: L'opération de fusion nécessite un espace mémoire auxiliaire pour y placer son résultat.

Solution simple: Avant de fusionner deux sous-vecteurs, on les recopie vers un espace auxiliaire préalloué. Ensuite, l'opération de fusion place son résultat à l'emplacement initial des deux sous-vecteurs.

Remarque: Il est possible de développer des solutions plus élaborées qui

- utilisent alternativement deux espaces mémoire distincts (en d'autres termes, la fusion de deux sous-vecteurs extraits d'un de ces espaces produit son résultat dans l'autre espace), ou bien qui
- ne nécessitent pas d'espace de travail supplémentaire.

Traduction en C:

```
/*
   Fusionne les vecteurs v1[a1:b1] et v2[a2:b2], supposés triés,
   et place le résultat dans le vecteur v3[], supposé distinct
   de v1[] et v2[] ainsi que de taille suffisante.
*/

static void fusion(int v1[], int a1, int b1,
                   int v2[], int a2, int b2,
                   int v3[])
{
  int  i1, i2, i3;

  for (i1 = a1, i2 = a2, i3 = 0; i1 <= b1 || i2 <= b2;)
    if (i1 > b1)
      v3[i3++] = v2[i2++];
    else
      if (i2 > b2)
        v3[i3++] = v1[i1++];
      else
        v3[i3++] = v1[i1] < v2[i2] ? v1[i1++] : v2[i2++];
}
```

```
/*
   Tri du vecteur v[a:b], par ordre croissant, en utilisant
   le vecteur v_aux[a:b] comme espace de travail auxiliaire
*/

static void tri_sousvecteur(int v[], int a, int b, int v_aux[])
{
  int n, c, i;

  n = b - a + 1;
  if (n < 2)
    return;

  c = a + (n + 1) / 2;
  tri_sousvecteur(v, a, c - 1, v_aux);
  tri_sousvecteur(v, c, b, v_aux);

  for (i = a; i <= b; i++)
    v_aux[i] = v[i];

  fusion(v_aux, a, c - 1,
         v_aux, c, b,
         v + a);
}
```

```
/*
   Tri du vecteur v de taille n, par ordre croissant, en utilisant
   le vecteur v_aux, de même taille, comme espace de travail auxiliaire
 */

void tri_fusion(int v[], int n, int v_aux[])
{
  tri_sousvecteur(v, 0, n - 1, v_aux);
}
```

Complexité en temps:

- Le coût d'une opération de copie ou de fusion est $O(n)$, où n représente la taille du vecteur copié ou fusionné.
- Pour trier un vecteur de taille $n = 2^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on doit copier et/ou fusionner:
  - 2 vecteurs de taille $\frac{n}{2}$,
  - 4 vecteurs de taille $\frac{n}{4}$,
  - 8 vecteurs de taille $\frac{n}{8}$,
  - $\vdots$
  - n vecteurs de taille 1.
- Le coût total vaut donc $O(kn) = O(n \log n)$.

Complexité en espace: $O(n + \log n) = O(n)$.

Les chaînes de caractères

De nombreux programmes sont amenés à devoir manipuler des données textuelles. Celles-ci sont représentées par des chaînes de caractères (*strings*), qui sont des séquences de symboles extraits d'un alphabet fixé.

En langage C, les chaînes de caractères sont équivalentes à des vecteurs dont chaque élément est de type `char`.

Principes:

- La fin d'une chaîne est repérée par un caractère spécial `'\0'`, dont la valeur numérique est nulle.

  Il est important de tenir compte de la présence de ce caractère de terminaison lors de l'allocation d'une chaîne. Ainsi, la définition

```
char message[10];
```

ne permet de placer dans `message` que des chaînes de longueur inférieure ou égale à 9.

- Une chaîne de caractères peut être initialisée lors de sa définition grâce à une construction de la forme

  `char` *id*`[] = "`*texte*`";`

  Attention: Cette construction est une forme particulière de définition de variable. En dehors d'une telle définition, il n'est pas permis d'utiliser l'opérateur d'affectation `=` pour modifier le contenu d'une chaîne de caractères (ou, plus généralement, d'un tableau).

  Pour effectuer une telle modification, il est nécessaire de modifier individuellement les éléments du tableau.

Exemple 1: Fonction recopiant le contenu d'une chaîne de caractères dans une autre:

```
/*
   Recopie la chaîne <src> dans la chaîne <dest>, en transférant
   au plus n symboles (incluant le terminateur éventuel).
*/

void strncpy(char dest[], const char src[], unsigned n)
{
  unsigned i;

  for (i = 0; i < n; i++)
    if (!((dest[i] = src[i])))
      break;
}
```

Remarque: Une fonction similaire, ainsi que de nombreuses autres fonctions effectuant des traitements élémentaires des chaînes de caractères, sont disponibles dans la bibliothèque standard du langage C. (Le fichier d'en-tête correspondant est `string.h`.)

Exemple 2: Fonction comptant le nombre de chiffres présents dans une chaîne de caractères:

```
unsigned nb_chiffres(char s[])
{
  unsigned i, n;

  for (n = i = 0; s[i]; i++)
    if (s[i] >= '0' && s[i] <= '9')
      n++;

  return n;
}
```

Note: Cette fonction suppose que les symboles encodant les chiffres sont consécutifs dans l'alphabet (c'est le cas pour les procédés d'encodage courants).

Les tableaux multidimensionnels

Les mécanismes de définition et d'accès aux tableaux ne sont pas limités aux vecteurs. Des tableaux multidimensionnels peuvent être définis par des constructions de la forme suivante:

[`static` *] [* `const` *] type id*`[`*taille1*`]` `[`*taille2*`]` $\cdots$ `[`*taille*n`]`
[$=$ $\{$ $\{$ $\cdots$ $\{$ *val*, *val*, ...$\}$,
$\vdots$
$\{$ *val*, *val*, ...$\}$ $\cdots$ $\}$ $\}$ *];*

Principes:

- Cette définition crée un tableau à n dimensions appelé *id*, de taille

$$taille1 . taille2 \ldots taille\, n.$$

- Chaque élément de ce tableau est de type *type*, et est identifié par un tuple $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, avec $\forall k \in [1, n]$: $0 \leq i_k <$ taille k.

- Une expression de la forme

$$\boxed{\textit{id}\,[\textit{expr1}]\,[\textit{expr2}]\ \cdots\ [\textit{expr}\,n]},$$

où l'évaluation de *expr1*, *expr2*, ..., *expr* n produit respectivement les entiers i_1, i_2, ..., i_n, permet d'accéder à l'élément du tableau identifié par le tuple $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

- Lorsqu'une fonction reçoit en argument un pointeur vers un tableau multidimensionnel, on utilise une déclaration de paramètre de la forme

$$\boxed{\textit{type}\ \ \textit{id}\,[\,[\textit{taille1}\,]]\,[\textit{taille2}]\ \cdots\ [\textit{taille}\,n]}.$$

Remarque: La raison pour laquelle la taille de toutes les dimensions du tableau sauf la première doit être précisée est technique: Les éléments d'un tableau multidimensionnel sont placés consécutivement en mémoire. Pour calculer l'emplacement de l'élément $\textit{id}\,[i_1]\,[i_2]\ \cdots\ [i_n]$ à partir des valeurs de i_1, i_2, ..., i_n, il est nécessaire de connaître la valeur de *taille2*, *taille3*, ..., *taille* n.

Illustration: Considérons le tableau bidimensionnel défini par

$$\boxed{\texttt{int a[3][4];}},$$

qui comporte 3 lignes et 4 colonnes. Si l'on place ses 12 éléments dans des emplacements consécutifs numérotés 0, 1, 2, . . . 11 de la mémoire, alors l'élément

$$\boxed{\texttt{a[}i\texttt{][}j\texttt{]}}$$

se trouvera dans l'emplacement possédant le numéro

$$4i + j.$$

On voit que, pour effectuer ce calcul, il n'est pas nécessaire de connaître la taille de la première dimension du tableau.

Application: Bibliothèque de transformations géométriques dans le plan

Principe: On représente une transformation linéaire

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

où $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ contient les coordonnées d'un point du plan, par le tableau

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right].$$

Code C: Fichier `geometrie-2d.c`:

```
#include <math.h>
#include "geometrie-2d.h"

/*
   Place dans la transformation <t> une rotation
   d'angle <angle>.
*/

void geo2d_creer_rotation(double angle, double t[2][3])
{
  t[0][0] = t[1][1] = cos(angle);
  t[1][0] = sin(angle);
  t[0][1] = -t[1][0];
  t[0][2] = t[1][2] = 0.0;
}

/*
   Place dans la transformation <t> une mise à
   l'échelle de facteur <facteur>.
*/

void geo2d_creer_echelle(double facteur, double t[2][3])
{
  t[0][0] = t[1][1] = facteur;
  t[0][1] = t[1][0] = t[0][2] = t[1][2] = 0.0;
}
```

```
/*
   Place dans la transformation <t> une translation de vecteur (<x>, <y>).
*/

void geo2d_creer_translation(double x, double y, double t[2][3])
{
  t[0][0] = t[1][1] = 1.0;
  t[0][1] = t[1][0] = 0.0;
  t[0][2] = x;
  t[1][2] = y;
}

/*
   Compose deux transformations <t1> et <t2>, appliquées
   dans cet ordre, et place le résultat dans la transformation <t>.
*/

void geo2d_composer(double t1[2][3], double t2[2][3],
                    double t[2][3])
{
  unsigned i, j;

  for (i = 0; i < 2; i++)
    for (j = 0; j < 3; j++)
      t[i][j] = t2[i][0] * t1[0][j] + t2[i][1] * t1[1][j];

  t[0][2] += t2[0][2];
  t[1][2] += t2[1][2];
}
```

```
/*
   Applique la transformation <t> aux coordonnées <v> d'un
   point dans le plan.
 */

void geo2d_appliquer(double t[2][3], double v[2])
{
  double tv[2][3], tr[2][3];

  geo2d_creer_translation(v[0], v[1], tv);
  geo2d_composer(tv, t, tr);

  v[0] = tr[0][2];
  v[1] = tr[1][2];
}
```

Fichier `geometrie-2d.h`:

```
void geo2d_creer_rotation(double, double[2][3]);
void geo2d_creer_echelle(double, double[2][3]);
void geo2d_creer_translation(double, double, double[2][3]);
void geo2d_composer(double[2][3], double[2][3], double[2][3]);
void geo2d_appliquer(double[2][3], double[2]);
```

Exemple d'utilisation de cette bibliothèque:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#include "geometrie-2d.h"

int main()
{
  double p[2] = { 2.0, 3.0 };
  double tr[2][3];

  printf("Coordonnées initiales    : (%lf, %lf)\n", p[0], p[1]);

  geo2d_creer_echelle(0.5, tr);
  geo2d_appliquer(tr, p);
  printf("Après la mise à l'échelle: (%lf, %lf)\n", p[0], p[1]);

  geo2d_creer_rotation(-M_PI / 2.0, tr);
  geo2d_appliquer(tr, p);
  printf("Après la rotation        : (%lf, %lf)\n", p[0], p[1]);

  geo2d_creer_translation(-1.0, 2.0, tr);
  geo2d_appliquer(tr, p);
  printf("Après la translation     : (%lf, %lf)\n", p[0], p[1]);

  return 0;
}
```

Note: Pour compiler cet exemple, il est nécessaire de préciser que la bibliothèque mathématique, contenant notamment l'implémentation des fonctions `sin` et `cos`, doit être liée au programme:

```
% gcc -o test test-geometrie-2d.c geometrie2d.c -lm
```

Chapitre 6

Les structures et les pointeurs

Les données structurées

Motivation: Il est souvent pratique de regrouper au sein d'une même structure des données hétérogènes destinées à être manipulées ensemble.

Exemples:

- Un nombre complexe, obtenu en associant une partie réelle et une partie imaginaire.
- Une transformation géométrique (telle que celles étudiées au chapitre 5), combinant une matrice de transformation et un vecteur de translation.
- La fiche signalétique d'un étudiant dans une base de données, regroupant nom, prénom, date de naissance, données d'inscription, photographie, . . .
- La représentation d'une image, composée d'un pointeur vers une séquence de pixels organisés en lignes successives, associé aux nombres de lignes et de colonnes de l'image.

Les données structurées en langage C

En C, un type structuré se définit grâce à la construction suivante:

```
struct id
{
    type1 id1 [, id1b [, ... ]];
    type2 id2 [, id2b [, ... ]];
        ⋮
};
```

Principes:

- Ce fragment de code définit un nouveau type portant le nom `struct id`.
- Les identificateurs *id1*, *id1b*, *id2*, *id2b*, ... désignent des champs de la structure. Chaque variable de type `struct id` possèdera une instance de chacun de ces champs.

- Dans une expression, l'opérateur `.` permet d'accéder aux champs individuels d'une structure: Si `v` est une variable de type structuré et `c` un champ de cette structure, alors `v.c` désigne le champ `c` de `v`.
- Les définitions de structures se placent habituellement en dehors des fonctions, et leur portée court alors jusqu'à la fin du fichier source incluant ces définitions. (Il est également permis d'en placer à l'intérieur des fonctions; les règles de portée sont alors identiques à celles des variables locales.)

Exemple:

```
struct complexe
{
  double re, im;
};

static struct complexe x, y, z;

   ⋮

  z.re = x.re * y.re - x.im * y.im;
  z.im = x.re * y.im + x.im * y.re;

   ⋮
```

Remarques:

- Il est possible de fusionner la définition d'un type structuré avec une définition de variable(s) possédant ce type. Dans ce cas, on peut omettre le nom du type.

  Illustration:

```
struct
{
  double re, im;
} x, y, z;
```

- On peut simplifier l'utilisation des structures grâce à la construction

  `typedef` *type id*`;` ,

  qui permet dans la suite du programme de désigner le type *type* par le nom abrégé *id*.

  Dans cette construction, si *type* est un type structuré, alors il est autorisé de ne pas lui attribuer de nom à la suite du mot-clé `struct`.

Illustration:

```
typedef struct
{
  double re, im;
} complexe;

static complexe x, y, z;
```

- Un type structuré peut définir des champs qui sont eux-mêmes structurés, ou constitués de tableaux.

Illustration:

```
#define  LONGUEUR_MAX_NOM  50

struct etudiant
{
  char          nom[LONGUEUR_MAX_NOM + 1],
                prenom[LONGUEUR_MAX_NOM + 1];
  struct date   date_naissance;
};
```

L'utilisation des types structurés

- Le type des paramètres et de la valeur de retour d'une fonction peuvent être structurés.

  Tout comme pour les types primitifs, le passage d'un argument structuré à une fonction s'effectue par valeur. En d'autres termes, les champs de la valeur structurée passée à la fonction sont recopiés dans les champs correspondants du paramètre, et une modification de la valeur de celui-ci dans la fonction n'est pas répercutée vers le code appelant.

- Les variables possédant un type structuré peuvent également faire l'objet d'affectations, mais il n'est pas permis de comparer leur valeur à l'aide de l'opérateur `==`.

Application: Bibliothèque de fonctions manipulant des nombres complexes

Fichier `complexe.c`:

```
#include <math.h>
#include "complexe.h"

complexe complexe_init(double re, double im)
{
  complexe c;

  c.re = re;
  c.im = im;

  return c;
}

double complexe_re(complexe c)
{
  return c.re;
}

double complexe_im(complexe c)
{
  return c.im;
}
```

```
complexe complexe_somme(complexe a, complexe b)
{
  complexe c;

  c.re = a.re + b.re;
  c.im = a.im + b.im;

  return c;
}

complexe complexe_difference(complexe a, complexe b)
{
  complexe c;

  c.re = a.re - b.re;
  c.im = a.im - b.im;

  return c;
}

complexe complexe_produit(complexe a, complexe b)
{
  complexe c;

  c.re = a.re * b.re - a.im * b.im;
  c.im = a.re * b.im + a.im * b.re;

  return c;
}
```

```
double complexe_module(complexe a)
{
  return hypot(a.re, a.im);
}

double complexe_distance(complexe a, complexe b)
{
  return complexe_module(complexe_difference(a, b));
}
```

Fichier `complexe.h`:

```
typedef struct
{
  double re, im;
} complexe;

complexe complexe_init(double, double);
double   complexe_re(complexe);
double   complexe_im(complexe);
complexe complexe_somme(complexe, complexe);
complexe complexe_difference(complexe, complexe);
complexe complexe_produit(complexe, complexe);
double   complexe_module(complexe);
double   complexe_distance(complexe, complexe);
```

Le passage par variable

Dans certains cas, passer des arguments à une fonction par valeur présente des inconvénients:

- Si ces arguments sont de grande taille, recopier leur valeur consomme du temps d'exécution et nécessite de l'espace supplémentaire.
- La fonction ne peut pas retourner des données vers le code appelant par l'intermédiaire de ces arguments.

Une autre possibilité, que nous avons déjà mise en œuvre pour passer des tableaux à une fonction, est le passage d'arguments par variable. Cela consiste à transmettre à la fonction des pointeurs vers des données, plutôt que la valeur de celles-ci.

Les pointeurs

Rappel: Un pointeur vers une donnée représente l'endroit où cette donnée se trouve dans la mémoire de l'ordinateur.

Les pointeurs en langage C:

- Si `T` est un type quelconque, alors `T *` désigne le type d'un pointeur vers une valeur de type `T`.

  Note: Le type `void *` désigne un pointeur vers des valeurs de n'importe quel type.

- Si `v` est une variable, alors `&v` s'évalue en un pointeur vers `v`.

  Note: La variable `v` peut être primitive, un élément d'une variable de tableau, un champ d'une variable structurée, ou elle-même de type pointeur.

- Si *expr* est une expression s'évaluant en un pointeur p, alors `*`*expr* représente la valeur pointée par p.

Remarque importante: C'est au programmeur de s'assurer que *expr* pointe bien vers un emplacement valide de la mémoire lorsque `*expr` est évalué.

- Les pointeurs peuvent subir des affectations par le biais de l'opérateur `=`, et être comparés à l'aide de `==`.
- La valeur spéciale `NULL`, définie (entre autres) dans les fichiers d'en-tête `stdio.h` et `stdlib.h` , représente un pointeur vide, utile pour repérer des cas particuliers. Convertie en un entier, `NULL` vaut 0.

Exemple 1:

```
#include <stdio.h>

int main()
{
  int  a;
  int *p;  /* On aurait aussi pu écrire  int a, *p; */

  p = &a;  /* p pointe vers a */
 *p = 42;  /* L'objet pointé par p (c'est-à-dire a) prend la valeur 42 */

  printf("%d\n", a);  /* Affiche 42 */

  return 0;
}
```

Exemple 2: (passage d'arguments par variable)

```
#include <stdio.h>

/*  Permute les entiers pointés par p1 et p2.  */

void permuter(int *p1, int *p2)
{
  int aux;

  aux = *p1;
  *p1 = *p2;
  *p2 = aux;
}

int main()
{
  int a, b;

  a = 42;
  b = -7;

  printf("a = %d, b = %d\n", a, b);  /*  Affiche "a = 42, b = -7"  */
  permuter(&a, &b);
  printf("a = %d, b = %d\n", a, b);  /*  Affiche "a = -7, b = 42"  */

  return 0;
}
```

Exemple 3: La fonction `int scanf(const char *format, void *p1, void *p2, ...)` de la bibliothèque standard (fichier d'en-tête `stdio.h`) permet de lire depuis la console un certain nombre de valeurs spécifiées par la chaîne de format `format`. Ces valeurs sont placées par la fonction aux endroits désignés par les pointeurs `p1`, `p2`, ... La fonction retourne le nombre de valeurs effectivement lues, ou une valeur négative en cas d'erreur.

Les spécificateurs de type pouvant être utilisés dans la chaîne de format sont notamment "`%d`" (entier signé), "`%u`" (entier non signé) et "`%lf`" (réel en double précision).

Exemple:

```
int  m, n;

printf("Entrez deux valeurs entières: ");
scanf("%d %d", &m, &n);
```

Les pointeurs vers des données structurées

Dans les programmes C, on est souvent amené à manipuler des données structurées par l'intermédiaire de pointeurs.

Si `p` est un pointeur vers une donnée possédant un champ `c`, alors la notation

```
p -> c
```

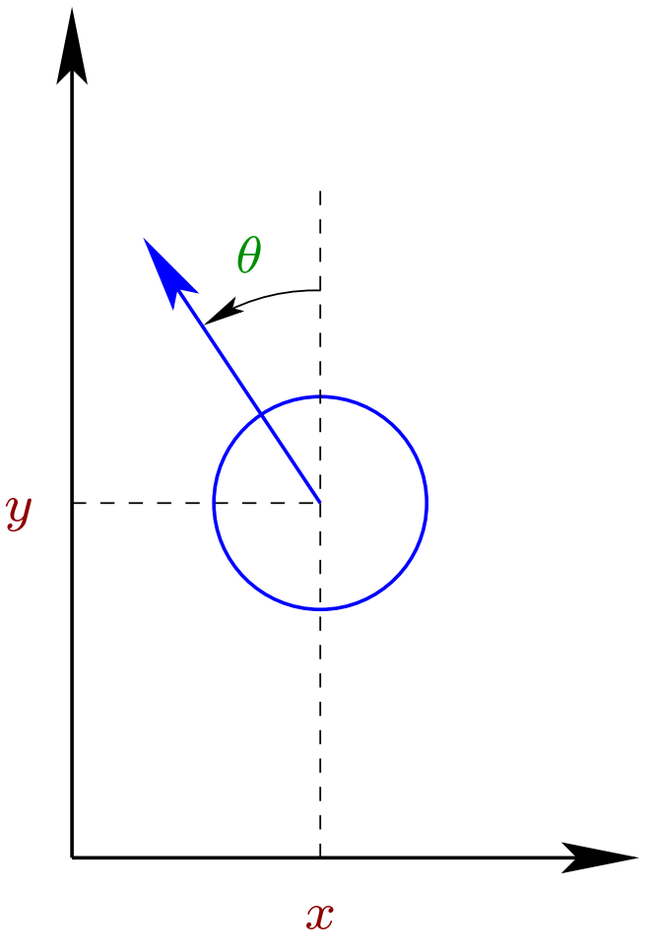
est une abréviation pour

```
(*p).c
```

,

et permet donc d'accéder au champ `c` de la donnée pointée par `p`.

Illustration: Bibliothèque de fonctions permettant de gérer la position et l'orientation d'un objet mobile dans un espace à deux dimensions.



Fichier configuration2d.c:

```
#include <math.h>
#include "configuration2d.h"

/*
    Retourne un angle équivalent à <angle>, mais appartenant à
    l'intervalle [-PI, PI[.
*/

static double normaliser_angle(double angle)
{
  double r;

  r = fmod(angle, 2.0 * M_PI);
  if (r < -M_PI)
    r += 2.0 * M_PI;
  else
    if (r >= M_PI)
      r -= 2.0 * M_PI;

  return  r;
}

/*
    Initialise la configuration *<c> avec la position (<x>, y>) et
    l'orientation <theta>.
 */
```

```
void init_configuration(configuration *c, double x, double y, double theta)
{
  c -> x = x;
  c -> y = y;
  c -> theta = normaliser_angle(theta);
}

/*
    Met à jour la configuration *<c> après un déplacement de longueur <l>
    dans la direction courante.
 */

void deplacer_configuration(configuration *c, double l)
{
  c -> x -= l * sin(c -> theta);
  c -> y += l * cos(c -> theta);
}

/*
    Met à jour la configuration *<c> après une rotation d'angle <angle>.
 */

void tourner_configuration(configuration *c, double angle)
{
  c -> theta = normaliser_angle(c -> theta + angle);
}
```

Fichier `configuration2d.h`:

```
typedef struct
{
  double x, y;   /* position */
  double theta;  /* orientation */
} configuration;

void   init_configuration(configuration *, double, double, double);
void   deplacer_configuration(configuration *, double);
void   tourner_configuration(configuration *, double);
```

Note: La fonction `fmod(`x`, `y`)` de la bibliothèque standard permet de calculer le reste de la division de x par y, et retourne un résultat de même signe que x. Son prototype figure dans le fichier d'en-tête `math.h`.

Les pointeurs et les tableaux

Nous avons vu au chapitre 5 que, si `v` est une variable définie comme un vecteur, alors

- l'expression `v` fournit un pointeur vers le premier élément `v[0]` de ce vecteur, et
- une expression de la forme `v + i`, où i est un entier, représente un pointeur vers le $(i+1)$-ème élément `v[i]` du vecteur.

On en déduit que

- les expressions `v` et `&v[0]` sont équivalentes.
- les expressions `v + i` et `&v[i]` sont elles aussi équivalentes.
- si `T` est un type quelconque, alors des déclarations d'un paramètre `a` d'une fonction de la forme `T *a` et `T a[]` sont équivalentes, et peuvent être utilisées indifféremment.

Illustration:

```
/*
    Retourne la longueur de la chaîne de caractères <s>.
 */

unsigned strlen(char *s)
{
  unsigned l = 0;

  while (*s++)
    l++;

  return l;
}
```

Remarques:

- Une fonction similaire est définie dans la bibliothèque standard. (Le fichier d'en-tête correspondant est `string.h`.)
- Dans l'expression `*s++`, l'opérateur `++` est prioritaire sur l'opérateur `*`.

L'allocation dynamique de mémoire

Beaucoup d'applications sont amenées à traiter des données dont la taille n'est pas connue au moment de la compilation du programme.

On utilise alors des fonctions de la bibliothèque standard, permettant au cours de l'exécution du programme d'allouer des blocs de mémoire de taille arbitraire, de les redimensionner, et de les libérer lorsqu'ils ne sont plus utiles.

Aperçu:

- La fonction `void *malloc(unsigned n)` tente d'allouer un nouveau bloc de `n` octets, et retourne un pointeur vers ce bloc (ou `NULL` en cas d'erreur).
- La fonction `void *realloc(void *p, unsigned n)` tente de redimensionner le bloc pointé par `p` (qui doit précédemment avoir été alloué), afin de lui donner la nouvelle taille `n`. Cette opération peut déplacer le bloc. Cette fonction retourne un pointeur vers le nouvel emplacement du bloc, ou `NULL` en cas d'erreur.

- La fonction `void free(void *p)` libère le bloc pointé par `p` (qui doit précédemment avoir été alloué).

Notes:

- Les prototypes de ces fonctions sont définis dans le fichier d'en-tête standard `stdlib.h`.
- Les fonctions suivantes permettent de recopier le contenu de blocs de mémoire:
  - `void *memcpy(void *dest, void *src, unsigned n)` recopie `n octets` du bloc pointé par `src` vers le bloc pointé vers `dest`, et retourne `dest`. Les blocs `src` et `dest` ne peuvent pas se chevaucher.
  - `void *memmove(void *dest, void *src, unsigned n)` effectue la même opération, mais sur des blocs `src` et `dest` qui peuvent se chevaucher.

  Leurs prototypes se trouvent dans le fichier d'en-tête `string.h`.
- L'opérateur `sizeof`, appliqué à une variable ou à un type, retourne le nombre d'octets nécessaires au stockage de la variable ou d'une instance du type.

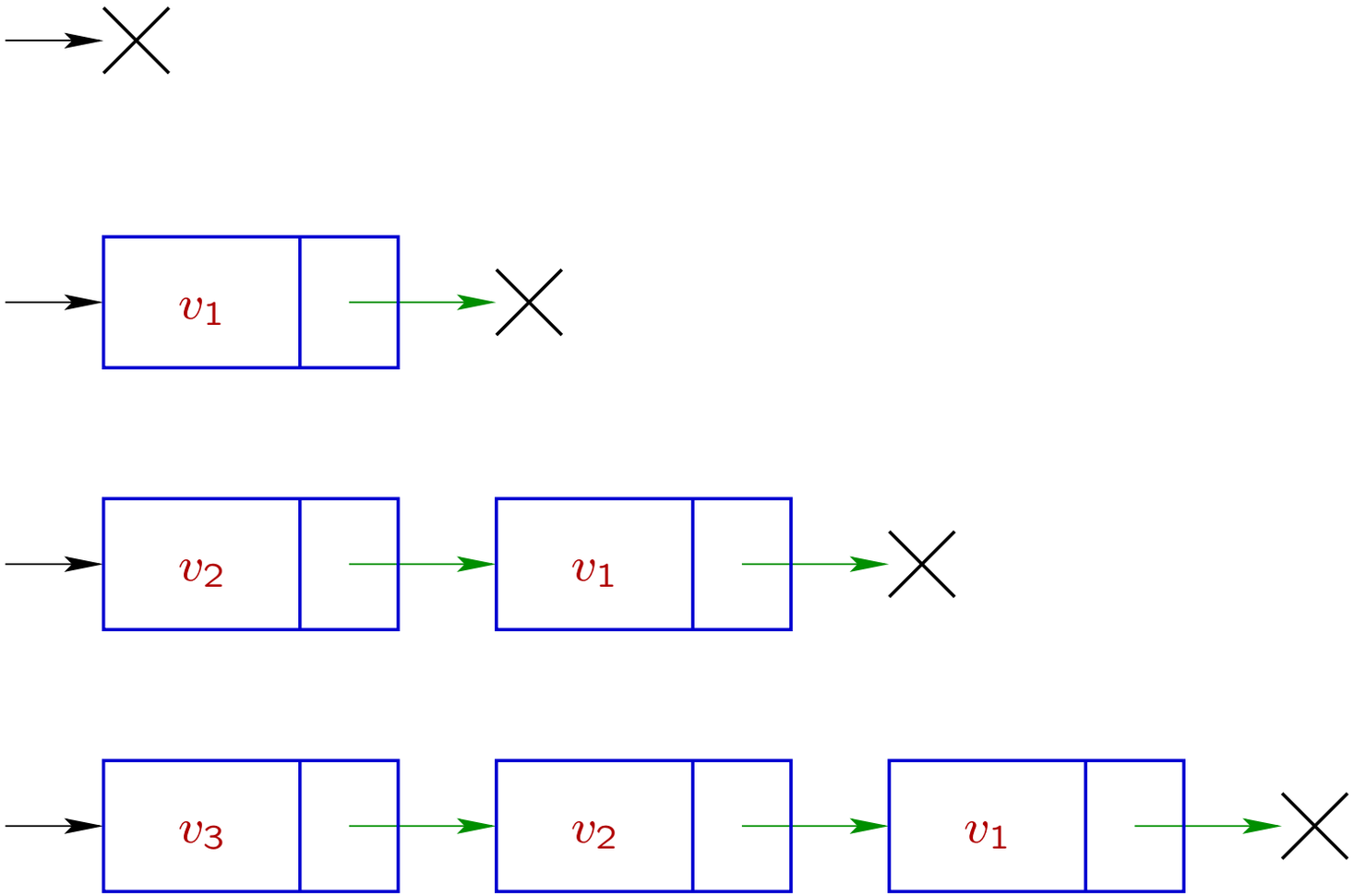
Exemple: Retournement d'une séquence de valeurs

Problème: Écrire un programme capable de lire au clavier un nombre arbitraire de valeurs, et de les restituer en ordre inverse.

Solution: On peut mémoriser les valeurs déjà lues sous la forme d'une liste simplement liée, c'est-à-dire une séquence d'éléments e_1, e_2, ..., e_p telle que:

- chaque élément e_i contient
  - une valeur lue, et
  - un pointeur vers l'élément suivant e_{i+1} (égal au pointeur vide dans le cas du dernier élément e_p).
- chaque valeur lue est représentée par un nouvel élément placé en tête de la liste (c'est-à-dire qu'il devient l'élément e_1).

Illustration: (Les valeurs v_1, v_2, v_3, ... sont lues dans cet ordre.)



Traduction en C:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct element_liste
{
  int valeur;
  struct element_liste *suivant;
};

/*
   Retourne une liste simplement liée contenant des valeurs lues au
   clavier, par ordre inverse de lecture. En cas d'erreur, interrompt
   l'exécution du programme.
 */

static struct element_liste *creer_liste(void)
{
  struct element_liste *liste, *nouvel_element;
  int valeur;

  for (liste = NULL;;)
    {
      printf("Entrez une valeur positive (ou négative pour terminer): ");
      if (scanf("%d", &valeur) != 1 || valeur < 0)
        return liste;
```

```
      nouvel_element = malloc(sizeof(struct element_liste));
      if (!nouvel_element)
        exit(-1);

      nouvel_element -> valeur = valeur;
      nouvel_element -> suivant  = liste;
      liste = nouvel_element;
    }
}

/*
   Affiche à l'écran les valeurs contenues dans la liste simplement
   liée <l>, dans l'ordre, et libère cette liste.
 */

static void afficher_et_liberer_liste(struct element_liste *l)
{
  struct element_liste *e, *e_suivant;

  for (e = l; e; e = e_suivant)
    {
      printf(" %d", e -> valeur);
      e_suivant = e -> suivant;
      free(e);
    }
}
```

```
int main()
{
  struct element_liste *liste;

  liste = creer_liste();

  printf("Liste retournée:");
  afficher_et_liberer_liste(liste);
  printf("\n");

  return 0;
}
```

Remarques:

- La fonction `void exit(int status)` (fichier d'en-tête `stdlib.h`) permet de terminer immédiatement l'exécution du programme, en retournant le code de diagnostic `status` à l'environnement.
- À la fin de l'exécution d'un programme, les blocs de mémoire encore alloués sont automatiquement libérés.

L'allocation dynamique de tableaux

Les mécanismes d'allocation dynamique de mémoire peuvent être utilisés afin d'allouer des tableaux dont la taille n'est connue qu'à l'exécution d'un programme.

- Tableaux unidimensionnels: Il suffit d'un seul appel à `malloc`, en calculant soigneusement la quantité de mémoire nécessaire.

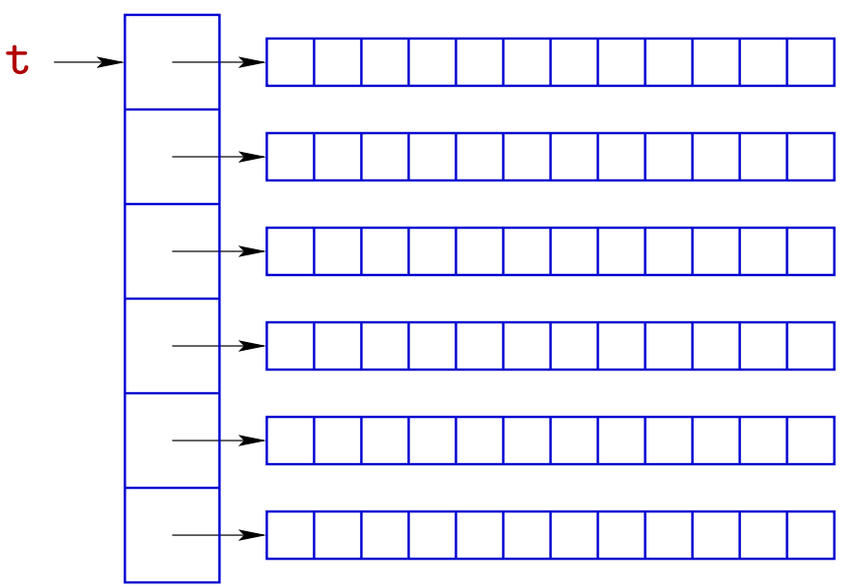
  Exemple:

```
int n;
double *v;

  ⋮

/*  Calcul de la taille n à donner au vecteur v. */

  ⋮

v = malloc(n * sizeof(double));

/*  On peut maintenant placer des valeurs dans  v[0], v[1], ..., v[n-1].  */
```

- Tableaux multidimensionnels: Si `t` est un tableau de dimension $d > 1$, alors `t[0]`, `t[1]`, ... contiennent des pointeurs vers des tableaux de dimension $d - 1$ représentant les lignes de `t`.

  Pour allouer `t`, il faut donc

  - allouer un vecteur destiné à contenir `t[0]`, `t[1]`, ...,
  - allouer récursivement des tableaux de dimension $d - 1$ correspondant aux lignes de `t`, et
  - placer des pointeurs vers ces tableaux dans les éléments du vecteur.



Exemple 1: Allocation d'un tableau triangulaire.

```
#include <stdlib.h>

/*  Alloue un tableau triangulaire t d'entiers, possédant un élément t[i][j]
 *  pour tout i dans l'intervalle [0, n-1] et j tel que 0 <= j <= i. Retourne
 *  un pointeur vers le tableau créé, ou NULL en cas d'erreur. */

int **creer_tableau_triangulaire(unsigned n)
{
  int      **t;
  unsigned   i, k;

  if (!(t = malloc(n * sizeof(int *))))
    return NULL;

  for (i = 0; i < n; i++)
    if (!(t[i] = malloc((i + 1) * sizeof(int))))
      {
        for (k = 0; k < i; k++)
          free(t[k]);

        free(t);
        return NULL;
      }

  return t;
}
```

Exemple 2: Bibliothèque de fonctions manipulant des matrices à composantes réelles.

Fichier `matrice.c`:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "matrice.h"

/*
   Crée une nouvelle matrice de n lignes et m colonnes, dont les
   éléments sont initialement nuls. Retourne un pointeur vers la
   matrice créée, ou NULL en cas d'erreur.
*/

matrice *creer_matrice(unsigned n, unsigned m)
{
  matrice  *r;
  unsigned  i, j;

  r = malloc(sizeof(matrice));
  if (!r)
    return NULL;

  r -> el = malloc(n * sizeof(double *));
```

```
  if (!(r -> el))
    {
      free(r);
      return NULL;
    }

  for (i = 0; i < n; i++)
    {
      r -> el[i] = malloc(m * sizeof(double));
      if (!(r -> el[i]))
        {
          for (j = 0; j < i; j++)
            free(r -> el[j]);
          free(r -> el);
          free(r);
          return NULL;
        }

      for (j = 0; j < m; j++)
        r -> el[i][j] = 0.0;
    }

  r -> n = n;
  r -> m = m;

  return r;
}
```

```
/*
   Libère l'espace mémoire occupé par la matrice m.
*/

void liberer_matrice(matrice *m)
{
  unsigned i;

  for (i = 0; i < m -> n; i++)
    free(m -> el[i]);

  free(m -> el);
  free(m);
}

/*
   Calcule la somme de deux matrices a et b. Retourne un pointeur vers une
   nouvelle matrice contenant cette somme, ou un pointeur vide en cas
   d'erreur.
*/

matrice *somme_matrices(matrice *a, matrice *b)
{
  matrice   *s;
  unsigned   i, j;

  if (a -> n != b -> n || a -> m != b -> m)
    return NULL;
```

```
  s = creer_matrice(a -> n, a -> m);
  if (!s)
    return NULL;

  for (i = 0; i < a -> n; i++)
    for (j = 0; j < a -> m; j++)
      s -> el[i][j] = a -> el[i][j] + b -> el[i][j];

  return s;
}

/*
   Calcule le produit de deux matrices a et b. Retourne un pointeur vers une
   nouvelle matrice contenant ce produit, ou un pointeur vide en cas
   d'erreur.
*/

matrice *produit_matrices(matrice *a, matrice *b)
{
  matrice   *p;
  unsigned   i, j, k;

  if (a -> m != b -> n)
    return NULL;

  p = creer_matrice(a -> n, b -> m);
```

```
  if (!p)
    return NULL;

  for (i = 0; i < a -> n; i++)
    for (j = 0; j < b -> m; j++)
      for (k = 0; k < a -> m; k++)
        p -> el[i][j] += a -> el[i][k] * b -> el[k][j];

  return p;
}
```

Fichier `matrice.h`:

```
/*  Représente une matrice réelle de n lignes et m colonnes  */

typedef struct
{
  double **el;
  unsigned n, m;
} matrice;

matrice *creer_matrice(unsigned, unsigned);
void     liberer_matrice(matrice *);
matrice *somme_matrices(matrice *, matrice *);
matrice *produit_matrices(matrice *, matrice *);
```

Les paramètres de `main`

Jusqu'à présent, nous avons défini la fonction `main`, qui représente le point d'entrée d'un programme C, sans lui attribuer de paramètres.

On peut cependant associer à cette fonction

- un paramètre entier, habituellement nommé `argc`, qui représente le nombre d'arguments fournis au programme par son environnement au moment de son exécution.
- un paramètre prenant la forme d'un tableau de chaînes de caractères, habituellement appelé `argv`, dont les éléments contiennent ces arguments.

Remarque: Dans la plupart des environnements d'exécution, le premier argument est toujours présent et contient le nom du programme exécuté.

Exemple: Programme affichant les arguments qui lui sont fournis.

```
#include <stdio.h>

int main(int argc, char *argv[])
{
  int i;

  printf("Les arguments du programme sont");

  for (i = 0; i < argc; i++)
    printf(" [%s]", argv[i]);

  printf(".\n");

  return 0;
}
```

Exemple de compilation et d'exécution (UNIX):

```
% gcc -o arguments arguments.c
% ./arguments 123 456 abc
Les arguments du programme sont [./arguments] [123] [456] [abc].
```

Chapitre 7

Les piles et les files

La pile

Définition: Une pile (*stack*) est une structure de données capable de retenir un ensemble de valeurs, accessibles selon une discipline LIFO (*Last In First Out*).

Interface:

- `push`(s, v): Empile la valeur v sur la pile s.
- `pop`(s): Dépile une valeur depuis la pile s, et retourne cette valeur. Signale une erreur si la pile est vide.
- `top`(s): Retourne la valeur présente au sommet de la pile s, sans la dépiler. Signale une erreur si la pile est vide.
- `size`(s): Retourne le nombre de valeurs présentes dans la pile s.
- `is_empty`(s): Détermine si le contenu de la pile s est vide.

Implémentation 1: Vecteur

Principes:

- Les valeurs contenues dans la pile sont placées dans les composantes successives d'un vecteur.
- Le nombre de valeurs présentes dans la pile est retenu séparément.
- Afin de permettre de mémoriser des valeurs de type quelconque, on ne retient que des pointeurs vers ces valeurs.
- Le nombre de valeurs pouvant être placées dans une pile est borné. Une erreur est signalée lorsque l'on tente d'appliquer une opération `push` à une pile saturée.

Implémentation en C

Fichier `stack.h`:

```
#define MAX_STACK_SIZE  1000

typedef struct
{
  void    *contents[MAX_STACK_SIZE];
  unsigned nb_values;
} stack;

stack   *stack_new(void);
void     stack_free(stack *);
int      stack_push(stack *, void *);
void    *stack_pop(stack *);
void    *stack_top(stack *);
unsigned stack_size(stack *);
int      stack_is_empty(stack *);
```

Fichier `stack.c`:

```
#include <stdlib.h>
#include "stack.h"

/*  Retourne une nouvelle pile vide, ou NULL en cas d'erreur.  */

stack *stack_new(void)
{
  stack *s;

  s = malloc(sizeof(stack));
  if (!s)
    return NULL;

  s -> nb_values = 0;

  return s;
}

/*  Libère la pile <s>.  */

void stack_free(stack *s)
{
  free(s);
}
```

```
/*  Empile le pointeur <p> sur la pile <s>.  Retourne 0 en cas de succès,
    ou -1 si la pile est saturée.  */

int stack_push(stack *s, void *p)
{
  if (s -> nb_values >= MAX_STACK_SIZE)
    return -1;

  s -> contents[s -> nb_values++] = p;
  return 0;
}

/*  Dépile un pointeur depuis la pile <s> et retourne ce pointeur,
    ou NULL si la pile est vide.  */

void *stack_pop(stack *s)
{
  if (!(s -> nb_values))
    return NULL;

  return s -> contents[--(s -> nb_values)];
}

/*  Retourne le pointeur au sommet de la pile <s>, sans le dépiler,
    ou NULL si la pile est vide.  */
```

```
void *stack_top(stack *s)
{
  if (!(s -> nb_values))
    return NULL;

  return s -> contents[s -> nb_values - 1];
}

/*  Retourne le nombre d'éléments présents dans la pile <s>.  */

unsigned stack_size(stack *s)
{
  return s -> nb_values;
}

/*  Détermine si la pile <s> est vide.  */

int stack_is_empty(stack *s)
{
  return s -> nb_values == 0;
}
```

Exemple de programme de test

```
#include <stdio.h>
#include "stack.h"

int main()
{
  int    i = 10, i2;
  double d = 3.1416, d2;
  stack *s;

  s = stack_new();
  if (!s || stack_push(s, &i) || stack_push(s, &d))
    return -1;

  d2 =  *((double *) stack_pop(s));
  i2 =  *((int *) stack_pop(s));

  printf("valeurs dépilées: %lf, %d.\n", d2, i2);

  stack_free(s);

  return 0;
}
```

Exemple d'application

Problème: Étant donné un fichier contenant un texte composé de

- parenthèses de différentes sortes: (,), [,], {, }, et
- d'autres caractères,

déterminer si les parenthèses sont correctement appariées dans ce texte.

Exemples:

- `[- (b) + sqrt(4 * (a) * (c))] / (2 * a)` $\longrightarrow$ oui
- `((x) + (y)] / 2` $\longrightarrow$ non

Solution: On exécute l'algorithme suivant:

1. On crée une pile, initialement vide.
2. On examine les caractères du fichier, dans l'ordre. Pour chaque caractère c:
   - Si c n'est pas une parenthèse, alors on l'ignore.
   - Si c est une parenthèse gauche, alors on l'empile.
   - Si c est une parenthèse droite, alors:

   (a) On dépile un caractère c'.

   (b) Si cette opération échoue (pile vide), ou si c' n'est pas le caractère symétrique de c, alors on signale une erreur.
3. S'il reste des caractères dans la pile après avoir examiné la totalité du fichier, alors on signale une erreur.

Traduction en C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "stack.h"

static void verifie_parenthese(stack *s, char c, unsigned ligne, unsigned col)
{
  char *p;

  p = stack_pop(s);
  if (!p || *p != c)
    printf("erreur: Symbole incorrect ligne %u, colonne %u.\n", ligne, col);
  free(p);
}

static void verifie_fichier(FILE *f)
{
  stack    *s;
  unsigned  num_ligne, num_col;
  char      c, *p;

  s = stack_new();
  if (!s)
    exit(-1);
```

```
for (num_ligne = num_col = 1;; num_col++)
  {
    c = fgetc(f);  /* Lecture d'un caractère dans le fichier. */
    switch (c)
      {
      case EOF:    /* Fin du fichier. */
        if (!stack_is_empty(s))
          {
            printf("erreur: %d symbole(s) encore ouvert(s) en fin de fichier.\n",
                   stack_size(s));
            while (stack_size(s))
              free(stack_pop(s));
          }

        stack_free(s);
        return;

      case '\n':
        num_ligne++;
        num_col = 0;
        break;

      case '(':
      case '[':
      case '{':
        p = malloc(1);
        if (!p)
          exit(-1);
```

```
          *p = c;

          if (stack_push(s, p))
            exit(-1);
          break;

        case ')':
          verifie_parenthese(s, '(', num_ligne, num_col);
          break;

        case ']':
          verifie_parenthese(s, '[', num_ligne, num_col);
          break;

        case '}':
          verifie_parenthese(s, '{', num_ligne, num_col);
          break;
        }
    }
}

int main(int argc, char *argv[])
{
  FILE *f;

  if (argc != 2)
    {
      printf("usage: %s <nom-fichier>\n", argv[0]);
```

```
      exit(-1);
    }

  f = fopen(argv[1], "r");  /* Ouverture d'un fichier en lecture. */
  if (!f)
    {
      printf("impossible d'ouvrir le fichier [%s]\n", argv[1]);
      exit(-1);
    }

  verifie_fichier(f);

  fclose(f);  /* Fermeture du fichier. */
  exit(0);
}
```

Implémentation 2: Liste simplement liée

Principes:

- Les valeurs placées dans la pile sont retenues dans une liste simplement liée (*Linked List*, cf. chapitre 6).
- L'opération `push` place son nouvel élément en tête de liste.
- Les opérations `pop` et `top` travaillent également en tête de liste.
- On mémorise séparément le nombre de valeurs présentes dans la pile.

Avantage: Les éléments de la liste peuvent être alloués à la demande, ce qui permet d'adapter l'espace mémoire consommé par la structure à l'utilisation qui en est faite.

Implémentation en C

Fichier `stack-ll.h`:

```
typedef struct _stack_element
{
  void                  *content;
  struct _stack_element *next;
} stack_element;

typedef struct
{
  stack_element *first;
  unsigned       nb_values;
} stack;

stack   *stack_new(void);
void     stack_free(stack *);
int      stack_push(stack *, void *);
void    *stack_pop(stack *);
void    *stack_top(stack *);
unsigned stack_size(stack *);
int      stack_is_empty(stack *);
```

Fichier `stack-ll.c`:

```
#include <stdlib.h>
#include "stack-ll.h"

/*  Retourne une nouvelle pile vide, ou NULL en cas d'erreur.  */

stack *stack_new(void)
{
  stack *s;

  s = malloc(sizeof(stack));
  if (!s)
    return NULL;

  s -> first = NULL;
  s -> nb_values = 0;

  return s;
}

/*  Libère la pile <s>.  */

void stack_free(stack *s)
{
  stack_element *e, *e_next;
```

```
  for (e = s -> first; e; e = e_next)
    {
      e_next = e -> next;
      free(e);
    }

  free(s);
}

/*  Empile le pointeur <p> sur la pile <s>.  Retourne 0 en cas de succès,
    ou -1 en cas d'insuffisance mémoire.  */

int stack_push(stack *s, void *p)
{
  stack_element *e;

  e = malloc(sizeof(stack_element));
  if (!e)
    return -1;

  e -> content = p;
  e -> next = s -> first;
  s -> first = e;
  s -> nb_values++;

  return 0;
}
```

```
/*  Dépile un pointeur depuis la pile <s> et retourne ce pointeur,
    ou NULL si la pile est vide.  */

void *stack_pop(stack *s)
{
  stack_element *e;
  void          *p;

  if (!(s -> first))
    return NULL;

  e = s -> first;
  p = e -> content;

  s -> first = e -> next;
  s -> nb_values--;

  free(e);

  return p;
}
```

```
/*  Retourne le pointeur au sommet de la pile <s>, sans le dépiler,
    ou NULL si la pile est vide.  */

void *stack_top(stack *s)
{
  if (!(s -> first))
    return NULL;

  return s -> first -> content;
}

/*  Retourne le nombre d'éléments présents dans la pile <s>.  */

unsigned stack_size(stack *s)
{
  return s -> nb_values;
}

/*  Détermine si la pile <s> est vide.  */

int stack_is_empty(stack *s)
{
  return s -> nb_values == 0;
}
```

La file d'attente

Définition: Une file d'attente (*queue, FIFO buffer*) est une structure de données capable de retenir un ensemble de valeurs, accessibles selon une discipline FIFO (First In First Out).

Interface:

- `send`(q, v): Ajoute la valeur v au contenu de la file q.
- `receive`(q): Retire une valeur de la file q, et retourne cette valeur. Signale une erreur si la file est vide.
- `front`(q): Retourne la valeur présente au début de la file q, sans la retirer. Signale une erreur si la file est vide.
- `size`(q): Retourne le nombre de valeurs présentes dans la file q.
- `is_empty`(q): Détermine si le contenu de la file q est vide.

Implémentation 1: Vecteur

Principes:

- Les valeurs contenues dans la file sont mémorisées dans un vecteur.
- Si N est la taille de ce vecteur, alors les valeurs ajoutées à la la file sont placées à des indices croissants modulo N de ce vecteur.
- Des champs f et r situent respectivement les indices dans le vecteur:
  - de la valeur la plus ancienne (c'est-à-dire, la première qui quittera la file), et
  - du premier emplacement libre (c'est-à-dire, l'endroit où l'on placera la prochaine valeur ajoutée à la file).
- Initialement, on a $f = r = 0$.

Problème : Les situations où l'on a $f = r$ sont ambiguës.

Solution : On limite le nombre d'objets présents dans la file à $N - 1$.

Implémentation en C

Fichier `queue.h`:

```
#define MAX_QUEUE_SIZE  1000

typedef struct
{
  void    *contents[MAX_QUEUE_SIZE];
  unsigned front, rear;
} queue;

queue   *queue_new(void);
void     queue_free(queue *);
int      queue_send(queue *, void *);
void    *queue_receive(queue *);
void    *queue_front(queue *);
unsigned queue_size(queue *);
int      queue_is_empty(queue *);
```

Fichier queue.c:

```
#include <stdlib.h>
#include "queue.h"

/*  Retourne une nouvelle file vide, ou NULL en cas d'erreur.  */

queue *queue_new(void)
{
  queue *q;

  q = malloc(sizeof(queue));
  if (!q)
    return NULL;

  q -> front = 0;
  q -> rear = 0;

  return q;
}

/*  Libère la file <q>.  */

void queue_free(queue *q)
{
  free(q);
}
```

```
/*  Ajoute le pointeur <p> à la file <q>.  Retourne 0 en cas de succès,
    ou -1 si la file est saturée.  */

int queue_send(queue *q, void *p)
{
  if (queue_size(q) >= MAX_QUEUE_SIZE - 1)
    return -1;

  q -> contents[q -> rear] = p;
  q -> rear = (q -> rear + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;

  return 0;
}

/*  Retire un pointeur depuis la file <q> et retourne ce pointeur,
    ou NULL si la file est vide.  */

void *queue_receive(queue *q)
{
  void *p;

  if (q -> front == q -> rear)
    return NULL;

  p = q -> contents[q -> front];
  q -> front = (q -> front + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;

  return p;
}
```

```
/*  Retourne le pointeur en tête de la file <q>, sans le retirer,
    ou NULL si la file est vide.  */

void *queue_front(queue *q)
{
  if (q -> front == q -> rear)
    return NULL;

  return q -> contents[q -> front];
}

/*  Retourne le nombre d'éléments présents dans la file <q>.  */

unsigned queue_size(queue *q)
{
  return (MAX_QUEUE_SIZE + q -> rear - q -> front) % MAX_QUEUE_SIZE;
}

/*  Détermine si la file <q> est vide.  */

int queue_is_empty(queue *q)
{
  return q -> front == q -> rear;
}
```

Implémentation 2: Liste simplement liée

Principes:

- Le contenu de la file est représenté par une liste simplement liée de pointeurs.
- Les valeurs ajoutées à la file sont placées en fin de liste.
- Des champs `head` et `tail` maintiennent des pointeurs vers les éléments situés respectivement au début et à la fin de la liste.
- On mémorise le nombre de valeurs présentes dans la file dans un champ séparé.

Implémentation en C

Fichier `queue-ll.h`:

```
typedef struct _queue_element
{
  void                  *content;
  struct _queue_element *next;
} queue_element;

typedef struct
{
  queue_element *head, *tail;
  unsigned       nb_values;
} queue;

queue   *queue_new(void);
void     queue_free(queue *);
int      queue_send(queue *, void *);
void    *queue_receive(queue *);
void    *queue_front(queue *);
unsigned queue_size(queue *);
int      queue_is_empty(queue *);
```

Fichier queue-ll.c:

```
#include <stdlib.h>
#include "queue-ll.h"

/*  Retourne une nouvelle file vide, ou NULL en cas d'erreur.  */

queue *queue_new(void)
{
  queue *q;

  q = malloc(sizeof(queue));
  if (!q)
    return NULL;

  q -> head = NULL;
  q -> tail = NULL;
  q -> nb_values = 0;

  return q;
}

/*  Libère la file <q>.  */

void queue_free(queue *q)
{
  queue_element *e, *e_next;
```

```
  for (e = q -> head; e; e = e_next)
    {
      e_next = e -> next;
      free(e);
    }

  free(q);
}

/*  Ajoute le pointeur <p> à la file <q>.  Retourne 0 en cas de succès,
    ou -1 en cas d'insuffisance mémoire.  */

int queue_send(queue *q, void *p)
{
  queue_element *e;

  e = malloc(sizeof(queue_element));
  if (!e)
    return -1;

  e -> content = p;
  e -> next = NULL;

  if (q -> tail)
    q -> tail -> next = e;
  else
    q -> head = e;
```

```
  q -> tail = e;
  q -> nb_values++;

  return 0;
}

/*  Extrait un pointeur de la file <q> et retourne ce pointeur,
    ou NULL si la file est vide.  */

void *queue_receive(queue *q)
{
  queue_element *e;
  void          *p;

  if (!(q -> head))
    return NULL;

  e = q -> head;
  p = e -> content;

  q -> head = e -> next;
  if (!--(q -> nb_values))
    q -> tail = NULL;

  free(e);

  return p;
}
```

```
/*  Retourne le pointeur en tête de la file <q>, sans le retirer,
    ou NULL si la file est vide.  */

void *queue_front(queue *q)
{
  if (!(q -> head))
    return NULL;

  return q -> head -> content;
}

/*  Retourne le nombre d'éléments présents dans la file <q>.  */

unsigned queue_size(queue *q)
{
  return q -> nb_values;
}

/*  Détermine si la file <q> est vide.  */

int queue_is_empty(queue *q)
{
  return q -> nb_values == 0;
}
```