



Projet Matlab

Rapport portant sur le cours *Modélisation & Analyse des Systèmes*

Document rédigé par **David Taralla**
2^e Bachelier en Sciences Informatiques

Dernière version : 20 mai 2011

Table des matières

1	Représentation d'état du modèle de la pupille	3
1.1	Point a)	3
1.2	Point b)	3
1.3	Point c)	4
2	Réponse de la pupille à une impulsion lumineuse	4
2.1	Point a)	4
2.2	Point b)	4
2.3	Point c)	4
3	Réponse de la pupille à un flash (fini) de lumière	4
3.1	Point a)	4
3.2	Point b)	4
3.3	Point c)	5
4	Réduction de l'effet « yeux rouges »	5
4.1	Point a)	5
4.2	Point b)	5
5	Réponse de la pupille à une lumière oscillante	5
5.1	Point a)	5
5.2	Point b)	5
5.3	Point c)	6
6	Réponse de la pupille à un stroboscope	6
6.1	Point a)	6
6.2	Point b)	7
6.3	Point c)	7
6.4	Point d)	8
6.5	Point e)	8
7	Modèle plus précis de la pupille	8
7.1	Point a)	8
7.2	Point b)	8



1 Représentation d'état du modèle de la pupille

1.1 Point a)

Soit u et y un couple entrée-sortie du système analysé, dont les transformées de Laplace sont respectivement U et Y . Comme¹

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (1)$$

On a

$$H_1(s) = \frac{0.16s^0}{(1 + 0.1s)^3} = \frac{160s^0}{1s^3 + 30s^2 + 300s^1 + 1000s^0}$$

Donc ici, $M = 0$, $N = 3$ et

$$\begin{aligned} b_0 &= 160 \\ a_0 &= 1000 \\ a_1 &= 300 \\ a_2 &= 30 \\ a_3 &= 1 \end{aligned}$$

Vu (1), on déduit l'égalité

$$160s^0 = 1000s^0 + 300s^1 + 30s^2 + 1s^3 \quad (2)$$

L'application de la transformée de Laplace inverse aux deux membres de l'égalité (2) donne l'équation différentielle

$$\underbrace{1000y(t) + 300\dot{y}(t) + 30\ddot{y}(t) + \frac{d^3y}{dt^3}(t)}_{P_l(D)y} = \underbrace{160u(t)}_{Q_m(D)u} \quad (3)$$

L'équation (3) se révèle être la *relation d'entrée-sortie* du système. Comme ici $l = 3 > m = 0$, la condition de réalisation est vérifiée. Utilisons alors un signal auxiliaire v tel que

$$\begin{cases} y(t) = Q_m(D)v = 160v(t) \\ u(t) = P_l(D)v = 1000v(t) + 300\dot{v}(t) + 30\ddot{v}(t) + \frac{d^3v}{dt^3}(t) \end{cases}$$

On pose $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T = (v(t) \ \dot{v}(t) \ \ddot{v}(t))^T$ comme vecteur d'état, ce qui nous donne la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1000 & -300 & -30 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (160 \ 0 \ 0) x(t) + 0u(t) \end{cases}$$

1.2 Point b)

Voir script Matlab.

1. Voir section 7.1 pp. 117-118 du cours théorique

1.3 Point c)

Ces systèmes sont effectivement équivalents. En effet, Matlab prend le vecteur d'état $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T = (\ddot{v}(t) \ \dot{v}(t) \ v(t))^T$, c'est à dire le même que celui trouvé analytiquement mais inversé. La matrice T de changement de base est donc facilement déterminée et on vérifie aisément qu'elle satisfait les équations présentées en p. 78 du cours théorique.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Réponse de la pupille à une impulsion lumineuse

2.1 Point a)

On sait que²

$$H_1(s) = \frac{0.16s^0}{(1 + 0.1s)^3} = \frac{160}{(s + 10)^3}, \quad \Re s > -10$$

$$\Leftrightarrow h_{1,a}(t) = 160 \frac{t^2 e^{-10t}}{2} \mathbb{1}_+(t) = 80t^2 e^{-10t} \mathbb{1}_+(t)$$

2.2 Point b)

Voir script Matlab.

2.3 Point c)

On remarque que Matlab évalue $h_{1,b}$, la transformée de Laplace de $H_1(s)$, sans l'échelon. En effet, il trouve

$$h_{1,b}(t) = \frac{80t^2}{e^{10t}}$$

3 Réponse de la pupille à un flash (fini) de lumière

3.1 Point a)

On doit avant tout créer une fonction de type échelon restreint. On peut soit la créer grâce à `Heaviside` (mais malheureusement, la valeur que prend cette dernière en zéro est problématique), ou encore la créer manuellement au moyen de la fonction `ones`. On récupère alors la réponse impulsionnelle du système grâce à `impulse`, il ne reste plus qu'à convoluer et afficher le résultat.

3.2 Point b)

Comme le système est décrit comme étant linéaire temps-invariant, et comme `step` renvoie la réponse impulsionnelle du système, on a

$$y(t) = h(t) * u(t) = h(t) * (\mathbb{1}_+(t) - \mathbb{1}_+(t - 0.1)) = \text{step}(t) - \text{step}(t - 0.1)$$

Il nous faut donc calculer la différence entre la réponse du système à un échelon et celle d'un autre échelon décalé de 0.1 seconde du premier.

². Voir p. 125 du cours théorique

3.3 Point c)

On remarque que les deux résultats sont très similaires, voire identiques (le graphe issu de `step` va légèrement plus haut).

4 Réduction de l'effet « yeux rouges »

4.1 Point a)

J'ai testé pour plusieurs signaux d'entrée u des nombre de flashes différents, en essayant que quelque part sur la sortie apparaisse un maximum global d'amplitude 0.08 (avec la précision de Matlab). C'est à partir d'une entrée étant construite comme 4 *flashs* visibles chacun durant 0.1 seconde et dont les débuts sont chacun séparés de 0.2 seconde que cette amplitude a été atteinte (exactement 0.82 et non 0.8).

4.2 Point b)

On remarque sur le graphique 2 de la figure 3 que l'amplitude 0.8 est atteinte au temps $t \simeq 0.73s$, ce qui est normal vu que comme on a 3.5 périodes = 3.5 flashs et leur période d'attente, on trouve théoriquement $t \simeq 3.5 * 0.2 = 0.7s$.

5 Réponse de la pupille à une lumière oscillante

5.1 Point a)

Voir script Matlab.

5.2 Point b)

On a en fait un système qui peut être vu comme la mise en cascade de quatre systèmes plus simples :

$$H_1(s) = \frac{0.16}{(1 + 0.1s)^3} = 0.16 \cdot \frac{1}{1 + 0.1s} \cdot \frac{1}{1 + 0.1s} \cdot \frac{1}{1 + 0.1s}$$

On a donc, pour la solution analytique :

$$20 \log_{10}(|H_1(i\omega)|) \approx \begin{cases} -15.92dB & \text{si } \omega \leq 10 \\ -20dB_{/dec} - 20dB_{/dec} - 20dB_{/dec} = -60dB_{/dec} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\angle H_1(i\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \omega \leq 1 \\ -45^\circ_{/dec} - 45^\circ_{/dec} - 45^\circ_{/dec} = -135^\circ_{/dec} & \text{si } 1 < \omega < 100 \\ -90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -270^\circ & \text{sinon} \end{cases}$$

Le comportement asymptotique des courbes tracées dans Matlab rejoint en effet les graphes tracés à la main de manière imprécise (selon la solution analytique).

On observe tout à fait naturellement le fait que la pupille réagisse comme un système passe-bas : pour une fréquence $\omega \leq 10$, le système agit comme un système statique, n'appliquant que le gain statique (ici, $20 \log_{10}(0.16) = -15.92dB$). De fait, on remarque bien qu'en $\omega = 0$ (et de manière imprécise, jusqu'en $\omega = 10$), $20 \log_{10}(|H_1(i\omega)|) = -15.92dB$.

En voyant l'étroite bande de fréquences que « laisse passer » le système, on en déduit que la constante de temps du système doit être relativement grande. Cette conclusion est confirmée par

la réaction connues de nos pupilles, qui ne se dilatent/contractent pas à très grande vitesse selon les variations lumineuses qui ont lieu autour de nous. En effet, par exemple, lorsque l'on est dans une pièce éclairée puis que l'on y coupe brusquement la lumière, il faut un certain temps pour que nos yeux s'habituent à la pénombre...

Donc en résumé, le système nous fait savoir (si on ne le savait pas déjà...) que la pupille, à partir d'un certain seuil de fréquence, ne réagit quasi plus aux variations d'une lumière oscillante, et qu'avant ce seuil, elle réagit de manière assez « molle » aux oscillations de la lumière (plus elle est rapide, moins la pupille réagit).

5.3 Point c)

Tout d'abord, la question a un sens vu que $\Re(i10\pi) = 0 > -10$. Ensuite, ici, on a $\omega \approx 31.4 \gg 10$, il faut donc s'attendre (vu le point b)) à ce que la pupille réagisse très peu et avec un retard de phase d'un peu moins de $3\pi/4$.

On peut lire sur le diagramme d'amplitude de Bode, zoomé sur le graphe pour des abscisses autour de $10^{1.5} \approx 10\pi$, que l'amplitude tourne autour de $-47dB$. La phase quant à elle serait estimée, de la même façon, à -217° . Plus formellement, on a

$$20 \log_{10}(|H_1(i10\pi)|) = -47.004dB$$

$$\angle H(i10\pi) = -217.0298^\circ$$

En appliquant la formule

$$H(i\omega)e^{i\omega t} = |H(i\omega)|e^{i(\omega t + \angle H(i\omega))}$$

On trouve que la sortie vaut alors

$$H_1(i10\pi)e^{i10\pi t} = 0.0045 \cdot e^{i(10\pi t + 3.7879)}$$

Lorsqu'on calcule les parties réelle et imaginaire de cette solution analytique/déduite du diagramme de Bode sur l'intervalle $[0, 3]$, et lorsqu'on calcule `lsim` avec, comme entrées, la partie réelle puis la partie imaginaire de $u(t)$, on obtient les graphes visibles dans Matlab dans la figure « Question 5c ». On remarque que les deux graphes sont identiques, **à un transitoire près**. En effet, Matlab semble ajouter par défaut une réponse transitoire en plus de la réponse permanente. Cela doit venir de l'implémentation de `lsim`. En tout cas, il se trompe car il ne doit *pas* y avoir de réponse transitoire : l'entrée est $u(t) = e^{i10\pi t}$ et non $u(t) = e^{i10\pi t}\mathbb{1}_+(t)$. Or un transitoire n'apparaîtrait que si on présentait au système (stable) un signal harmonique *initialisé* en $t = 0$, ce qui n'est pas le cas ici.

6 Réponse de la pupille à un stroboscope

6.1 Point a)

Vu que la vitesse de contraction de la pupille est la dérivée par rapport au temps de la contraction de la pupille, on trouve facilement que

$$H_2(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial t}(t)\right\} = s\mathcal{L}\{h_1(t)\} = sH_1(s) = \frac{0.16s}{(1 + 0.1s)^3}, \quad \Re s > -10$$

Évidemment, la seule chose qui va changer dans la représentation d'état, c'est la matrice C . En effet, désormais ce que l'on veut en sortie c'est la *dérivée* de la contraction et non la contraction elle-même. On a donc désormais

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 0 \end{pmatrix} x(t) + 0u(t)$$

Ensuite, pour ce qui concerne la réponse impulsionnelle h_2 , on a trivialement

$$h_2(t) = \frac{\partial h_1}{\partial t}(t) = \frac{80(2t - 10t^2)\mathbb{1}_+(t) + 80t^2\delta(t)}{e^{10t}} = \frac{(160t - 800t^2)}{e^{10t}} \cdot \mathbb{1}_+(t)$$

comme

$$80t^2\delta(t) = 0 \quad \forall t$$

A propos des diagrammes de Bode, on a désormais les estimations suivantes (voir figure « Question 6a ») :

$$20 \log_{10} (|H_2(iw)|) \approx \begin{cases} 20dB_{/dec} & \text{si } w \leq 10 \\ 3(-20dB_{/dec}) + 20dB_{/dec} = -40dB_{/dec} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\angle H_2(iw) \approx \begin{cases} 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ & \text{si } w \leq 1 \\ -45^\circ_{/dec} - 45^\circ_{/dec} - 45^\circ_{/dec} = -135^\circ_{/dec} & \text{si } 1 < w < 100 \\ -90^\circ - 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ = -180^\circ & \text{sinon} \end{cases}$$

On observe donc que le système est plutôt **passe-bande** que **passe-bas** désormais.

6.2 Point b)

La solution analytique est

$$\hat{u}_k(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{0.2i}{k\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

On remarque sur la figure « Question 6b » que la série calculée par Matlab est d'autant plus proche de la solution analytique que le pas d'échantillonnage utilisé est petit (ici, pas = 10^{-3}).

La partie réelle qui devrait toujours être nulle sauf en $k = 0$ ne l'est pas car elle subit une petite erreur, que l'on peut attribuer au fait qu'on ne calcule jamais qu'une *approximation*. Si on prenait un pas de 10^{-4} au lieu de 10^{-3} , l'erreur diminuerait encore. Elle n'est d'ailleurs quasiment pas visible sur le graphique.

6.3 Point c)

Ici, après des dizaines d'essais avec des pas différents de plus en plus petits, je ne suis jamais arrivé au résultat attendu. L'explication est très simple et a été vue aujourd'hui (20 mai 2011) au cours théorique : la condition de Shannon ne peut être respectée. Le signal $u_s(t)$ a une fréquence maximale infinie (les points de discontinuité), or selon le théorème de Shannon, pour pouvoir reconstituer le signal continu à partir de sa discrétisation dans Matlab, il faudrait que la fréquence d'échantillonnage soit plus grande que deux fois la fréquence maximale de $u_s(t)$.

On a dit que cette dernière valait l'infini : il faudrait donc une fréquence d'échantillonnage infinie elle aussi, ce qui est impossible à obtenir, à part dans les calculs abstraits que nous utilisons dans la résolution analytique.

6.4 Point d)

Pour la même raison que la question précédente, il est impossible d'arriver à la solution analytique (Voir figure « Question 6d »).

6.5 Point e)

?

7 Modèle plus précis de la pupille

7.1 Point a)

Ce facteur représente le léger *retard* de la réaction de la pupille face à une entrée lumineuse. En effet, un changement brusque de luminosité est accompagné de la réaction appropriée de la pupille, mais pas instantanément. Le temps que l'information lumineuse arrive au cerveau et qu'un réflexe inné lance la contraction/dilatation de la pupille explique ce retard.

7.2 Point b)

Influence sur la réponse fréquentielle Ce facteur va retarder la réponse fréquentielle.

Comparaison des diagrammes de Bode Si $H_3(s) = e^{-0.18s}H_1(s)$, on ne fait que *retarder* la réponse, l'amplitude de $H_3(i\omega)$ sera identique à $|e^{-0.18i\omega}H_1(i\omega)| = 1 \cdot |H_1(i\omega)| = |H_1(i\omega)|$. Par contre, comme $\angle e^{-0.18i\omega} = -0.18\omega$, le retard de phase occasionné sera d'autant plus grand que ω est grand, sans borne inférieure.

La figure « Question 7b » illustre bien ce phénomène : $\angle H_3(i\omega)$ décroît de plus en plus rapidement lorsque ω augmente, et ce sans jamais s'arrêter de décroître. Par contre, le graphe de l'amplitude n'a pas changé, comme prévu.

