Formulaire de Systèmes & Physique

Synthèse portant sur le cours *Modélisation & analyse des systèmes*

Document rédigé par **David Taralla**
2e Bachelier en Sciences Informatiques

Dernière version : 4 avril 2011

Préambule

Ce document présente les formules principales du cours de Systèmes et de Physique qu'il faut **absolument connaître** pour l'examen et l'interrogation. Il aborde divers sujets, relevant les remarques et propriétés importantes des concepts vus au cours. Contactez-moi si vous en trouvez une à ajouter qui ne serait pas reprise ici.
Bonne étude et bon travail !

Table des matières

1 Systèmes électriques **5**
- 1.1 Introduction . . . 5
- 1.2 Lois de Kirchhoff . . . 5
  - 1.2.1 Loi des mailles . . . 5
  - 1.2.2 Loi des nœuds . . . 5
- 1.3 Lois des composants . . . 6
  - 1.3.1 Résistances . . . 6
  - 1.3.2 Condensateurs (*capacités*) . . . 6
  - 1.3.3 Bobines (*inductances*) . . . 6

2 Systèmes mécaniques **7**
- 2.1 Introduction . . . 7
- 2.2 Énergie . . . 7
  - 2.2.1 Énergie potentielle . . . 7
  - 2.2.2 Énergie cinétique . . . 7
- 2.3 Forces simples . . . 8
  - 2.3.1 Loi de Newton pour les translations . . . 8
  - 2.3.2 Ressort . . . 8
  - 2.3.3 Amortisseur . . . 8
- 2.4 Couples de forces . . . 8
  - 2.4.1 Loi de Newton pour les rotations . . . 8
  - 2.4.2 Ressort de torsion . . . 8
  - 2.4.3 Amortisseur en rotation . . . 8

3 Comportement d'un système **9**
- 3.1 Introduction . . . 9
- 3.2 Conventions . . . 9
  - 3.2.1 Causalité . . . 9
- 3.3 Interconnexion de systèmes LTI . . . 9
- 3.4 Impulsion & Fonction échelon . . . 10
  - 3.4.1 Remarques sur l'impulsion . . . 10
  - 3.4.2 Réponse impulsionnelle et sortie d'un système . . . 10
  - 3.4.3 Lien entre l'impulsion et la fonction échelon . . . 10
  - 3.4.4 Réponses (en toute généralité) . . . 10

3.4.5 Réponse impulsionnelle d'un système LTI causal 10

4 Représentations d'état **12**
4.1 Introduction 12
4.2 Caractérisation de la variable d'état 12
4.2.1 Pluralité de la représentation d'état 12
4.2.2 Signal auxiliaire 12

Partie 1

Systèmes électriques

1.1 Introduction

Lorsqu'on nous présente un circuit à modéliser sous forme de système, les variables d'états seront **toujours** (sauf indication du contraire, *voir ex. 7*) :

– Les tensions aux bornes des condensateurs ;
– Les courants dans les bobines.

En effet, ces éléments sont les *accumulateurs d'énergie* du système. Il est donc naturel de prendre ces valeurs comme variables d'état.

Souvent, la sortie du système sera l'une de ces variables.

1.2 Lois de Kirchhoff

1.2.1 Loi des mailles

Dans tout cycle fermé, on a

$$\sum_i V_i = 0$$

où les V_i sont les différences de potentiels engendrées par les éléments du circuit se trouvant sur ce cycle. Si on va dans le même sens que celui qu'on s'est donné pour le courant, les tensions des éléments *passifs* du cycle (condensateurs, résistances, bobines,...) sont *négatives* et celles des éléments *actifs* du cycle (piles, générateurs, source de tension,...) sont *positives*. On a le phénomène inverse si on va dans le sens opposé au courant.

1.2.2 Loi des nœuds

En chaque nœud d'un circuit, on a

$$\sum_k i_k = i$$

où i est le courant sortant du nœud et les i_k sont les courants entrant dans le nœud.

1.3 Lois des composants

1.3.1 Résistances

Si une résistance R est traversée par un courant $i(t)$ à l'instant t, la tension à ses bornes vaut $V_R(t)$.

$$V_R(t) = Ri(t)$$

1.3.2 Condensateurs (*capacités*)

Si la capacité de ce condensateur est C et s'il entraîne une différence de potentiels $V_C(t)$ à ses bornes à l'instant t, alors la charge du condensateur vaut $q(t)$.

$$q(t) = CV_C(t)$$

En dérivant, on trouve

$$i(t) = \frac{d}{dt}\left(CV_C\right)(t) =^* C\frac{dV_C}{dt}(t)$$

où i est le courant passant dans le condensateur à l'instant t.

*** :** Attention, si pour une raison ou une autre C est fonction du temps et n'est pas une constante, la dernière égalité ne tient pas ! (*voir ex. 7*)

1.3.3 Bobines (*inductances*)

Si l'inductance de cette bobine est L et si elle est traversée par un courant $i(t)$ à l'instant t, alors la tension à ses bornes vaut $V_L(t)$.

$$V_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Partie 2

Systèmes mécaniques

2.1 Introduction

Lorsqu'on nous demande de modéliser un phénomène mécanique sous la forme d'un système, il faut choisir les variables d'états de telle sorte qu'elles nous permettent d'exprimer les valeurs des accumulateurs d'énergie (*énergies potentielle et cinétique*). Habituellement, elles prennent la forme de la longueur d'un ressort, d'un déplacement, d'une vitesse, d'un déplacement angulaire et/ou d'une vitesse angulaire.

On remarquera la correspondance flagrante entre les formules des forces « simples » et celles des couples de forces.

2.2 Énergie

2.2.1 Énergie potentielle

Soit un corps de masse m soumis à l'accélération gravitationnelle g à une hauteur h par rapport à l'origine. On a

$$E_p = mgh$$

2.2.2 Énergie cinétique

Soit un corps de masse m se déplaçant à une vitesse v. On a

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

2.3 Forces simples

2.3.1 Loi de Newton pour les translations

Une des plus utiles pour modéliser les phénomènes mécaniques. Soit un corps de masse m soumis à une accélération a. On a

$$\sum_i F_i = ma$$

2.3.2 Ressort

S'oppose toujours à la force qui est appliquée sur lui. Soit un ressort dont la constante de raideur vaut k, dont la longueur au repos vaut x_0 et qui est comprimé/allongé jusqu'en x. On a

$$F_{rappel} = -k(x - x_0)$$

2.3.3 Amortisseur

S'oppose toujours à la force qui est appliquée sur lui. Soit un amortisseur dont le coefficient de dissipation vaut b qui bouge sur son axe jusqu'à une position x à partir de x_0. On a

$$F_{amort.} = -b(\dot{x} - \dot{x}_0)$$

2.4 Couples de forces

2.4.1 Loi de Newton pour les rotations

L'autre plus utile pour modéliser les phénomènes mécaniques. Soit un corps de moment d'inertie J soumis à une accélération angulaire $\dot{\omega}$. On a

$$\sum_i C_i = J\dot{\omega}$$

2.4.2 Ressort de torsion

S'oppose toujours à la force qui est appliquée sur lui. Soit un ressort dont la constante de raideur vaut k, dont l'angle au repos vaut ω_0 et qui est tordu d'un angle de ω. On a

$$C_{rappel} = -k(\omega - \omega_0)$$

2.4.3 Amortisseur en rotation

S'oppose toujours à la force qui est appliquée sur lui. Soit un amortisseur dont le coefficient de dissipation vaut B qui tourne sur son axe jusqu'à un angle ω à partir de ω_0. On a

$$C_{amort.} = -B(\dot{\omega} - \dot{\omega}_0)$$

Partie 3

Comportement d'un système

3.1 Introduction

Formules diverses concernant les signaux remarquables que sont l'*impulsion* $\delta(t)$ et la *fonction échelon* $\mathbb{1}_+(t)$ et remarques importantes générales sur les systèmes LTI.

3.2 Conventions

3.2.1 Causalité

- La dérivée d'une fonction est une opération causale.
- À ce stade, une équation différentielle décrit chaque fois que possible un système causal.
- À ce stade, une équation aux différences décrit chaque fois que possible un système causal.

3.3 Interconnexion de systèmes LTI

La réponse impulsionnelle de la mise en cascade de deux systèmes LTI est la convolution de leur réponses impulsionnelles individuelles. De plus, par la commutativité de l'opération de convolution, la réponse d'un système en cascade ne dépend pas de l'ordre des systèmes individuels dans la cascade.

Il est donc évident que l'interconnexion de systèmes LTI est un système LTI.

3.4 Impulsion & Fonction échelon

3.4.1 Remarques sur l'impulsion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

3.4.2 Réponse impulsionnelle et sortie d'un système

Cas discret	Cas continu
$y[n] = u[n] * h[n]$	$y(t) = u(t) * h(t)$

avec

$$u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]h[n-k] \qquad u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

3.4.3 Lien entre l'impulsion et la fonction échelon

On a

$$\mathbb{1}_+(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$$

3.4.4 Réponses (en toute généralité)

La réponse impulsionnelle h d'un système est la sortie de ce système lorsque

$$u(t) = \delta(t)$$

La réponse indicielle s d'un système est la sortie de ce système lorsque

$$u(t) = \mathbb{1}_+(t)$$

3.4.5 Réponse impulsionnelle d'un système LTI causal

$$h(t) = Ce^{At}B\mathbb{1}_+(t) + D\delta(t)$$

Soit $D = VAV^{-1}$ la matrice A diagonalisée. On a

$$e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1}$$

avec, si les d_i sont les éléments de la diagonale de D,

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

Partie 4

Représentations d'état

4.1 Introduction

Cette partie aborde tout particulièrement la caractérisation des variables d'états d'un système : la non-unicité d'une représentation d'état et comment passer d'une représentation à l'autre grâce à la *matrice T de changement de base*, l'introduction d'un *signal auxiliaire v* dans un modèle afin de réaliser des systèmes avec un nombre minimal de décaleurs et d'intégrateurs,...

4.2 Caractérisation de la variable d'état

4.2.1 Pluralité de la représentation d'état

Une représentation d'état n'est pas unique ; on peut choisir différentes variables d'état pour décrire un même système. On dit que deux systèmes LTI

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = Ax + Bu & \text{et} \quad \dot{z} = A'z + B'u \\ y = Cx + Du & \qquad\quad y = C'z + D'u \end{array}$$

sont équivalents s'il existe un changement de variable régulier entre eux, c'est à dire s'il existe une matrice inversible T telle que

$$z = Tx, \quad A' = TAT^{-1}, \quad B' = TB, \quad C' = CT^{-1}, \quad D' = D$$

4.2.2 Signal auxiliaire

Soit une équation d'entrée sortie

$$P_l(D)y = Q_m(D)u$$

Si $l \geq m$, on dit que la *condition de réalisation* est vérifiée et qu'il existe un signal v auxiliaire tel que

$$\begin{cases} y = Q_m(D)v \\ P_l(D)v = u \end{cases}$$

Les variables d'état du système seront :

Cas discret

$$x[n] = \begin{pmatrix} v[n-1] \\ v[n-2] \\ v[n-3] \\ \vdots \\ v[n-l] \end{pmatrix}$$

Cas continu

$$x(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ \ddot{v}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}(t) \end{pmatrix}$$