

# Modélisation et analyse des systèmes : Travail MATLAB

Prof. R. Sepulchre – SYST002

Université de Liège  
Année académique 2010-2011

## Consignes du travail

Le travail est basé sur un modèle de la pupille développé dans l'article « A servoanalytic study of consensual pupil reflex to light », L. Stark and P. M. Sherman, *Journal of Neurophysiology*, 20(1) :17–26, Jan 1957. La lecture de l'article est vivement encouragée avant de débiter le travail.

La solution du travail doit comprendre :

- un script MATLAB nommé « `nom_prenom_syst002_script.m` » (en minuscules et sans accents). Ce script exécutable dans MATLAB doit contenir les commandes exactes utilisées pour la résolution, y compris les commandes pour afficher les figures. Séparer clairement les différentes questions et sous-questions par des alinéas et du commentaire (par exemple `% Q1 a` afin de créer une nouvelle cellule). Veiller à afficher chaque graphique dans une nouvelle figure (commande `figure`).
- un **court** rapport nommé « `nom_prenom_syst002_rapport.pdf` » (en minuscules et sans accents). Ce rapport au format PDF<sup>1</sup> doit contenir les réponses aux questions (valeurs numériques, calculs analytiques, observations, etc.). Ce rapport ne doit contenir **ni** le script MATLAB, **ni** les figures (ces dernières sont générées à partir du script). Séparer clairement les différentes questions et sous-questions et faire référence aux figures via leur numéro.

Ces deux fichiers doivent être envoyés à l'adresse `pierre.sacre@ulg.ac.be` pour le **vendredi 20 mai** au plus tard avec en objet l'intitulé suivant « `nom prenom syst002 matlab` ».

*Bon travail !*

---

## Enoncé du travail

On propose d'étudier un modèle décrivant le fonctionnement de la pupille de l'oeil humain. On considère en entrée  $u$  l'intensité lumineuse et en sortie  $y$  la contraction de la pupille (i.e. lorsque  $y$  augmente, l'ouverture de la pupille diminue). L'article référencé décrit la méthode expérimentale utilisée pour identifier le modèle. En première approximation, le modèle est décrit par la fonction de transfert

$$H_1(s) = \frac{0.16}{(1 + 0.1s)^3}.$$

---

1. Une liste de différents programmes permettant de créer des PDF est disponible à la page [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_PDF\\_software](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_PDF_software).

### 1. Représentation d'état du modèle de la pupille

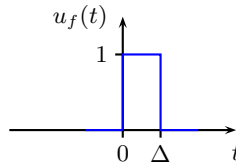
- (a) Dédurre analytiquement un modèle d'état (matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ ) pour le modèle de la pupille décrit par  $H_1(s)$ .
- (b) Entrer le système dans MATLAB (par le biais de sa fonction de transfert). A l'aide de MATLAB, convertir la fonction de transfert  $H_1(s)$  en modèle d'état. Afficher les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}$  correspondantes.
- (c) Montrer que les modèles d'état obtenus en 1a et 1b sont équivalents.

### 2. Réponse de la pupille à une impulsion lumineuse

- (a) Calculer analytiquement la réponse impulsionnelle  $h_{1,a}(t)$  du système.
- (b) Evaluer numériquement la réponse impulsionnelle  $h_{1,b}(t)$  du système.
- (c) Comparer les réponses en superposant  $h_{1,a}(t)$  et  $h_{1,b}(t)$  sur une même figure.

### 3. Réponse de la pupille à un flash (fini) de lumière

- (a) Effectuer une convolution dans MATLAB pour calculer la réponse de la pupille à une intensité lumineuse de profil rectangulaire  $u_f(t)$  représenté ci-dessous (avec  $\Delta = 0.1$ ).



- (b) Calculer la réponse à cette entrée en utilisant la commande `step`.
- (c) Comparer les deux réponses obtenues en les superposant sur une même figure.

### 4. Réduction de l'effet « yeux rouges »

Le défaut « yeux rouges » est souvent observé sur les photographies de personnes prises avec flash. La lueur rouge provient de la réflexion de la lumière du flash sur la rétine parce que la pupille est trop largement ouverte (adaptée à un environnement sombre). Un dispositif « anti yeux rouges » émet un ou plusieurs flashes successifs de lumière avant le flash servant à prendre le cliché.

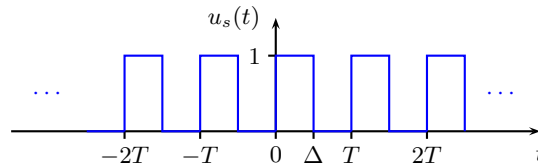
- (a) On modélise un flash par une entrée identique à celle utilisée au point 3. Si chaque flash a une durée  $\Delta = 0.1$  et si les débuts de deux flashes successifs sont séparés par une durée  $2\Delta$ , déterminer après combien de de flashes la contraction de la pupille atteindra une amplitude de 0.08 ?
- (b) En déduire le temps auquel on doit prendre la photo pour minimiser le défaut « yeux rouges » ?

### 5. Réponse de la pupille à une lumière oscillante

- (a) Utiliser MATLAB pour calculer les diagrammes de Bode du système.
- (b) Vérifier que l'allure asymptotique des diagrammes de Bode du modèle à basses et hautes fréquences correspond aux diagrammes asymptotiques tracés analytiquement au cours. Interpréter physiologiquement le comportement de la pupille à basses et hautes fréquences sur base du modèle.
- (c) Sur base des diagrammes de Bode, déterminer la réponse du système pour une entrée  $u(t) = e^{j10\pi t}$ . Comparer la réponse à celle obtenue à l'aide de la fonction `lsim`.

## 6. Réponse de la pupille à un stroboscope

La lumière émise par un stroboscope est modélisée par l'entrée périodique  $u_s(t)$  représentée ci-dessous où chaque flash possède une durée  $\Delta = T/2$ .



On souhaite étudier l'énergie par unité de temps dépensée par l'oeil lorsqu'il est soumis à ce type d'entrée. On suppose que l'énergie par unité de temps dépensée est principalement l'énergie cinétique de contraction de la pupille

$$E_c \sim \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

où  $v(t)$  est la vitesse de contraction de la pupille.

- Déterminer la fonction de transfert  $H_2(s)$  du système où la sortie n'est plus la contraction mais la vitesse de contraction de la pupille. Commenter l'influence de cette modification sur le modèle d'état, sur la réponse impulsionnelle  $h_2(t)$  et sur les diagrammes de Bode.
- Calculer numériquement la représentation en série de Fourier du signal  $u_s(t)$  à l'aide de la commande `fft` pour  $T = 0.2$ . Comparer la réponse à celle obtenue analytiquement (cfr. exercice 69).
- Calculer la réponse du système à l'entrée  $u_s(t)$  sur base de sa décomposition en série de Fourier et du diagramme de Bode de  $H_2(s)$ , pour  $T = 0.2$ .
- Calculer la réponse du système à l'entrée  $u_s(t)$  par convolution cyclique de l'entrée  $u_s(t)$  et de la réponse impulsionnelle  $h_2(t)$ , pour  $T = 0.2$ .
- Avec la méthode de votre choix (6c ou 6d), calculer l'énergie cinétique dépensée par l'oeil pour adapter la pupille à la lumière provenant du stroboscope pour les différentes fréquences ( $T = 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$  et  $3.2$ ). Interpréter physiquement ce résultat.

## 7. Modèle plus précis de la pupille

Le modèle déterminé expérimentalement par Stark et Sherman inclut un terme exponentiel dans la fonction de transfert :

$$H_3(s) = \frac{0.16}{(1 + 0.1s)^3} e^{-0.18s}.$$

- Quel effet physique est modélisé par le facteur  $e^{-0.18s}$  ?
- Comment cet effet se manifeste-t-il sur la réponse fréquentielle de la pupille ? Comparer les diagrammes de Bode de  $H_1(s)$  et  $H_3(s)$ .