Dérivation de fonctions de plusieurs variables

En fait, tout repose sur le ***théorème** de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables*[1]. Dans ce qui suit, comme nous l'a fait remarquer J. Crasborn, on ne fait qu'appliquer ce théorème, à savoir d'abord **vérifier les hypothèses**, ensuite appliquer ce qui en découle.

Souvenons-nous : à une variable…

Soit $F: x \longmapsto \arcsin(x^2)$. On pouvait représenter comme suit :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & x^2 = u \arrow[r, bend left, "f"] & \arcsin(u) = \arcsin(x^2) \end{tikzcd}$$

On a

- f_1 dérivable sur $\mathbb{R}$
- f dérivable sur $]-1\,;1[$
  $t.q.\ \{f_1(x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq\ ]-1\,;1[$

Ainsi, le domaine de dérivabilité de $F = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 < 1\} = \{x \in\ ]-1\,;1[\,\}$
Ensuite, on pouvait dériver :

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= (D_u f)(u) \quad * \quad (D_x f_1)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\bigg|_{u=x^2} \quad * \quad 2x \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

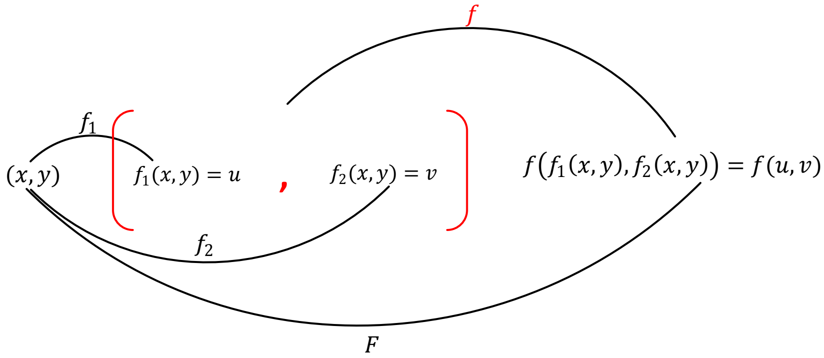
[1] Ce théorème est fort important : F. Bastin *aurait l'air* de l'aimer tout particulièrement à l'examen oral…

A plusieurs variables…

1) Première variante

Deux variables au départ

On peut représenter la situation comme suit :



Si 1) f_1 et f_2 sont dérivables sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

2) f est <u>continûment</u> dérivable[2] sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$

$t.q.\ \{(f_1(x, y), f_2(x, y)) : (x, y) \in \Omega \subseteq U\} = A$

Alors, *seulement maintenant*, on peut dire que :

$F(x, y) = f(u, v) = f(f_1(x, y), f_2(x, y))$ est dérivable sur A.

Si on dérive une fonction de n variables, on aura à la fin du procédé de dérivation n dérivées partielles.
Le procédé est le suivant :

1) On dérive d'abord par rapport à la première variable.
   a. On dérive f en (u, v) par rapport à u, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de u. Cette « dérivée de l'intérieur » de u n'est autre que la dérivée de $u = f_1$ en (x, y), par rapport à la première variable.
   b. On dérive f en (u, v) par rapport à v cette fois, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de v. Cette « dérivée de l'intérieur » de v n'est autre que la dérivée de $v = f_2$ en (x, y), par rapport à la première variable.
2) On dérive ensuite par rapport à la deuxième variable.
   a. On dérive f en (u, v) par rapport à u, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de u. Cette « dérivée de l'intérieur » de u n'est autre que la dérivée de $u = f_1$ en (x, y), par rapport à la deuxième variable.
   b. On dérive f en (u, v) par rapport à v cette fois, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de v. Cette « dérivée de l'intérieur » de v n'est autre que la dérivée de $v = f_2$ en (x, y), par rapport à la deuxième variable.

En calculs, on a

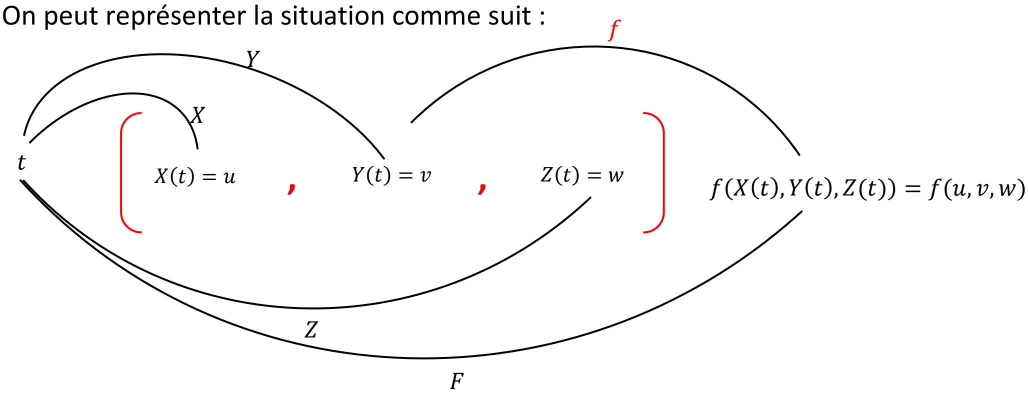
$$DF(x, y) : \begin{cases} D_x F(x, y) = (D_u f)(u, v) * (D_x f_1)(x, y) + (D_v f)(u, v) * (D_x f_2)(x, y) \\ D_y F(x, y) = (D_u f)(u, v) * (D_y f_1)(x, y) + (D_v f)(u, v) * (D_y f_2)(x, y) \end{cases}$$

[2] *Continûment dérivable* : Se dit d'une fonction dérivable **une fois** et dont la dérivée/les dérivées partielles est/sont continue(s).

2) Seconde variante

Une variable au départ

On peut représenter la situation comme suit :



Si 1) X, Y et Z sont dérivables sur un ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$

2) f est <u>simplement</u> dérivable[3] sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$

$t.q.\ \{(X(t), Y(t), Z(t)) : t \in I \subseteq U\} = A$

Alors, *seulement maintenant*, on peut dire que :

$F(t) = f(u, v, w) = f(X(t), Y(t), Z(t))$ est dérivable sur A.

Ici, on dérive une fonction à *une* variable, on aura à la fin du procédé de dérivation seulement <u>une</u> « dérivée partielle ».

Le procédé est le suivant :

On dérive par rapport à la seule variable.

a. On dérive f en (u, v, w) par rapport à u, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de u. Cette « dérivée de l'intérieur » de u n'est autre que la dérivée de $u = X$ en t, par rapport à la seule variable.
b. On dérive f en (u, v, w) par rapport à v, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de v. Cette « dérivée de l'intérieur » de v n'est autre que la dérivée de $v = Y$ en t, par rapport à la seule variable.
c. On dérive f en (u, v, w) par rapport à w, sans oublier de multiplier par la « dérivée de l'intérieur » de w. Cette « dérivée de l'intérieur » de w n'est autre que la dérivée de $w = Z$ en t, par rapport à la seule variable.

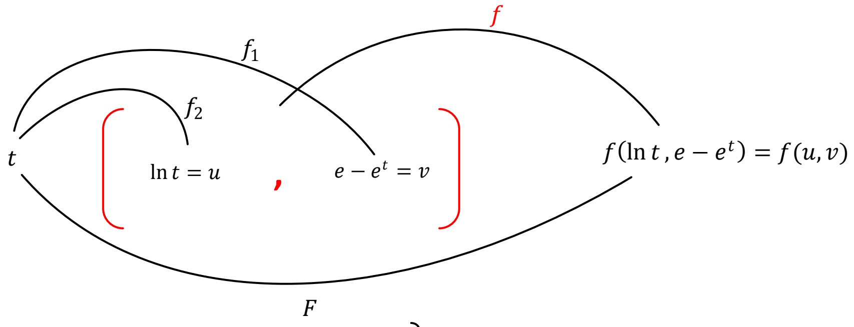
$$\begin{aligned} DF(t) &= (D_u f)(u, v, w) * (D_t X)(t) \\ &+ (D_v f)(u, v, w) * (D_t Y)(t) \\ &+ (D_w f)(u, v, w) * (D_t Z)(t) \end{aligned}$$

[3] Ici, pas besoin d'être continûment dérivable car il n'y a qu'une seule variable : t.

Un exemple

On nous donne la fonction f continûment dérivable sur $]-1;1[\ \text{x}\ ]0;+\infty[\ = B$.

On nous donne $F : t \longmapsto f(\ln(t), e - e^t)$. On a donc :



Si 1) - f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$
- f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Big\}$ Donc $I =]0;+\infty[$

2) f nous a été donné <u>continûment</u> dérivable sur $\mathbb{R}$

$$t.q.\ \{(\ln t, e - e^t) : t \in I \subseteq B\}$$
$$= \{t \in \mathbb{R} : -1 < \ln t < 1, \quad e - e^t > 0\}$$
$$=]\frac{1}{e};1[= A$$

Alors, *seulement maintenant*, on peut dire que :

$F(t) = f(u,v) = f(\ln t, e - e^t)$ est dérivable sur A.

Dérivons :

$$DF(t) = (D_u f)(u,v) * D\ln t$$
$$+ (D_v f)(u,v) * D\,(e - e^t)$$

$$= (D_u f)(u,v) * \frac{1}{t}$$
$$+ (D_v f)(u,v) * -e^t)$$

$$Avec\ (u,v) = (\ln t, e - e^t)$$

Comme l'expression analytique de f ne nous a pas été donnée explicitement, l'exercice est résolu.