Résolution type des exercices

Synthèse portant sur le cours *Analyse Numérique*

Document rédigé par **David Taralla**
2e Bachelier en Sciences Informatiques

Dernière version : 20 mars 2011

Préambule

Ce document explique les manières de résoudre les exercices donnés aux répétitions. La liste n'est **pas** exhaustive : elle couvre les exercices des répétitions portant sur les approximations, la dérivation et l'intégration numériques et les erreurs liées aux systèmes linéaires. Des formules sont utilisées tout au long de cette synthèse : celles qu'il ne faut pas étudier parce qu'elles sont disponibles dans le formulaire sont renseignées en fin de PDF.

Table des matières

1 Approximations **4**
1.1 Précision et nombre de termes dans Taylor 4
1.2 Précision et polynôme quadratique 4
1.3 Application de la méthode des moindres carrés 4
1.4 Ordre de convergence d'une méthode itérative 5
1.5 Détermination du polynôme de régression optimal 6

2 Dérivation **8**
2.1 Déterminer le terme d'erreur d'une formule 8

3 Intégration **9**
3.1 Intégration à partir de points 9
3.2 Application de l'algorithme de Romberg 9

4 Systèmes linéaires **10**
4.1 Interprétation des résultats de la résolution d'un système linéaire 10
4.2 Précision relative 10

5 Formules à connaître ? **11**

1 Approximations

1.1 Combien de termes du développement de Taylor sont requis pour avoir une certaine approximation d'une fonction $u : x \longmapsto u(x)$ en un point x (fixé, donné) à partir de sa valeur en un point x_0 (fixé, donné) pour obtenir une précision de l'ordre de 10^{-m} ?

1. On rappelle tout d'abord le Théorème de Taylor :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} D^k u(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} D^n u(\mu) \tag{1}$$

2. On développe quelques termes, 4-5 par exemple ;
3. On borne le *terme d'erreur* $\frac{(x-x_0)^n}{n!} D^n u(\mu)$ et on regarde si cette borne est inférieure à la précision 10^{-m} demandée. Si oui on passe au point 4 ; si non, on recommence l'étape 3 avec un terme en plus ;
4. *Réponse :* Le nombre de termes pour arriver à cette précision.

1.2 En utilisant un polynôme quadratique, quelle précision obtient-on sur la fonction $u : x \longmapsto u(x)$ en x_0 (fixé, donné) ?

1. On rappelle que si n est le nombre de points à interpoler (donnés), l'erreur commise par l'interpolation en x est définie comme

$$e(x) = |u(x) - P(x)| = \left| \frac{D^n u(\mu)}{n!} (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \right| \tag{2}$$

2. On calcule l'erreur commise en x_0 ($e(x_0)$) et on la borne par B ;
3. *Réponse :* « L'erreur maximale commise est de B. »

1.3 On donne des points $(x_1, u(x_1)), (x_2, u(x_2)), \dots, (x_n, u(x_n))$ et on demande de déterminer par la méthode des moindres carrés les coefficients a et b tels que $u(x) = ax + b$.

1. Il faut minimiser l'erreur commise par la régression grâce à la méthode des moindres carrés. Si on baptise U la régression, et si u désigne la fonction réelle de l'énoncé, on a

$$e_i = U(x_i) - u(x_i) = ax_i + b - u(x_i) \tag{3}$$

2. Donc il faut minimiser

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - u(x_i))^2 \tag{4}$$

3. Annuler les dérivées partielles pour déduire ce que l'on appelle les *équations normales* (les variables ici ce sont a et b, ne vous méprenez pas !) :

$$\begin{cases} D_a E = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - u(x_i))x_i) = 0 \\ D_b E = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - u(x_i))) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

4. On réécrit cela sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + \sum_{i=1}^{n} bx_i = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{n} ax_i + nb = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} u(x_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \end{pmatrix}$$

5. On remplace par les valeurs numériques connues et on obtient un système de deux équations à deux inconnues. On le résout de manière standard avec Cramer et cela nous donne a et b.
6. *Réponse :* « Si on la considère linéairement, la relation s'écrit $U(x) = ax + b$. »

1.4 Soit une suite de n itérés (fixés, donnés) sortis d'une itération quelconque. Si les itérés x_n convergent vers $\bar{x}$ (fixé, donné), trouver l'ordre de convergence de la méthode.

1. On rappelle tout d'abord que l'erreur commise à chaque itération est

$$e_n \approx C e_{n-1}^p \tag{6}$$

Pour information, cette formule s'obtient en utilisant la relation suivante, présente dans le cours :

$$e_n = |x_n - \bar{x}| \leq C_0 C^{pn}$$

où $C \leq 1$, p est l'ordre de convergence et C_0 une constante. En effet,

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} & e_n \leq e_{n-1}^p & \text{alors} & e_n & \leq e_{n-2}^{2p} \\ & & & & \leq e_{n-3}^{3p} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \leq e_0^{np} \end{array}$$

C'est tout ce que j'ai pour la justifier...

2. On répertorie les erreurs commises à chaque itération sous la forme d'une table (voir exemple Table 1), et ce à partir des données de l'énoncé.

Table 1 – Répertorier les erreurs commises

x_i	e_i
x_1	$e_1 = \lvert\bar{x} - x_1\rvert$
x_2	$e_2 = \lvert\bar{x} - x_2\rvert$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$e_n = \lvert\bar{x} - x_n\rvert$

3. On a ensuite

$$\begin{array}{lllllllll} \text{Si} & e_n = Ce_{n-1}^p & \text{alors} & \ln e_n & = & \ln C & + & p & \ln e_{n-1} \\ & & & & = & C' & + & p & \ln e_{n-1} \\ & & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & & & & = & b & + & a & x \end{array}$$

4. Il nous faut trouver la valeur de p. Pour ce faire, on utilise la méthode des moindres carrés (voir point 1.3).
5. *Réponse :* « L'ordre de convergence de la méthode itérative est $[p]$ ».

1.5 Soient les polynômes de degrés inférieur ou égal à n définis sur $[a, b]$. On nous donne les points $(x_1, u(x_1))$, $(x_2, u(x_2)), \ldots, (x_m, u(x_m))$ avec un certain produit scalaire $\langle p, q \rangle$. Trouver les meilleurs polynômes qui approximent u pour les degrés 1, 2, k ($k < n$), et à l'aide de la variance, déterminer le degré optimal pour la régression.

1. Pour trouver une base orthogonale des polynômes de degré inférieur ou égal à n, on peut utiliser l'algorithme de Gram-Schmit qui est donné

dans l'énoncé. On l'applique à la base canonique ($\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$) et on trouve les n q_i, éléments de la nouvelle base.

2. Ainsi on trouve les a_i en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} \langle q_0, q_0\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle q_1, q_1\rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle q_n, q_n\rangle \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, q_0\rangle \\ \langle u, q_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

3. Le meilleur polynôme de degré 0 est donné par $r_0 = a_0$ [1]
   Le meilleur polynôme de degré 1 est donné par $r_1 = a_0 + a_1 q_1$
   ...
   Le meilleur polynôme de degré k est donné par $r_k = a_0 + a_1 q_1 + \cdots + a_k q_k$
4. Déterminer les variances de $r_0, r_1, \ldots, r_k$ grâce à la formule

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n+1}\left(\langle u, u\rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle u, q_i\rangle^2}{\langle q_i, q_i\rangle}\right) \tag{7}$$

5. *Réponse :* Donner degré optimal du polynôme de régression, qui est le degré à partir duquel la variance ne diminue plus de manière significative.

1. Vu que $q_0 = p_0 = 1$ par Gram-Shmit, on peut l'éluder.

2 Dérivation

2.1 On nous demande de déterminer le terme d'erreur d'une formule de dérivation d'ordre numérique k donnée.

1. On développe les termes de la formule de dérivation (les $f(x+ah)$) avec Taylor jusqu'à la dérivée $k+1$-ième en un point intermédiaire ;
2. On se dém... brouille pour isoler $D^k f$ dans le membre de gauche en retombant, dans le membre de droite, sur la formule donnée. Un terme supplémentaire apparaît dans le membre de droite : c'est le terme d'erreur de la formule donnée.
3. *Réponse :* On donne le terme d'erreur et on le « borne »(la plupart du temps, dire qu'il est *d'ordre h* suffit).

3 Intégration

3.1 Établir une formule d'intégration à partir de points $(x_1, u(x_1))$, $(x_2, u(x_2))$, ... données.

1. Interpoler une fonction par ces points grâce à la méthode de Lagrange (*présente dans le formulaire*)
2. *Réponse :* Il suffit de trouver une primitive de ce polynôme d'interpolation et de la faire varier.

3.2 Appliquer l'algorithme de Romberg sur un intervalle $[a, b]$ pour des pas h donnés (fractions de $b-a$, comme les $h_i = \frac{1}{2^i}(b-a)$).

1. Par la méthode des trapèzes, calculer $I_{0,0}$, $I_{1,0}$, $I_{2,0}$, ..., $I_{n-1,0}$ (seul le pas change d'un calcul à l'autre). On a

$$I_{i,0} = h_i \left(\frac{u(a) + u(b)}{2} + u(a + h_i) + u(a + 2h_i) + \cdots + u(b - h_i) \right) \quad (8)$$

2. Ensuite, sachant que

$$I_{i,j} = \frac{I_{i,j-1} - \frac{1}{2^{2j}} I_{i-1,j-1}}{1 - \frac{1}{2^{2j}}} \quad (9)$$

   On calcule les $I_{i,1}$ (avec $i \geq 1$), puis les $I_{i,2}$ (avec $i \geq 2$), etc. jusqu'à $I_{n-1,n-1}$.
3. *Réponse :* La réponse, c'est tout l'exercice d'application de l'algorithme. On peut dire que $I_{n-1,n-1}$ est la meilleure approximation de la valeur réelle de l'intégrale.

4 Systèmes linéaires

4.1 Soit le système linéaire $Ax = b$ dont on nous donne la solution. On nous propose des approximations dont plusieurs sont mauvaises : interpréter les résultats.

1. Calculer les résidus des approximations, c'est à dire la valeur effectivement calculée diminuée de la valeur de l'approximation.
2. *Réponse :* Justifier la non précision de certains résultats en calculant le nombre de conditionnement κ de la matrice A grâce à la formule

$$\kappa = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \tag{10}$$

et en soulignant le fait qu'il est très élevé.

4.2 Soit le système linéaire $Ax = b$ avec b arrondi et A exacte. Calculer la précision relative sur x.

1. Cela revient à calculer l'erreur commise sur x lorsqu'on résout $Ax = b+\delta b$.
2. On sait que la pire erreur d'arrondi que l'on peut effectuer sur un nombre à n décimales à arrondir à $m < n$ chiffres après la virgule est $\frac{1}{2}10^{-m}$ (par exemple, arrondir à un chiffre après la virgule 0.15 : la pire erreur que l'on peut commettre c'est $\frac{1}{2}10^{-1} = 0.05$).
3. Ainsi on construit δb avec tous ses éléments égaux à la pire erreur d'arrondi qu'on puisse commettre.
4. Utiliser l'inégalité suivante pour borner l'erreur :

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \tag{11}$$

5. *Réponse :* La réponse s'exprime en pourcents, et sa valeur vaut le membre de droite de l'équation 11.

5 Formules à connaître ?

J'ai répertorié ici quelles formules parmi celles citées dans ce document doivent être étudiées et lesquelles sont disponibles dans le formulaire distribué. Méfiez-vous cependant du formulaire : M. Louveaux ne précise jamais à quoi correspondent les lettres et indices qu'il utilise.

Équation 1 : Le développement de Taylor est donné à l'examen, mais sous une forme différente de celle présentée ici. Conseil : étudiez quand même cette forme-ci, on ne sait jamais que vous en auriez besoin.

Équation 2 : Fait partie du formulaire.

Équation 3 : Donnée en toute généralité dans le formulaire sous le doux nom de *Régression (non-)linéaire*. Dans celui-ci, il suffit de prendre $k = 2$, $\phi_1 = 1$ et $\phi_2 = x$.

Équation 5 : À connaître. On retombe facilement dessus en dérivant $E(a, b)$ par rapport à a et à b.

Équation 6 : À connaître.

Équation 7 : Fait partie du formulaire.

Équation 8 : À connaître. Elle peut facilement être retrouvée en faisant un dessin et en se rappelant que l'aire d'un trapèze est donnée par $A = \frac{(b+B)}{2}h$.

Équation 9 : À connaître. Cependant, la formule de l'*Extrapolation de Richardson* est disponible : la formule de l'*Algorithme de Romberg* correspondant exactement à celle de l'*Extrapolation de Richardson*, à ceci près que les q^j doivent être remplacés par des q^{2j}, c'est comme s'il nous la donnait. Rappel : q est un nombre compris strictement entre 0 et 1.

Équation 10 : Fait partie du formulaire. Les formules de calcul des quatre normes d'une matrice A sont aussi données.