La convergence en norme $\mathcal{L}^2$?

La convergence des séries de Fourier est une convergence en **norme**, donc une convergence d'**aire** et non point par point de la fonction. Quand on approche une fonction de carré intégrable, la convergence en **norme** de la série de Fourier qui lui est associée est garantie. Par contre pas la convergence ponctuelle = *point par point sur le domaine de définition* (voir pages 74 et 75, Propriétés 4.3.3 & 4.3.4).

Mais ça veut dire quoi, convergence en norme ? On sait que calculer la norme de f ($f \in \mathcal{L}^2([a;b])$) , c'est calculer

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \int_a^b f(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

Donc c'est bien calculer une **aire**.

La définition mathématique de la convergence en norme dans $\mathcal{L}^2([a;b])$ est la suivante (tirée du cours !) :

$$\lim_{M\to+\infty} \int_a^b |f(x) - S_M(x)|^2\,dx = 0$$

Avec, $\forall M \in \mathbb{N}_0$,

$$S_M(x) = r_0 u_0(x) + \sum_{m=1}^{M} r_m u_m(x) + s_m v_m(x)$$

Cette expression mathématique est très simple. Elle ressemble un peu à la méthode des moindres carrés utilisée pour démontrer que l'erreur d'une régression linéaire est la plus petite (voir cours d'analyse numérique). Enfin ça ce n'est que pour votre culture générale, ici cela ne nous sert à rien ^^

Mais rien de mieux qu'un exemple et des images pour *voir* ce que ça veut dire, cette convergence en norme.

Soit $f(x) = x$ à développer sur $\mathcal{L}^2([-1;1])$. Il est évident que $f \in \mathcal{L}^2([-1;1])$. On a la décomposition suivante (je vous invite à faire le calcul vous-même) :

$$f(x) = S_{+\infty}(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} -2\frac{(-1)^m}{\pi m}\sin(\pi m x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin(\pi m x)$$

On a

$$S_3 = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{3}\frac{(-1)^m}{m}\sin(\pi m x) = -\frac{2}{\pi}\left(-\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(2\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right)$$

Et

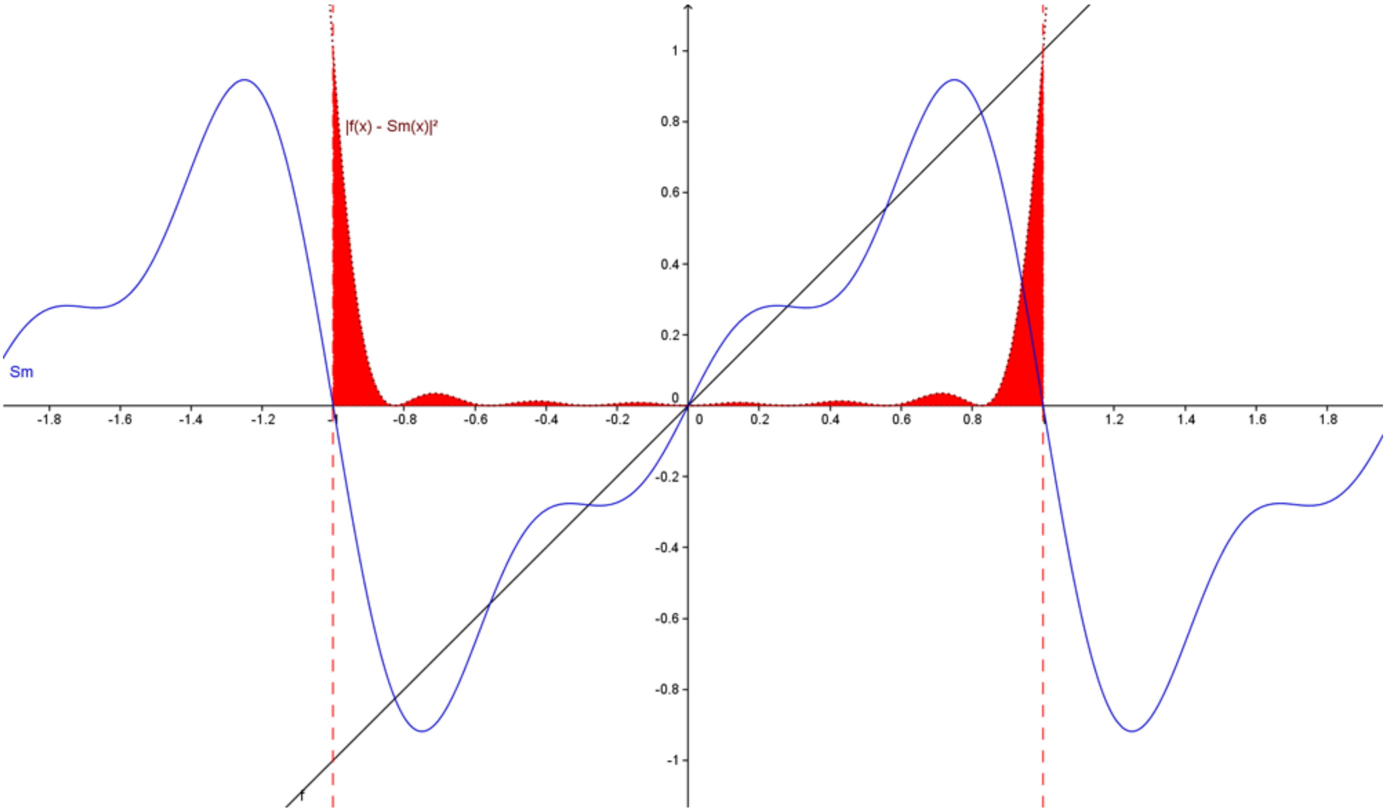
$$S_{12} = -\frac{2}{\pi}\left(-\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(2\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x) - \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \frac{1}{6}\sin(6\pi x) - \frac{1}{7}\sin(7\pi x)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\sin(8\pi x) - \frac{1}{9}\sin(9\pi x) + \frac{1}{10}\sin(10\pi x) - \frac{1}{11}\sin(11\pi x) + \frac{1}{12}\sin(12\pi x)\right)$$

La page suivante comporte deux images : l'une présente la fonction f approchée par S_3, l'autre la fonction f approchée par S_{12}, avec en rouge l'aire de la fameuse intégrale qui doit tendre vers 0 lorsque $M \to +\infty$.

On remarque que, de S_3 à S_{12}, l'aire rouge diminue fortement. Imaginez à l'infini, l'aire rouge tend vers 0.

Vous avez illustré (et compris j'espère :p) la convergence en norme dans $\mathcal{L}^2([-1;1])$!

$f(x) = x$ approché par S_3



$f(x) = x$ approché par S_{12}