Résolutions d'ELRH & d'ELRNH

Table des matières

Résolution d'une ELRH (Équation Linéaire Récurrente Homogène)

Type & définition

Une ELRH est du type

$$s_{n+k} = a_{k-1}s_{n+k-1} + a_{k-2}s_{n+k-2} + \cdots + a_0 s_n$$

Ce qui s'écrit encore

$$s_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} a_i s_{n+i}$$

On dit que k est **l'ordre** de l'équation linéaire récurrente.
Pour résoudre une équation d'ordre k, on a besoin des k premières conditions initiales $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$.

Méthode de résolution

1) Avant tout, il faut écrire le *polynôme caractéristique* de l'ELRH. Soit une ELRH du type précisé plus haut, on a

$$Q(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \cdots - a_0$$

- ⇨ Remarquez l'usage du signe « $-$ » !

2) Ensuite il faut extraire les racines du polynôme. Si le polynôme est de degré k, il y aura k racines (comptées avec leur multiplicité). C'est-à-dire que si on a les racines $b_1, \dots, b_r$ (avec $r \leq k$) de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, on obtient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = k$$

- ⇨ La propriété qui permet d'affirmer ce fait doit pouvoir être démontrée à l'oral et date du secondaire.

3) Maintenant on peut écrire une *solution générale*

$$s_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n){b_i}^n$$

où $P_i(n)$ est un polynôme de degré **strictement inférieur à** α_i.

4) Enfin, on utilisera les conditions initiales $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ pour déterminer les coefficients des P_i.

Exemple

- *Trouver la solution de l'ELRH de conditions initiales* $s_3 = 2, s_2 = s_1 = s_0 = 0$ *suivante, dans* $\mathbb{Z}^7$ *:*

$$s_{n+4} = 2s_{n+3} + s_{n+1} + 5s_n$$

Écrivons le polynôme caractéristique de l'équation selon la formule donnée plus haut en 1).

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 - x - 5$$

Comme nous sommes dans $\mathbb{Z}^7$, on peut réécrire $Q(x)$ comme ceci :

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$$

On pourrait utiliser la méthode du tableau d'Horner pour factoriser $Q(x)$. Ou bien on remarque que si on met x^3 en évidence, on a

$$Q(x) = x^3(x-2) - x + 2 = x^3(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^3-1)$$

Recherchons les racines : comme on a un polynôme du quatrième degré, on en aura quatre, comptées avec leur multiplicité bien entendu. Il ne faut pas non plus oublier qu'on se trouve dans $\mathbb{Z}^7$. Cherchons :

$Q(0) = (-2)(-1) \neq 0^{\mathbb{Z}^7}$

$Q(1) = (-1)(0) = 0^{\mathbb{Z}^7}$ ➔ 1ère racine, de multiplicité 1 : $x = 1$

$Q(2) = (2-2)(8-1) = (0)(7) = (0)(0) = 0^{\mathbb{Z}^7}$ ➔ 2ème et 3ème racine, de multiplicité 2[1] : $x = 2$

$Q(3) = (1)(8) \neq 0^{\mathbb{Z}^7}$

$Q(4) = (2)(64-1) = (2)(63) = (2)(0) = 0^{\mathbb{Z}^7}$ ➔ 4ème racine, de multiplicité 1 : $x = 4$

On a quatre racines, on les a toutes trouvées, pas besoin d'aller plus loin.
Maintenant qu'on a les racines et leur multiplicité, on peut écrire la solution générale :

$$s_n = 1^n * A + 2^n * (Bn + C) + 4^n * D$$

Utilisons les conditions initiales. En effet, comme ce sont des conditions initiales, elles doivent vérifier la solution générale ! On a donc (sans oublier qu'on travaille dans $\mathbb{Z}^7$!)

$$\begin{cases} s_3 = 2 = 1^3 * A + 2^3 * (3B + C) + 4^3 * D \\ s_2 = 0 = 1^2 * A + 2^2 * (2B + C) + 4^2 * D \\ s_1 = 0 = 1^1 * A + 2^1 * (1B + C) + 4^1 * D \\ s_0 = 0 = 1^0 * A + 2^0 * (0B + C) + 4^0 * D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = A + 8 * (3B + C) + 64D \\ 0 = A + 8B + 4C + 16D \\ 0 = A + 2B + 2C + 4D \\ 0 = A + C + D \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 3 \\ C = 4 \\ D = -1 \end{cases}$$

Et enfin, on remplace les polynômes $A, (Bn + C)$ et D par leur vraie valeur :

$$s_n = 4 + 2^n * (3n + 4) + 4^n * (-1)$$

Résolution d'une ELRNH (Équation Linéaire Récurrente Non Homogène)

Type & définition

Une ELRNH est une ELRH qui comporte une terme indépendant. Elle est du type

$$s_{n+k} = a_{k-1}s_{n+k-1} + a_{k-2}s_{n+k-2} + \cdots + a_0 s_n + a$$

Ce qui s'écrit encore

$$s_{n+k} = a + \sum_{i=0}^{k} a_i s_{n+i}$$

On dit toujours que k est **l'ordre** de l'équation linéaire récurrente.
Pour résoudre une équation d'ordre k, on a besoin des k premières conditions initiales $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$.

Méthode de résolution

1) Il faut commencer par écrire le terme s_{n+k+1} :

$$s_{n+k+1} = a_{k-1}s_{n+k} + a_{k-2}s_{n+k-1} + \cdots + a_0 s_{n+1} + a$$

2) Ensuite calculer $s_{n+k+1} - s_{n+k}$ pour tomber sur une ELRH d'ordre $k+1$:

$$s_{n+k+1} - s_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i (s_{n+i+1} - s_{n+i})$$

[1] En effet, la valeur 2 annule les deux opérations entre parenthèses ! Donc 2 est une racine de multiplicité 2, et c'est pourquoi elle est comptée comme 2ème **et** 3ème racine.

3) On a plus qu'à ajouter s_{n+k} aux deux membres de l'équation pour tomber sur une ELRH :

$$s_{n+k+1} = s_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(s_{n+i+1} - s_{n+i})$$

4) Résoudre l'ELRH obtenue.

Exemple

- Trouver la solution de l'ELRNH de conditions initiales $s_0 = s_1 = 0$ suivante, dans $\mathbb{Z}^{11}$:

$$s_{n+2} = 9s_{n+1} + 3s_n + 1$$

Calculons s_{n+3} :

$$s_{n+3} = 9s_{n+2} + 3s_{n+1} + 1$$

Soustrayons à ce résultat s_{n+2} :
$s_{n+3} - s_{n+2} = 9s_{n+2} + 3s_{n+1} + 1 - s_{n+2}$
$\Leftrightarrow s_{n+3} - s_{n+2} = 9s_{n+2} + 3s_{n+1} + 1 - 9s_{n+1} - 3s_n - 1$
$\Leftrightarrow s_{n+3} = 10s_{n+2} - 6s_{n+1} - 3s_n$
Et on termine en résolvant l'ELRH $s_{n+3} = 10s_{n+2} - 6s_{n+1} - 3s_n$:

Écrivons le polynôme caractéristique de l'équation :

$$Q(x) = x^3 - 10x^2 + 6x + 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 8) = (x-1)(x-1)(x+3)$$

Recherchons les racines : comme on a un polynôme du troisième degré, on en aura trois, comptées avec leur multiplicité. Il ne faut pas non plus oublier qu'on se trouve dans $\mathbb{Z}^{11}$. Cherchons :

$Q(1) = (0)(0)(4) = 0^{\mathbb{Z}^{11}}$ ➔ 1ère et 2ème racines, de multiplicité 2 : $x = 1$

…

$Q(8) = (7)(7)(11) = (7)(7)(0) = 0^{\mathbb{Z}^{11}}$ ➔ 3ème racine, de multiplicité 1 : $x = 8$

On a trois racines, on les a toutes trouvées, pas besoin d'aller plus loin.
Maintenant qu'on a les racines et leur multiplicité, on peut écrire la solution générale :

$$s_n = 1^n * (An + B) + 8^n * C$$

Trouvons la troisième condition initiale (on ne nous en a donné que 2 alors que l'ordre de l'ELRH obtenue vaut 3).

$$s_2 = 9s_1 + 3s_0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

Utilisons maintenant les conditions initiales. En effet, comme ce sont des conditions initiales, elles doivent vérifier la solution générale ! On a donc (sans oublier qu'on travaille dans $\mathbb{Z}^{11}$!)

$$\begin{cases} s_2 = 1 = 1^2 * (2A + B) + 8^2 * C \\ s_1 = 0 = 1^1 * (1A + B) + 8^1 * C \\ s_0 = 0 = 1^0 * (0A + B) + 8^0 * C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2A + B + 9C \\ 0 = A + B + 8C \\ 0 = B + C \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 9 \end{cases}$$

Et enfin, on remplace les polynômes $(An + B)$ et C par leur vraie valeur :

$$s_n = (3n + 2) + 9 * 8^n$$

C'est la solution de l'ELRNH donnée.