

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP1

ELECTROSTATIQUE 1

25 septembre 2017

1. Rappels analyse vectorielle

- Exercice 1.1 :
 - calcul du flux d'un champ vectoriel à travers une surface,
 - calcul de la divergence d'un champ vectoriel,
 - utilisation des coordonnées sphériques,
 - vérification du théorème de Gauss.
- Exercice 1.2 :
 - calcul d'intégrales curvilignes,
 - calcul de la circulation d'un champ vectoriel sur une courbe fermée,
 - vérification du théorème de Stokes.

2. Electrostatique

- Exercice 2.1 :
 - calcul du potentiel électrique V par superposition,
 - calcul du champ électrique \vec{E} par dérivation de V ,
 - tracés des lignes de champ et des équipotentielles,
 - application de l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
- Exercice 2.2 :
 - introduction d'une hypothèse : on néglige les effets de bord,
 - calcul du champ électrique \vec{E} par intégration directe pour une distribution linéaire de charges,
 - calcul du champ électrique par application du théorème de Gauss, exploitation de la symétrie du problème,
 - calcul du potentiel électrique V par primitivation.

Notations

- vecteur :

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} = A \hat{A}$$

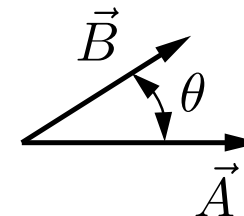
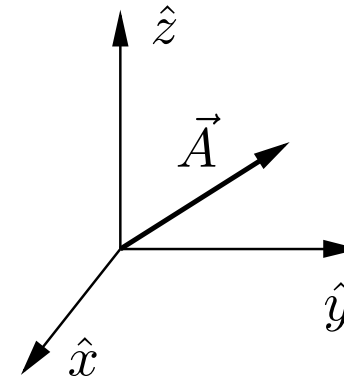
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = |\vec{A}|$$

= la norme de \vec{A}

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \text{vecteur unitaire selon } \vec{A}$$

- produit scalaire :

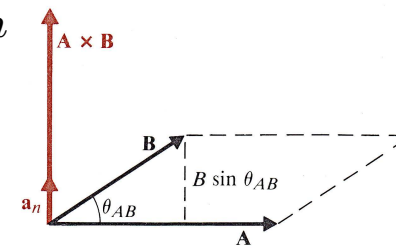
$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= AB \cos \theta \end{aligned}$$



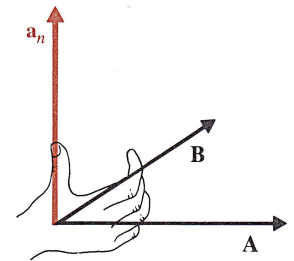
- produit vectoriel :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} = AB |\sin \theta_{AB}| \hat{a}_n$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_n |AB \sin \theta_{AB}|$.



(b) The right-hand rule.

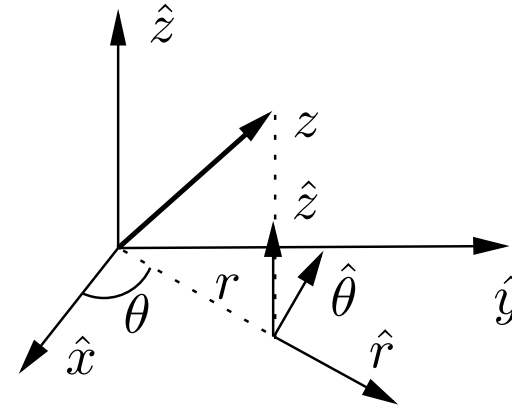
Systemes de coordonnées orthogonales

- Coordonnées cylindriques :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = r \cos \theta$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad y = r \sin \theta$$

$$dx, dy, dz \longleftrightarrow dr, r d\theta, dz$$



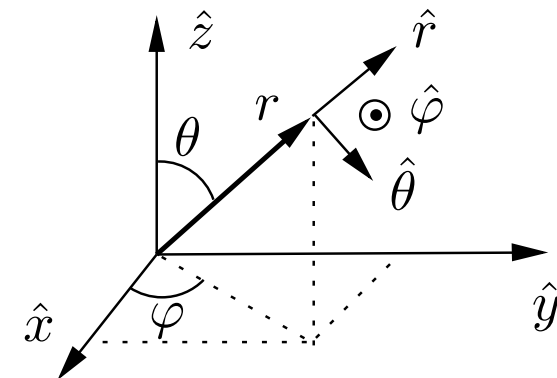
- Coordonnées sphériques :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad x = r \sin \theta \cos \varphi$$

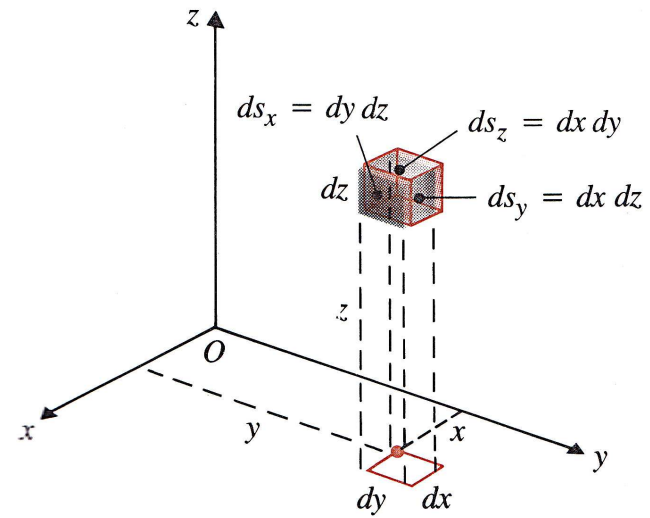
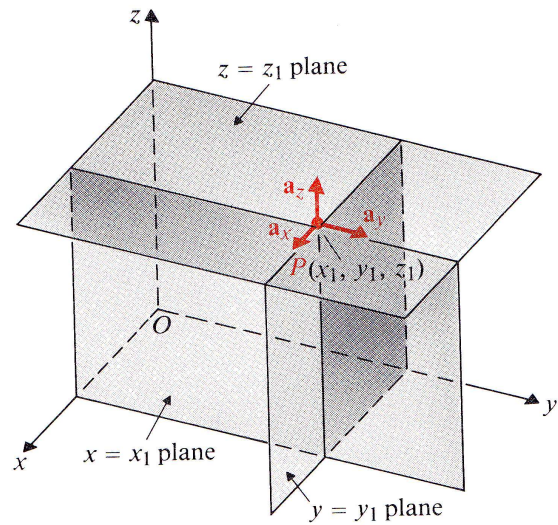
$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad z = r \cos \theta$$

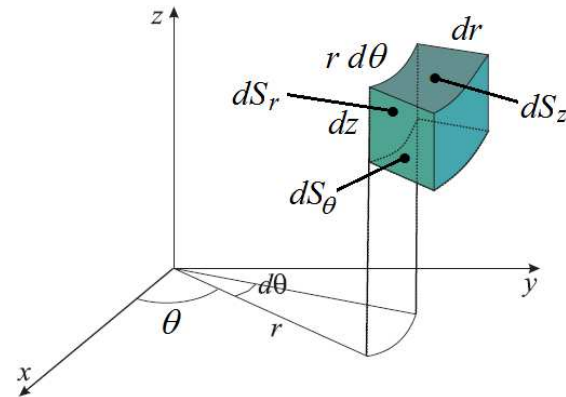
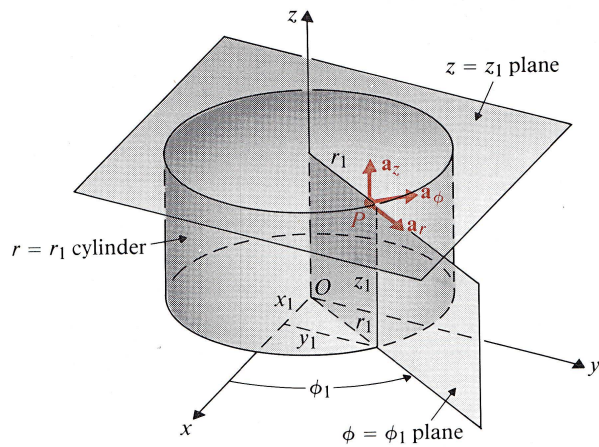
$$dx, dy, dz \longleftrightarrow dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$$



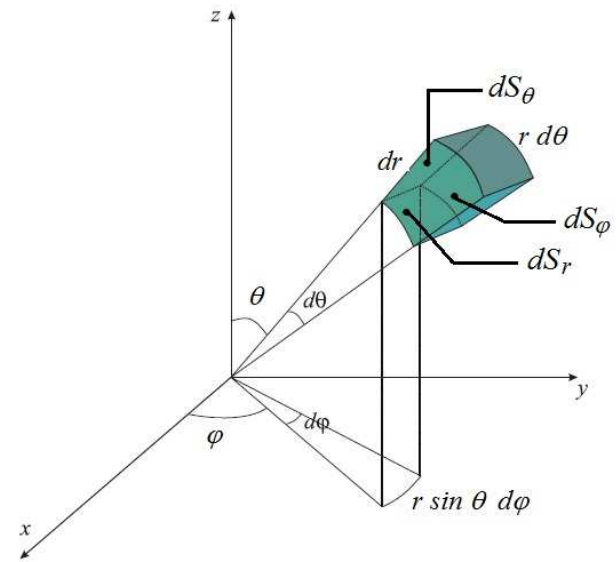
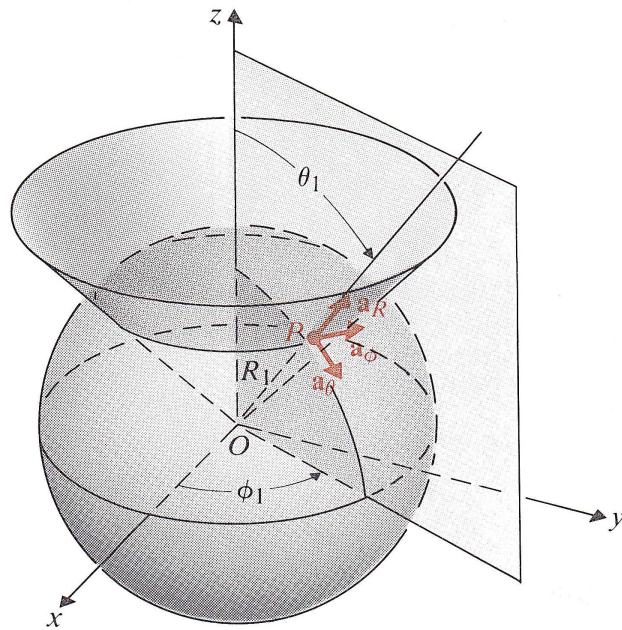
Coordonnées cartésiennes



Coordonnées cylindriques



Coordonnées sphériques



Opérations de l'analyse vectorielle

Opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

Attention !! : uniquement en coordonnées cartésiennes

Gradient d'un champ scalaire

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

- Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Divergence d'un champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (r E_z) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\end{aligned}$$

- Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta E_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta E_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r E_\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & r E_\theta & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

- Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & r E_\theta & r \sin \theta E_\varphi \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} + \\
 &+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \hat{\theta} + \\
 &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}
 \end{aligned}$$

Laplacien d'un champ scalaire

$$\nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned}$$

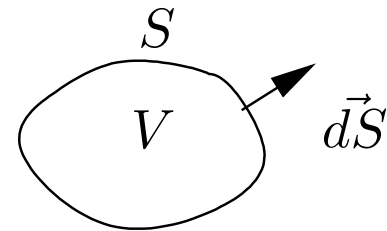
- Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Théorèmes importants

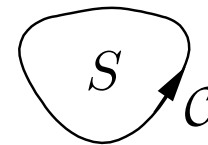
- Théorème de Gauss

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



- Théorème de Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Exercice 1.1 - Divergence et théorème de la divergence

Soit le vecteur $\vec{A} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$.

1. Calculez l'intégrale

$$I_S = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

sur la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.

2. Calculez $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, ainsi que l'intégrale

$$I_V = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV.$$

sur le volume de la même sphère.

3. Interprétez les résultats obtenus aux deux points précédents.

Schéma de résolution :

1. Coordonnées sphériques

$$\text{sur la sphère } \vec{A} = R \hat{r} \quad d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

$$I_S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^3$$

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = 3$$

$$I_V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 4\pi R^3$$

3. $I_V = I_S$: théorème de la divergence

Exercice 1.2 - Rotationnel et théorème de Stokes

Soit le vecteur $\vec{A} = A_0 \hat{x}$ où A_0 est une constante. Calculez les intégrales curvilignes suivantes :

$$I_1 = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{\ell},$$

$$I_2 = \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}.$$

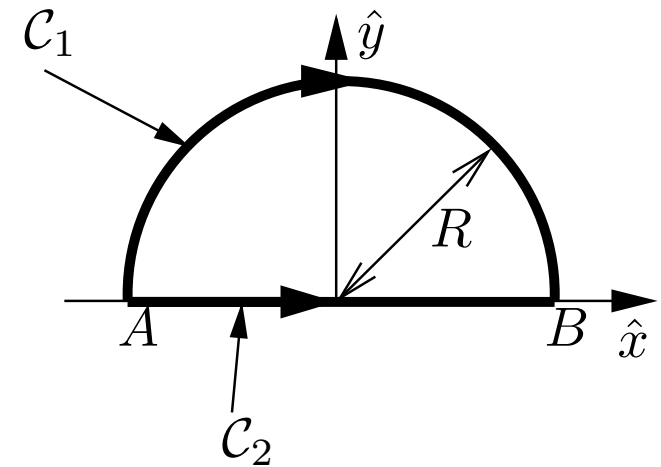


Schéma de résolution :

1. sur \mathcal{C}_1 :

$$\vec{d\ell} = R|d\theta|(-\hat{\theta}) \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot \vec{d\ell} &= \int_A^B A_0 R \sin\theta (-d\theta) \\ &= \int_0^\pi A_0 R \sin\theta d\theta = 2A_0 R \end{aligned}$$

2. sur \mathcal{C}_2 :

$$\vec{d\ell} = dx\hat{x}$$

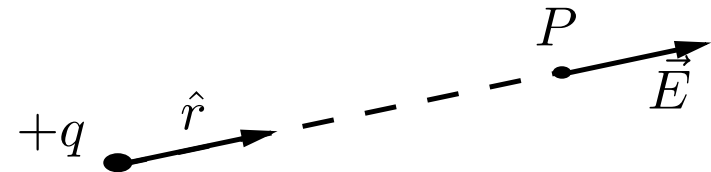
$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot \vec{d\ell} &= \int_A^B A_0 dx \\ &= \int_{-R}^R A_0 dx = 2A_0 R \end{aligned}$$

3. \vec{A} est un champ irrotationnel : $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

Champ électrique créé (dans le vide)

- par une charge ponctuelle q

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

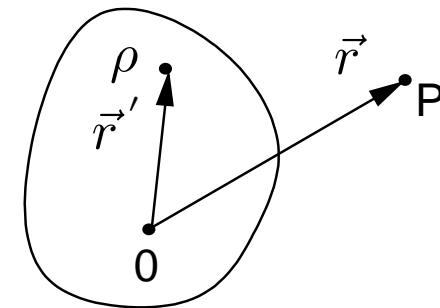


- par une ensemble de charges ponctuelles : application de la superposition

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

- par une charge distribuée sur un volume V

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV$$



- Equations de Maxwell relatives à \vec{E} , régime statique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

- Potentiel électrique V

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

V déterminé à une constante près.

- Différence de potentiel entre deux points A et B

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Différence de potentiel indépendante du chemin choisi !

Potentiel électrique créé (dans le vide)

- par une charge ponctuelle q

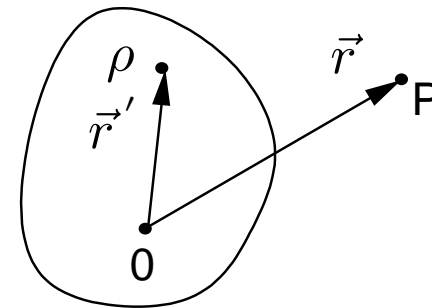
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

- par une ensemble de charges ponctuelles : application de la superposition

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + K$$

- par une charge distribuée sur un volume V

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + K$$

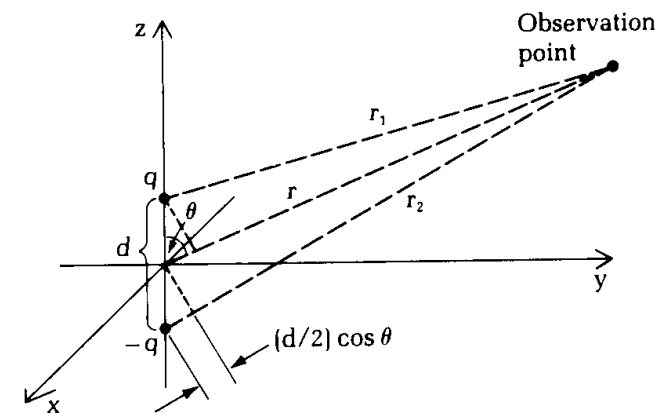


Exercice 2.1 - Dipôle électrique

Un dipôle électrique est constitué de deux charges électriques d'amplitudes égales et de signes opposés, distantes de d et placées dans le vide.

1. Déterminez l'expression du potentiel et du champ électrique du système en un point \vec{r} , dans la limite $d \ll |\vec{r}|$.
2. Représentez les lignes de champ.
3. Déterminez l'expression de la densité de charge électrique ρ en tout point de l'espace différent des deux charges ponctuelles.

Figure 9.2(b) An electrostatic dipole for which $d \rightarrow 0$.



1.

- Coordonnées sphériques
- Par superposition

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2|}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{d}{2}\hat{z} \quad \vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{d}{2}\hat{z}$$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta} \quad |\vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \theta}$$

- Pour $d \ll r$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \theta}} \simeq \frac{1}{r} \pm \frac{1}{2} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

$$V(r, \theta) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

avec $p = qd$ le moment dipolaire

- Champ électrique

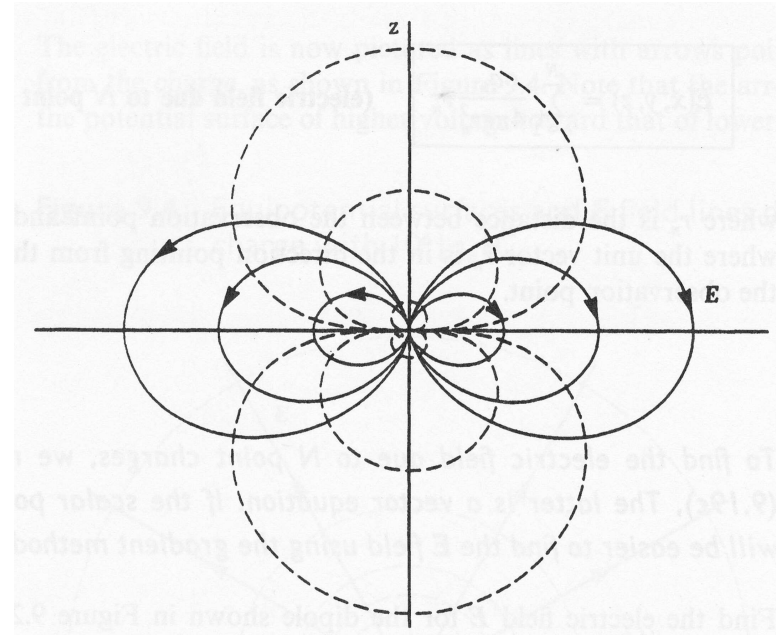
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}}{r^3} \right)$$

2. Lignes de champ et équipotentiellles

- Equation des équipotentiellles :

$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = V_0 \implies r = \left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 V_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Lignes de champ \perp en tout point aux équipotentiellles



3. Charge volumique

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

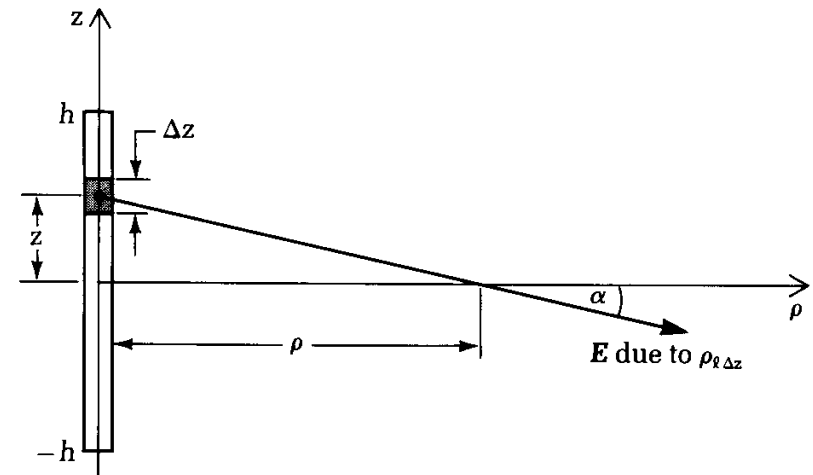
Finalemment $\rho = 0$ **OUF !**

Exercice 2.2 - Distribution linéaire de charges

On considère un système de charges électriques distribuées uniformément sur une droite indéfinie, avec une densité linéaire ρ_L (unités : C/m).

1. Déterminez l'expression du champ électrique de cette distribution
 - (a) par intégration directe,
 - (b) en utilisant le théorème de Gauss.
2. Déterminez l'expression du potentiel électrique correspondant.

Figure 9.6(a) Field along ρ axis due to a line charge.



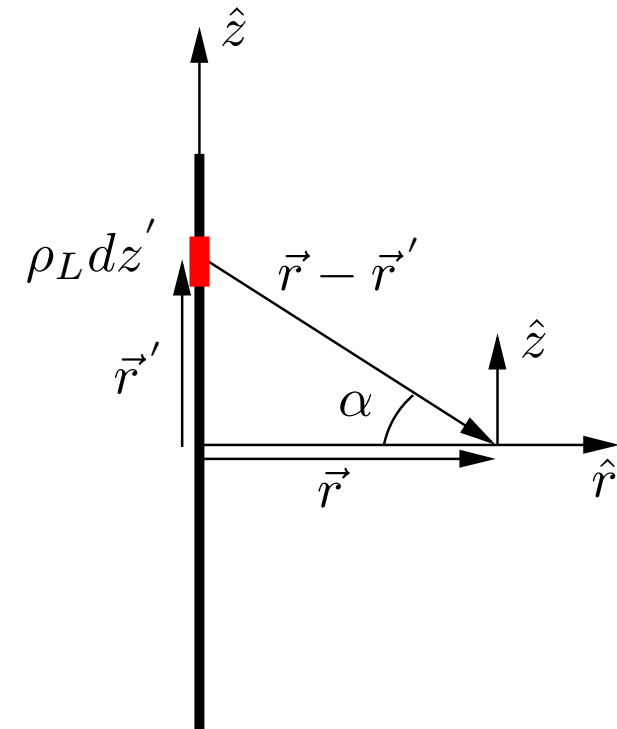
1. Calcul du champ \vec{E}

Par intégration directe

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz'$$

$$\vec{r} = r \hat{r} \quad \vec{r}' = z' \hat{z} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$E_z = 0 \quad E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(\sqrt{r^2 + z'^2})^3} dz'$$



Changement de variable $z' = r \tan \alpha$

$$E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \frac{\cos^3 \alpha}{r^3} \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

A retenir pour la suite et à savoir redéterminer :

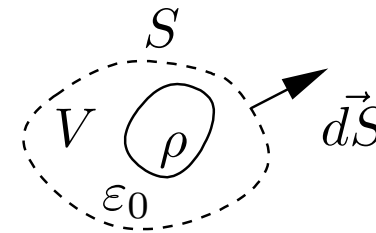
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3} dx = \frac{2}{a} \right)$$

Par application du théorème de Gauss

Application du théorème de Gauss à l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \rho dV$$



En pratique :

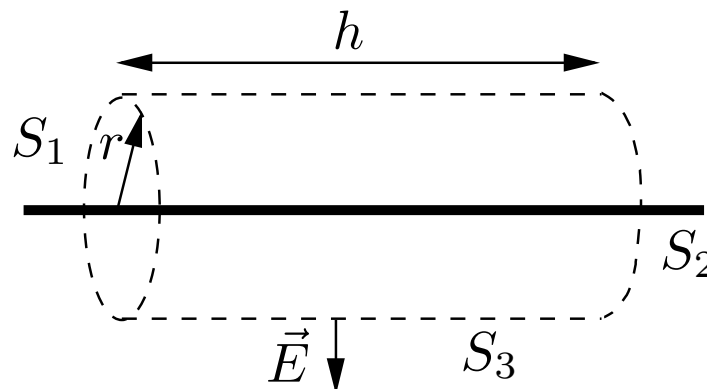
- exploiter la ou les symétries du problème
- choisir de manière judicieuse la surface de Gauss S :
 - \vec{E} parallèle ou perpendiculaire à $d\vec{S}$
 - \vec{E} d'amplitude constante sur S

- Par symétrie $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$
- Surface de Gauss = cylindre de hauteur h et de rayon r

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\int_0^h \rho_L dz}{\epsilon_0}$$

$$E_r 2\pi r h = \frac{\rho_L h}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$$



2. Calcul du potentiel V

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln r + K$$

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + K'$$

K' permet de fixer la valeur de V pour la dimension caractéristique r_0

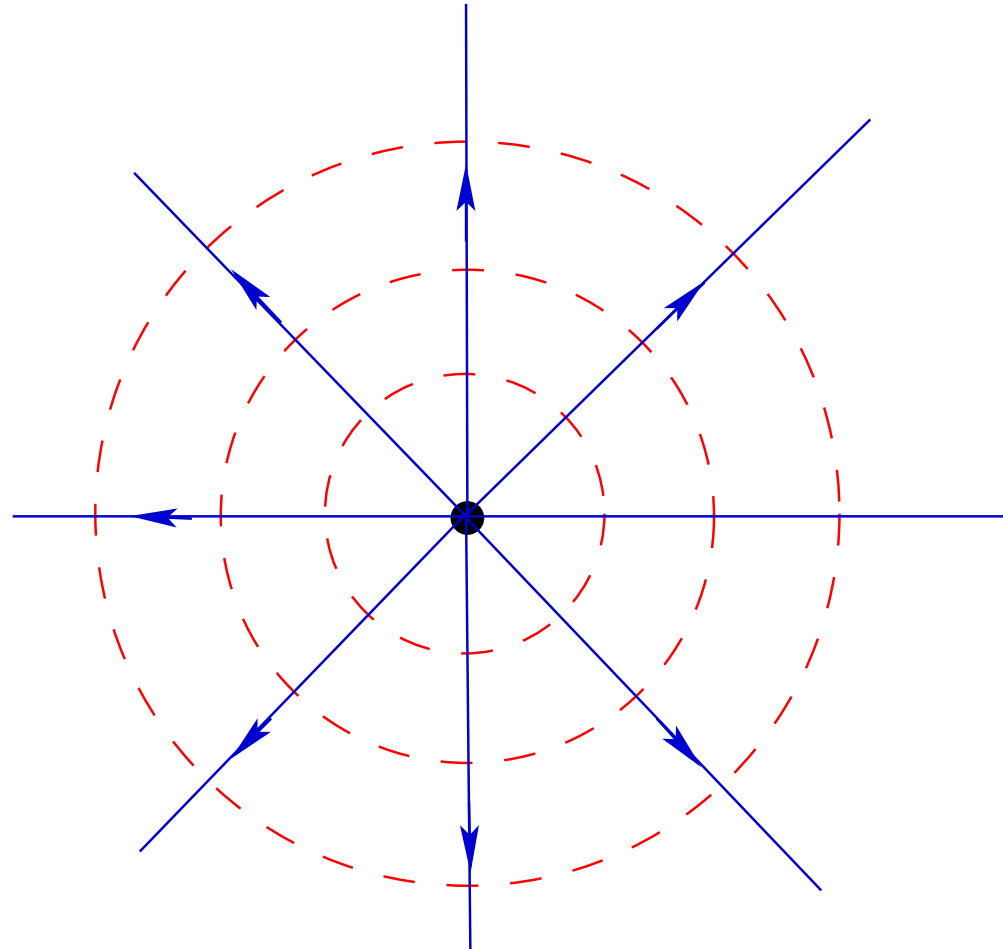
3. Lignes de champ et équipotentiellles

Equation des équipotentiellles :

$$\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} = V_0 \quad \Rightarrow \quad r = r_0 e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\rho_L}}$$

Equipotentielles = cylindres de rayon r

Lignes de champ \vec{E} radiales



Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 1.1 :

- plaque d'extension infinie dans le plan (y, z) portant des charges uniformément distribuées, densité de charges surfacique ρ_s C/m²
- effets de bord négligés,
- calcul du champ électrique en un point de l'axe x par intégration directe : décomposez la plaque en lignes élémentaires (parallèles à l'axe y ou à l'axe z), appliquez la superposition et exploitez le résultat de l'exercice 2.2,
- calcul du champ électrique par application du théorème de Gauss : exploitez la symétrie du problème pour déduire la forme particulière de \vec{E} .

2. Exercice EC. 1.2 :

- charge uniformément distribuée en volume dans une sphère de rayon b (densité de charge volumique ρ C/m³),
- calcul du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la la sphère par application du théorème de Gauss.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP2

ELECTROSTATIQUE 2

2 octobre 2017

1. Condensateurs et capacités

- Exercice 2.3 :

- capacité d'un condensateur plan,
- hypothèse : les effets de bord sont négligés, différence de potentiel V_0 connue,
- recours à l'équation de Laplace pour trouver l'expression du potentiel entre les deux armatures, calcul du champ électrique en fonction de V_0
- application du théorème de Gauss pour déterminer la densité de charges surfacique portée par les armatures,
- mise en évidence de la condition aux limites satisfaite par le champ \vec{E} à l'interface entre un conducteur parfait et le vide : **A RETENIR !!**

- Exercice 2.4 :

- capacité unitaire d'un câble coaxial à air : capacité par unité de longueur du câble, s'exprime en F/m
- même démarche qu'à l'exercice 2.3 mais en coordonnées cylindriques.
- A essayer à la maison, démarche inverse pour trouver la capacité C : supposer la densité de charge portée par les armatures connue et en déduire la différence de potentiel entre les armatures.

2. Méthode des images pour le calcul de V

- Exercice 2.5

- expression du potentiel créé par deux lignes chargées parallèles portant des densités de charges égales et opposées,
- recherche des équipotentiellles,
- résultat important, à la base des exercices suivants.

- Exercice 2.6

- potentiel créé par une ligne chargée en présence d'un plan parfaitement conducteur
- méthode des images pour la résolution de problème d'électrostatique incluant différentes géométries de conducteurs chargé
- détermination de la densité de charges surfaciques à la surface du plan conducteur

- Exercice 2.7

- potentiel créé par une ligne chargée à proximité d'un conducteur cylindrique
- application de la méthode des images

Résolution de problèmes d'électrostatique via l'équation de Laplace

Le potentiel V satisfait à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dans une région de l'espace dépourvue de charges sources ($\rho = 0$), équation de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Méthode de calcul de V dans un domaine de l'espace extérieur aux charges sources:

- rechercher une solution à $\nabla^2 V = 0$ dans le domaine de l'espace considéré;
- exploiter les propriétés de symétrie pour "deviner" une solution;
- appliquer les conditions aux limites sur les frontières du domaine.

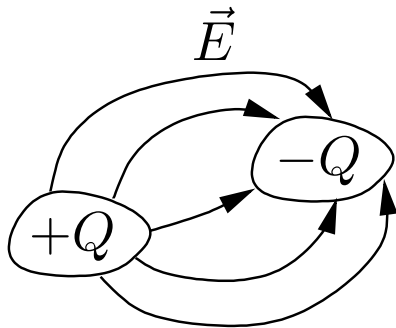
Théorème d'unicité

La solution à ce problème est unique !

Condensateur et capacité

Condensateur :

ensemble de deux conducteurs portant des charges égales et opposées $+Q$, $-Q$, faisant naître une différence de potentiel ΔV entre les deux conducteurs.



Capacité du condensateur :

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

C est une constante dépendant de la géométrie du système (*ainsi que du matériau séparant les deux conducteurs*)

Détermination de la capacité d'un condensateur.

Deux procédures possibles :

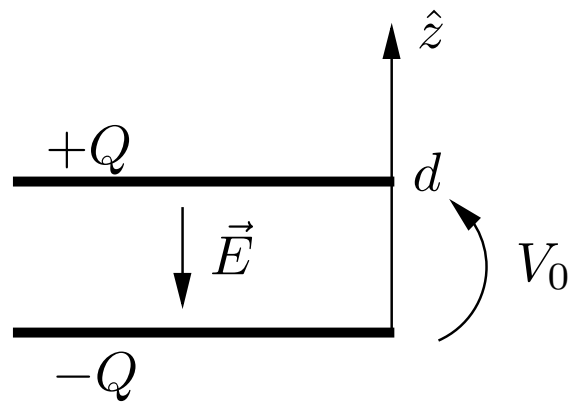
1. Supposer connue la d.d.p. ΔV entre les deux conducteurs
 - rechercher l'expression du potentiel V et du champ électrique dans l'espace entre les deux conducteurs (équation de Laplace)
 - en déduire la charge Q portée par les conducteurs (théorème de Gauss).
2. Supposer connue la charge Q portée par les conducteurs
 - rechercher l'expression du champ électrique dans l'espace entre les deux conducteurs (théorème de Gauss)
 - en déduire la d.d.p. ΔV entre les deux conducteurs.

Exercice 2.3 - Capacité du condensateur plan - Equation de Laplace

On considère un condensateur plan à air dont les plateaux sont séparés d'une distance d . Le potentiel du plateau supérieur vaut V_0 volts, celui du plateau inférieur vaut 0 volt.

1. En partant de l'équation de Laplace, déterminez les expressions du potentiel et du champ électrique entre les deux plateaux. On négligera les effets de bord.
2. Quelle est l'expression de la charge surfacique portée par le plateau supérieur ?
3. Déterminez l'expression de la capacité de ce système.

1. Calcul du potentiel V



- Effets de bord négligés : $\vec{E} = E_z(z)\hat{z}$, $V = V(z)$
- Domaine de l'espace : $0 \leq z \leq d$
- Conditions aux limites :

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0$$

$$V = V_0 \quad \text{pour} \quad z = d$$

- Solution générale de $\nabla^2 V$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(z) = Az + B$$

- Application des conditions aux limites :

- $V = 0$ pour $z = 0$: $B = 0$

- $V = V_0$ pour $z = d$: $A = \frac{V_0}{d}$

$$V(z) = V_0 \frac{z}{d} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z}$$

2. Charge surfacique:

- \vec{E} est nul en tout point extérieur au condensateur
- Application du théorème de Gauss sur un parallépipède de base $S \rightarrow 0$ et entourant la plaque supérieure du condensateur

$$\varepsilon_0 E S = Q_S \quad , \quad \varepsilon_0 E = \frac{Q_S}{S}$$

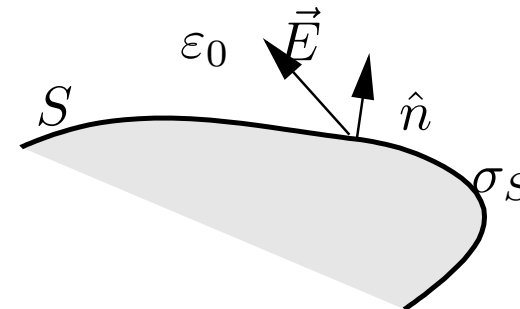
$$\lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{Q_S}{S} \right) = \sigma_S \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 E = \sigma_S$$

$$\sigma_S = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \quad \text{densité de charges uniforme}$$

D'une manière générale, pour une densité de charge non uniforme : \vec{E} d'amplitude non constante à la surface du conducteur :

$$\sigma_S = \varepsilon_0 \vec{E}|_S \cdot \hat{n}$$

\hat{n} = normale extérieure au conducteur



3. Capacité

$$Q = \int_S \sigma_S dS = \sigma_S S = \varepsilon_0 \frac{V_0 S}{d}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Exercice 2.4 - Capacité d'un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe et de rayons respectifs a et b , avec $b > a$. Les conducteurs sont placés dans l'air.

1. Déterminez l'expression de la capacité unitaire (par unité de longueur) du système.
2. Donnez-en une valeur numérique dans le cas suivant : le rayon extérieur est égal à $b = 0.5$ cm, le conducteur intérieur a une section de 1 mm^2 .

1. Capacité du système

- Recherche du potentiel V dans l'espace séparant les deux conducteurs

Résolution de l'équation de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{pour } a \leq r \leq b \quad \text{avec } V = V(r) \quad \text{et} \quad \begin{cases} V = V_0 & \text{pour } r = a \\ V = 0 & \text{pour } r = b \end{cases}$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r} \quad \Rightarrow \quad V = A \ln r + B$$

$$r = a : V_0 = A \ln a + B$$

$$r = b : 0 = A \ln b + B$$

$$V = \frac{V_0}{\ln a/b} \ln \frac{r}{b}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{V_0}{\ln b/a} \frac{1}{r} \hat{r}$$

- Densité de charge linéaire ρ_L portée par le cylindre intérieur.

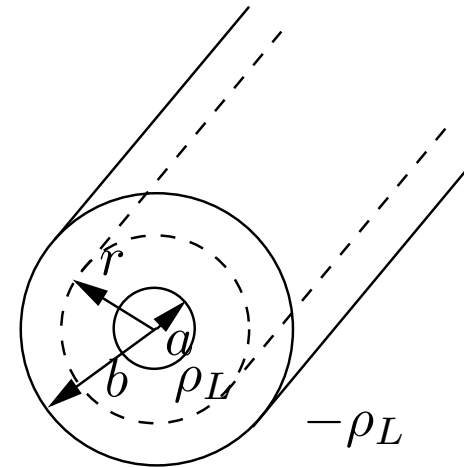
Application du théorème de Gauss sur la surface d'un cylindre de rayon $a \leq r \leq b$ et de hauteur $h = 1$ m.

$$2\pi\epsilon_0 r E_r = \rho_L \quad E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Expression identique à celle du conducteur linéaire de l'exercice 2.2 !

Remplaçant $E_r = f(V_0)$:

$$\rho_L = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln b/a}$$

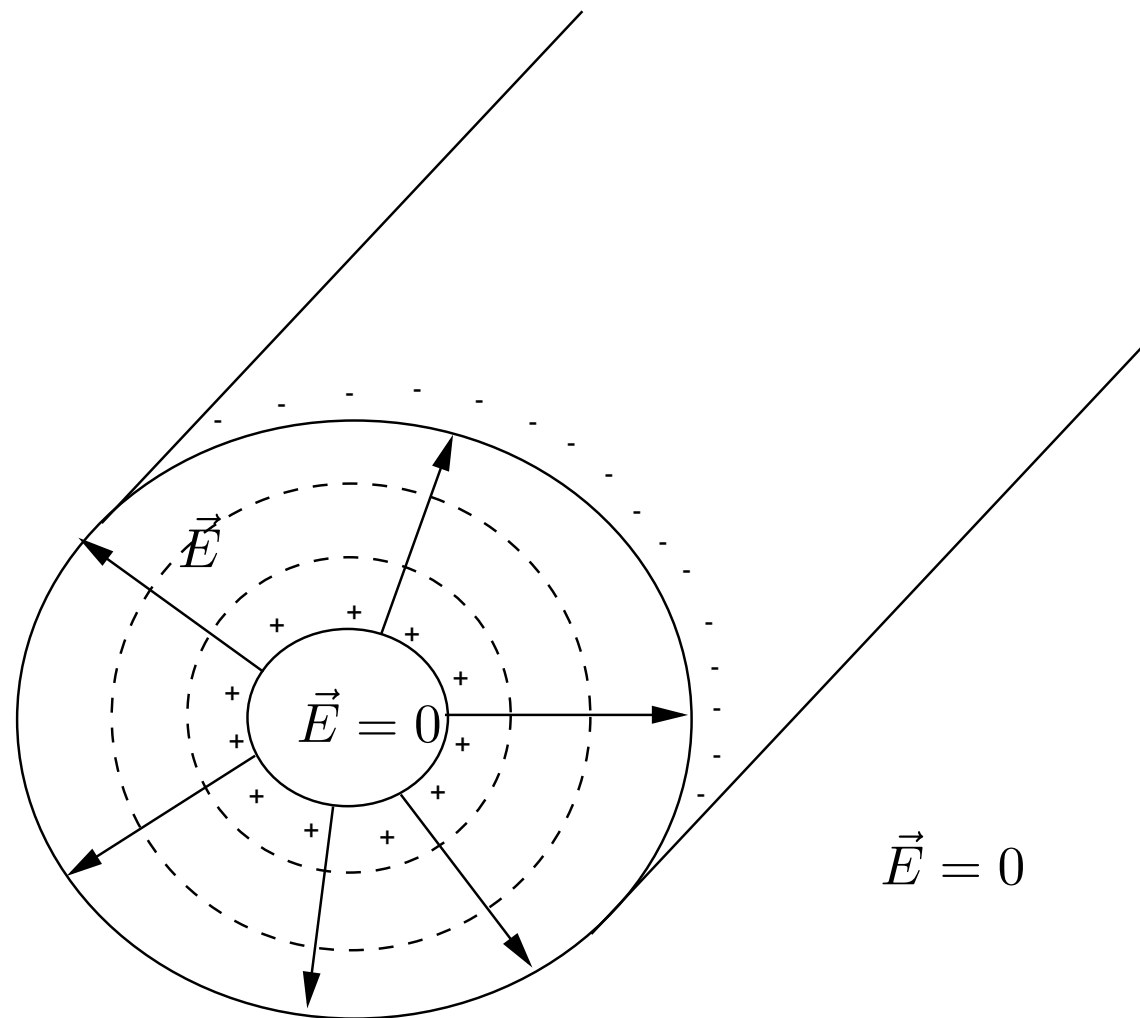


$$C = \frac{\rho_L}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$$

2. Numériquement :

$$C = 25.5 \text{ pF/m}$$

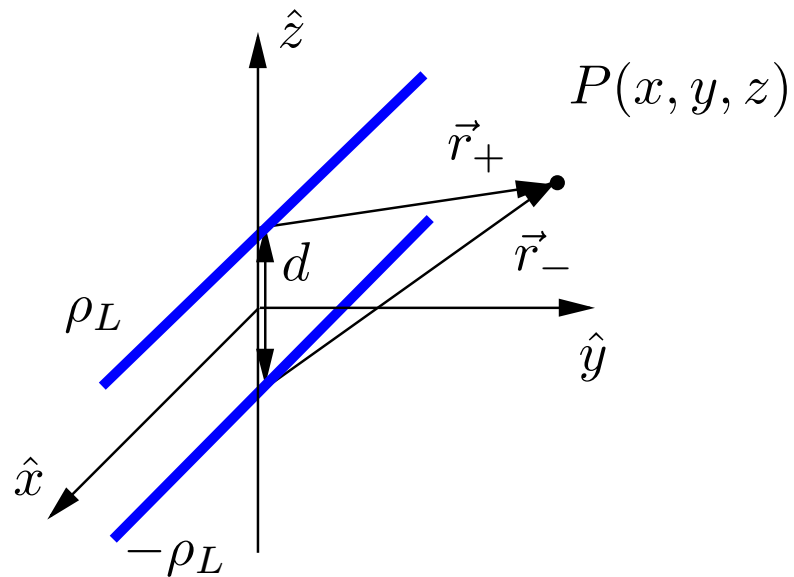
Lignes de champ et equipotentielles



Exercice 2.5 - Deux lignes chargées parallèles

On considère deux lignes uniformément chargées, portant respectivement une densité de charge linéaire ρ_L et $-\rho_L$, placées parallèlement dans le vide à une distance d l'une de l'autre.

1. Déterminez l'expression du potentiel électrique du système en tout point de l'espace.
2. Esquissez l'allure des courbes équipotentiellles et des lignes de champ électrique.



1. Expression du potentiel V

Application de la superposition

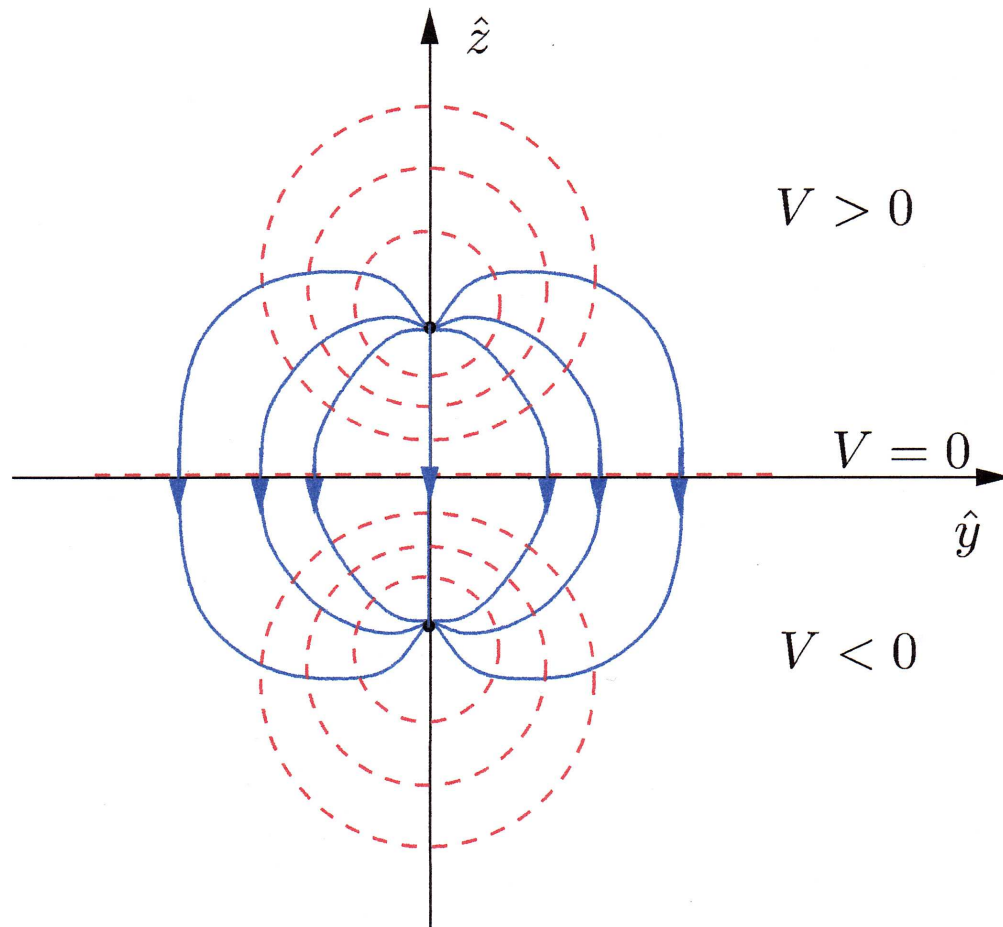
$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V_+ + V_- = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\vec{r}_-|}{|\vec{r}_+|} + K \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}}{\sqrt{y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} + K \end{aligned}$$

Si $K = 0$: $V \rightarrow 0$ pour $P \rightarrow \infty$

2. Equation des équipotentiellles

Données par :

$$\frac{|\vec{r}_-|}{|\vec{r}_+|} = \frac{\sqrt{y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}}{\sqrt{y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} = p$$



$$y^2 + \left(z - \frac{d p^2 + 1}{2 p^2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{d p}{p^2 - 1} \right)^2$$

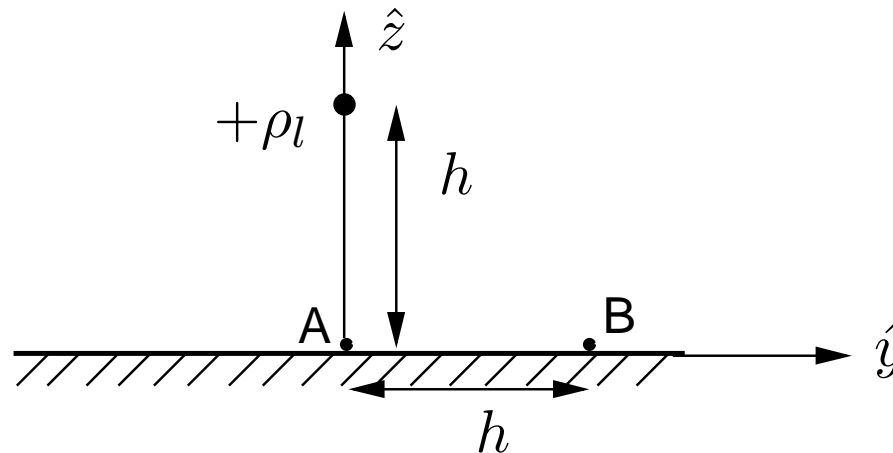
Equation de cercles de rayon $\frac{d p}{|p^2 - 1|}$

et de centre $\left(0, \frac{d p^2 + 1}{2 p^2 - 1} \right)$

Exercice 2.6 - Distribution linéaire de charges au dessus d'un plan conducteur : application de la méthode des images

Une ligne uniformément chargée (densité de charge ρ_L) est placée parallèlement à un plan conducteur d'extension infinie, à une distance h de celui-ci.

1. Déterminez les expressions du potentiel V et du champ électrique \vec{E} au dessus du plan conducteur.
2. Déterminez la densité de charge électrique induite par unité de surface sur le plan conducteur.
3. A partir du principe de superposition, déterminez les valeurs du champ électrique aux points A et B du plan.



- Problème :

$$\begin{aligned} & \text{Résoudre } \nabla^2 V = 0 \quad \text{dans le domaine } z \geq 0 \\ & \text{avec les conditions limites } \begin{cases} V \rightarrow 0 & \text{pour } y, z \rightarrow \infty \\ V = 0 & \text{pour } z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- En l'absence de plan conducteur

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{\sqrt{y^2 + (z - h)^2}}$$

satisfait $\nabla^2 V = 0$ mais pas la condition limite $V = 0$ (équipotentiels = cercles concentriques à ρ_L)

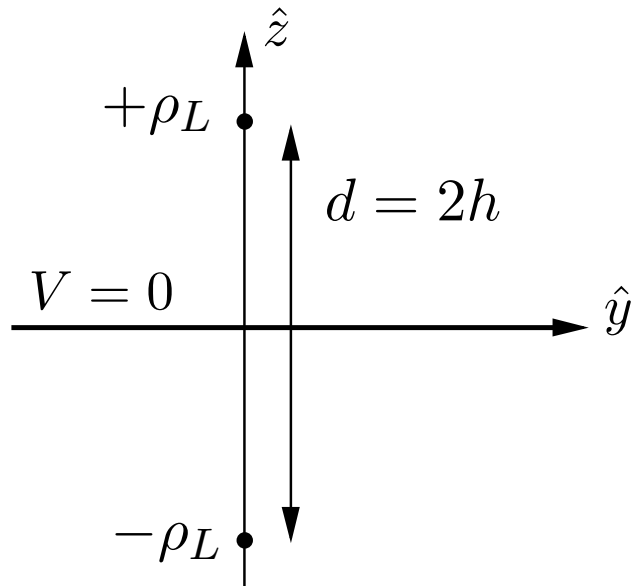
- Par contre, le potentiel

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{y^2 + (z + h)^2}}{\sqrt{y^2 + (z - h)^2}}$$

satisfait à l'équation de Laplace et aux conditions limites dans le domaine $z \geq 0$

- En vertu du théorème d'unicité, c'est **la** solution du problème !

Méthode des images



Le potentiel solution est équivalent à celui créé par deux charges linéaires parallèles séparées d'une distance $d = 2h$.

Le plan conducteur est remplacé par une charge $-\rho_L$, "image" de la charge ρ_L par rapport au plan, de manière à satisfaire les conditions limites sur le plan.

La charge image est placée en dehors de l'espace dans lequel on recherche le potentiel.

Pour certaines géométries, plusieurs charges images peuvent être nécessaires.

- Champ électrique :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y\hat{y} + (z-h)\hat{z}}{y^2 + (z-h)^2} - \frac{y\hat{y} + (z+h)\hat{z}}{y^2 + (z+h)^2} \right)\end{aligned}$$

- Densité de charge surfacique sur le plan conducteur :

$$\sigma_S = \hat{n} \cdot \epsilon_0 \vec{E}|_{z=0} = -\epsilon_0 |\vec{E}|_{z=0} = \frac{-\rho_L}{\pi} \frac{h}{y^2 + h^2}$$

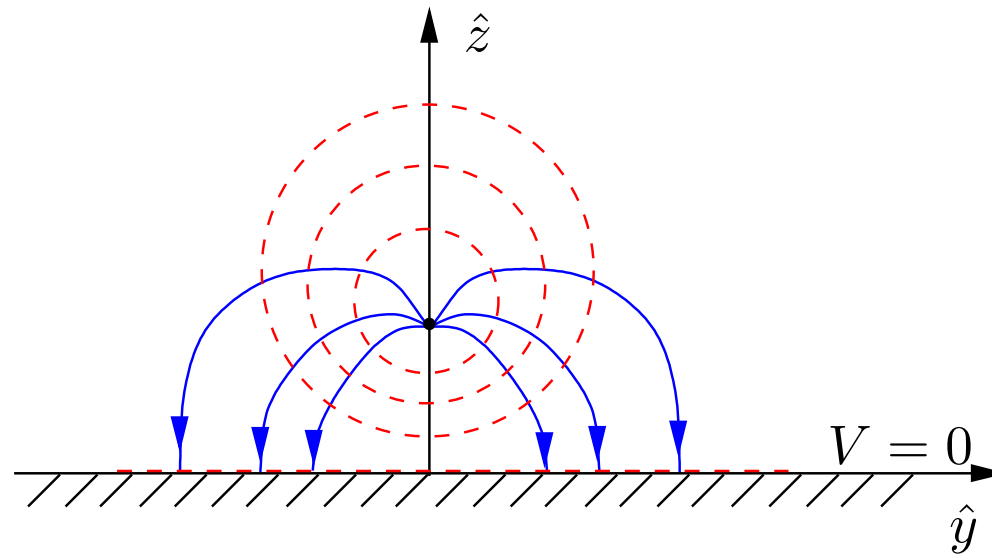
On observe :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_S(y) dy = -\rho_L \quad !$$

- ρ_L

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{V=0} \quad \downarrow \vec{E}|_{z=0} \quad \uparrow \hat{n}$$

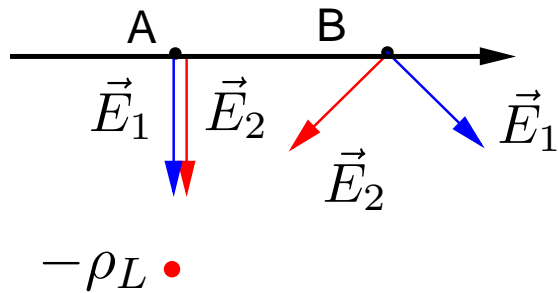
- Lignes de champ :



- Champ \vec{E} aux points A et B

Par superposition des champs créés par la charge ρ_L et son image $-\rho_L$ en A :

$+\rho_L \bullet$



$$\vec{E}_1 \text{ dû à } \rho_L : \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 h} (-\hat{z})$$

$$\vec{E}_2 \text{ dû à } -\rho_L : \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 h} (-\hat{z})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-\rho_L}{\pi\epsilon_0 h} \hat{z}$$

en B :

$$\vec{E}_1 \text{ dû à } \rho_L : \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{y} - \hat{z})}{2h}$$

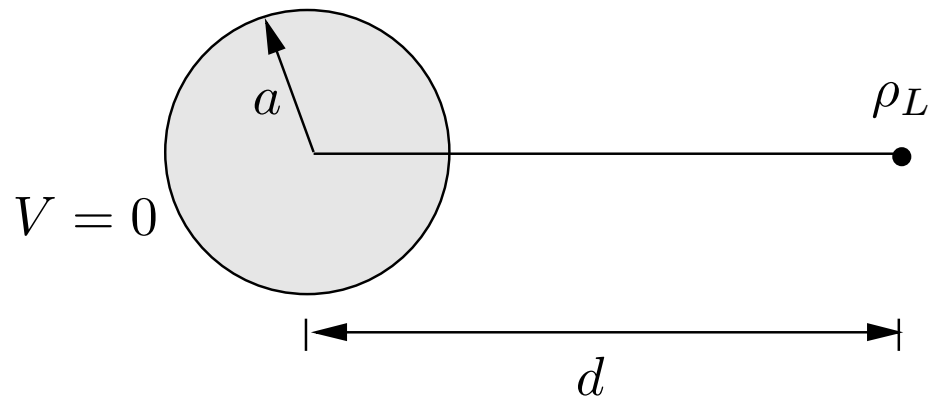
$$\vec{E}_2 \text{ dû à } -\rho_L : \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(-\hat{y} - \hat{z})}{2h}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0 h} \hat{z}$$

Exercice 2.7 - Ligne à proximité d'un conducteur cylindrique

On considère une ligne uniformément chargée (densité de charges linéaire ρ_L) placée parallèlement à un conducteur cylindrique plein de rayon a , porté à un potentiel nul.

Déterminez l'expression du potentiel électrique du système.

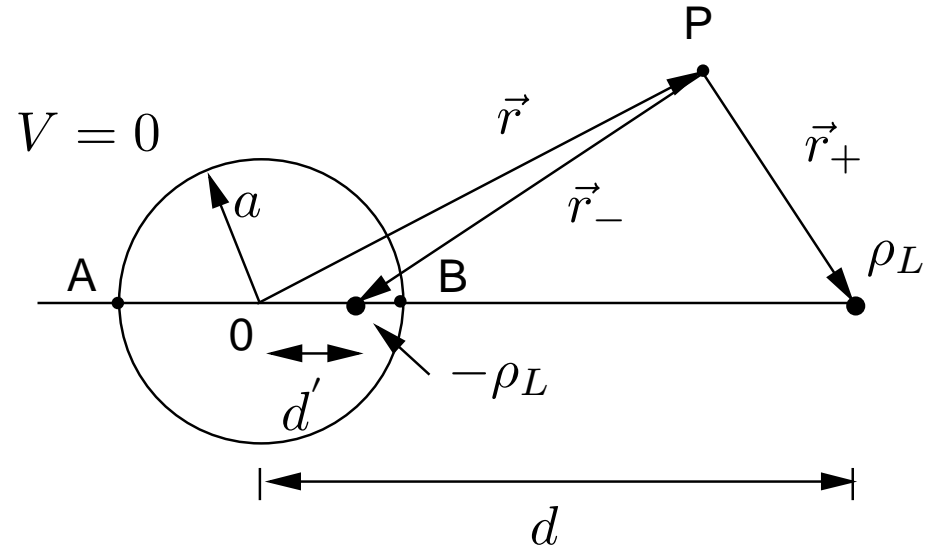


- Problème :

Résoudre $\nabla^2 V = 0$ dans le domaine $r \geq a$

avec les conditions limites
$$\begin{cases} V \rightarrow Cte & \text{pour } r \rightarrow \infty \\ V = 0 & \text{pour } r = a \end{cases}$$

- Application de la méthode des images
 - placer une charge linéaire image $-\rho_L$ de façon à obtenir une équipotentielle $V = 0$ pour $r = a$, surface du cylindre conducteur
 - l'emplacement de la charge image d' doit permettre de satisfaire cette condition



- Forme générale du potentiel :

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\vec{r}_-|}{|\vec{r}_+|} + K$$

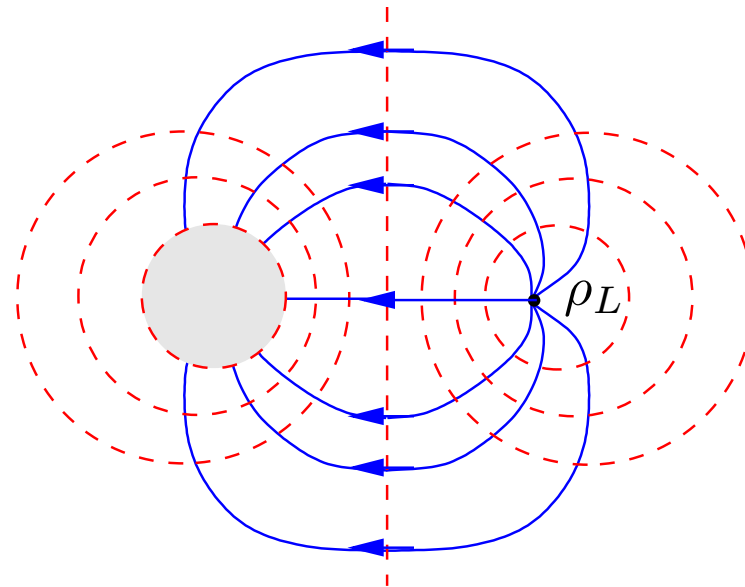
- Conditions en $r = a$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{au point A : } \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d'+a}{d+a} + K = 0 \\ \text{au point B : } \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-d'}{d-a} + K = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d' = \frac{a^2}{d} \\ K = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} \end{array} \right.$$

- Solution du problème en coordonnées polaires :

$$V = \begin{cases} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 d^2 + a^4 - 2ra^2 d \cos \theta}}{\sqrt{r^2 a^2 + a^2 d^2 - 2ra^2 d \cos \theta}} & \text{pour } r \geq a \\ 0 & \text{pour } r < a \end{cases}$$

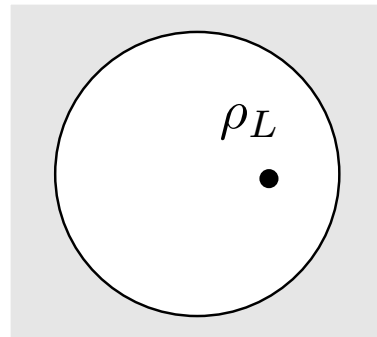
- Lignes de champ et équipotentielles :



- Autres géométries qui présentent la même configuration de charges images:



Deux cylindres parallèles



Charge linéaire à l'intérieur d'un cylindre creux

- Remarque :

Si $d \gg a$ on a $d' \ll a$: on peut supposer la charge image placée au centre du conducteur cylindrique.

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 1.3 :

- charge de densité linéaire placée dans un coin conducteur,
- application de la méthode des images,
- placez des charges images appropriées pour annuler le potentiel sur les faces du coin conducteur.

2. Exercice EC. 1.4 :

- charge de densité linéaire placée à l'intérieur d'un cylindre conducteur creux,
- application de la méthode des images,
- placez une charge image à l'extérieur du cylindre de manière à obtenir une équipotentielle à la surface du conducteur cylindrique (inspirez-vous de l'exercice 2.7).

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP3

ELECTROSTATIQUE 3

9 octobre 2017

1. Calcul de capacités - Méthode des images

- Exercice 2.8 :
 - capacité unitaire d'une ligne bifilaire,
 - hypothèse $d \gg a$: deux charges images placées au centre des conducteurs.
- Exercice 2.9 :
 - capacité unitaire d'un conducteur cylindrique en présence du sol,
 - hypothèse $h \gg a$ non satisfaite : la charge image n'est pas placée au centre du cylindre.

2. Condensateur et matériau diélectrique - Polarisation

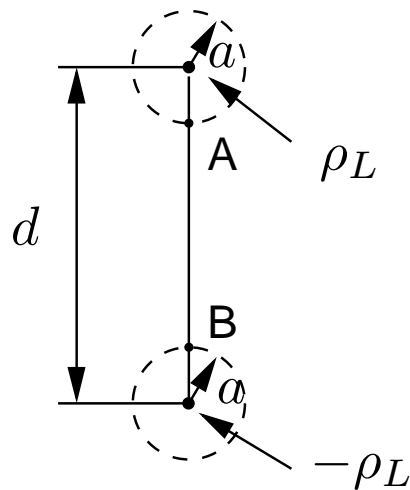
- Exercice 2.10 :
 - capacité d'un condensateur plan avec matériau diélectrique,
 - détermination de densités de charges libres et de charges liées,
 - introduction du champ de déplacement électrique \vec{D} , notion de susceptibilité diélectrique et de permittivité relative.
- Exercice 2.11 :
 - capacité d'un condensateur à deux milieux : matériau diélectrique + air,
 - condition limite vérifiée par \vec{D} à l'interface entre les deux milieux,
 - phénomène de claquage et notion de rigidité diélectrique.

Exercice 2.8 - Capacité unitaire d'une ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire, constituée de deux conducteurs cylindriques de rayon a placés parallèlement à une distance d l'un de l'autre.

En supposant que $d \gg a$, établissez l'expression de la capacité électrique par unité de longueur du système.

- Soient ρ_L et $-\rho_L$ les densités de charges linéaires portées par les deux conducteurs.
- Méthode des images : remplacer les conducteurs par deux charges linéaires à placer à l'intérieur des deux conducteurs.
- Hypothèse : $d \gg a \Rightarrow$ les charges images sont supposées placées au centre de chaque conducteur.



Potentiel du conducteur ρ_L évalué au point A :

$$V_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} + K$$

Potentiel du conducteur $-\rho_L$ évalué au point B :

$$V_- = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} + K$$

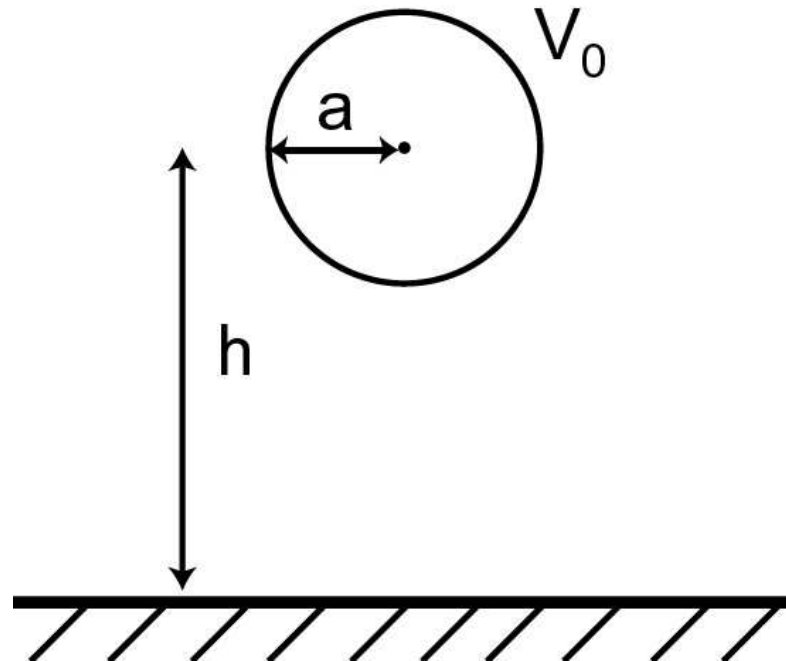
- Différence de potentiel entre les deux conducteurs :

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} \Rightarrow C = \frac{\rho_L}{\Delta V} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln d/a}$$

Exercice 2.9 - Capacité d'un système composé d'un conducteur cylindrique et d'un plan conducteur

On considère un cylindre conducteur placé parallèlement à un plan conducteur. Le cylindre est porté au potentiel V_0 , le plan conducteur est relié à la masse.

Déterminez la capacité unitaire du système.



- Recherche du potentiel. Problème :

Résoudre $\nabla^2 V = 0$ dans le domaine $r \geq a, z > 0$

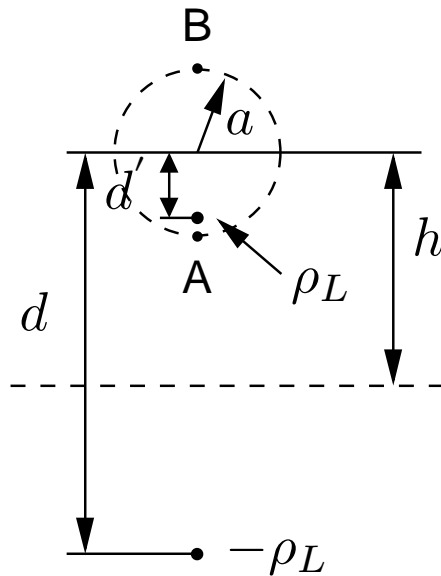
avec les conditions limites
$$\begin{cases} V = 0 & \text{pour } z = 0 \\ V = V_0 & \text{pour } r = a \end{cases}$$

- Application de la méthode des images :

Le cylindre conducteur et le sol sont remplacés par deux charges image linéaires portant les densités de charges ρ_L et $-\rho_L$ et placées à l'intérieur des conducteurs

Forme générale du potentiel :

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+} + K$$



Il faut :

- $V(z = 0) = 0 \Rightarrow h - d' = \frac{d-d'}{2}$ et $K = 0$
- $V(A) = V(B) = V_0$

$$\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a-d'} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+a}{a+d'}$$

$$\Rightarrow d' = a^2/d$$

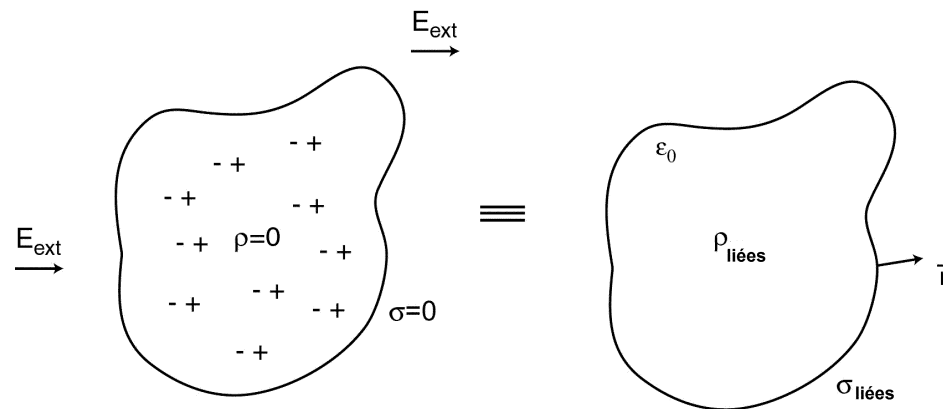
$$V_0 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}}$$

Polarisation électrique

Dans un milieu diélectrique, sous l'application d'un champ électrique :

- des dipôles élémentaires se créent et/ou s'organisent pour s'orienter dans le sens du champ électrique appliqué = polarisation
- apparition de charges liées distribuées en volume ρ_{pol} et de charges liées distribuées en surface σ_{pol} : charges liées ou de polarisation



- Soit \vec{P} le moment dipolaire par unité de volume, on a :

$$\rho_{liées} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_{liées} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

- Vecteur déplacement électrique \vec{D} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = (\rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{liées}}) - \rho_{\text{liées}} = \rho_{\text{libres}}$$

- Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

χ est la susceptibilité électrique du milieu

ε_r est la permittivité relative du milieu

ε est la permittivité électrique du milieu

Exercice 2.10 - Condensateur plan avec matériau diélectrique

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon \\ \hline \end{array} & \equiv & \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon_0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \vec{E} \end{array} & & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \vec{E} \end{array} \\ +\sigma \quad -\sigma & \sigma + \sigma_{\text{liées},1} & -\sigma + \sigma_{\text{liées},2} \end{array}$$

On considère un condensateur plan (à diélectrique, de permittivité ε) dont les plateaux ont une surface S et sont séparés de d . Le condensateur est soumis à une différence de potentiel de V_0 volts.

1. Déterminez les expressions de la densité de surface des charges libres, σ , de la densité de surface des charges liées, $\sigma_{\text{liées}_{1,2}}$, et du champ électrique \vec{E} régnant entre les plateaux.
2. Déduisez-en l'expression de la capacité C du condensateur.
3. Calculez les valeurs numériques de σ , $\sigma_{\text{liées}_{1,2}}$, \vec{E} et C dans les deux cas suivants :
 - (a) $S = 1 \text{ mm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$, $V_0 = 10 \text{ V}$ et $\varepsilon_r = 1$ (air),
 - (b) $S = 1 \text{ mm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$, $V_0 = 10 \text{ V}$ et $\varepsilon_r = 6$ (mica).

- Expression du potentiel et du champ électrique dans le condensateur: voir exercice 2.3 (effets de bord négligés)

$$V = \frac{V_0}{d} z \quad \vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z}$$

- charges liées induites par polarisation : milieu linéaire homogène et isotrope

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

- charges liées induites en volume $\rho_{\text{liées}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$
- charges liées induites en surface

$$\sigma_{\text{liées},1} = \vec{P} \cdot \hat{n} = -P = -\epsilon_0 \chi E \quad \sigma_{\text{liées},2} = \vec{P} \cdot \hat{n} = P = \epsilon_0 \chi E$$

- A la surface de la plaque supérieure :

$$\varepsilon_0 E = \sigma_{\text{libres}} + \sigma_{\text{liées},1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{libres}} = \varepsilon_0(1 + \chi)E = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V_0}{d}$$

- Pour V_0 (ou E) fixé, la présence du diélectrique permet d'augmenter les charges libres stockées sur les plateaux du condensateur
- Pour σ_{libres} fixé, la présence du diélectrique permet de réduire le champ électrique nécessaire
- Capacité du condensateur :

$$C = \frac{Q_{\text{libres}}}{V_0} = \frac{S\sigma_{\text{libres}}}{V_0} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

- Valeurs numériques :

$$E = 10^4 \text{ V/m}$$

1. Condensateur à air :

Polarisation négligeable

$$\sigma_{\text{libres}} = \varepsilon_0 E = 8.85 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad \sigma_{\text{liées},1} = \sigma_{\text{liées},2} = 0$$

$$C = 8.85 \cdot 10^{-3} \text{ pF}$$

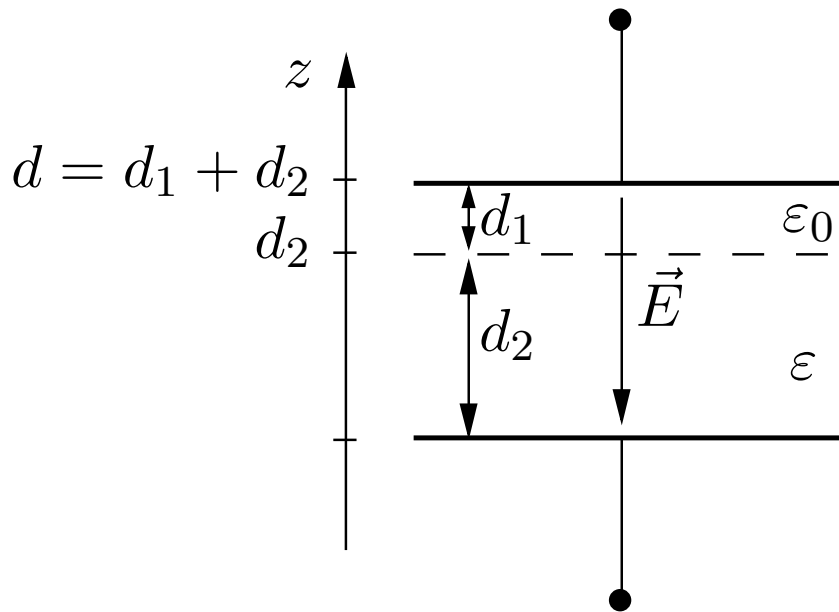
2. Condensateur à diélectrique de permittivité ε

Charges libres et charges liées induites par polarisation

$$\sigma_{\text{libres}} = \varepsilon E = 53.12 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad \sigma_{\text{liées},1} = -\sigma_{\text{liées},2} = -44.27 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$C = 53.12 \cdot 10^{-3} \text{ pF}$$

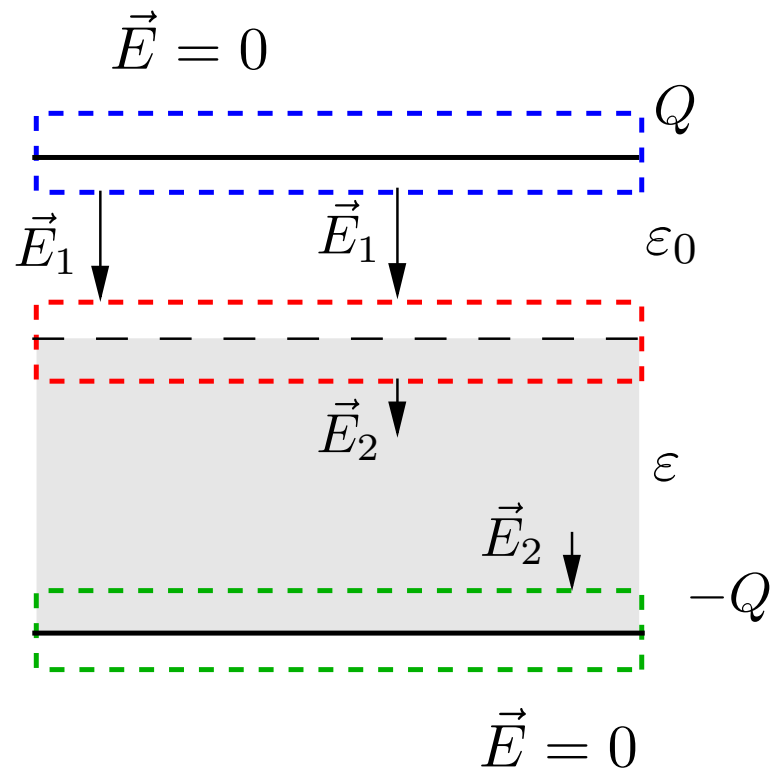
Exercice 2.11 - Condensateur à deux diélectriques



On considère un condensateur plan dont la partie isolante est constituée de deux couches diélectriques. La première couche est de l'air ($\epsilon_r = 1$) et a une épaisseur $d_1 = 0.1$ mm. La deuxième couche est composée de mica ($\epsilon_r = 6$) et a une épaisseur $d_2 = 0.9$ mm. La surface des plateaux vaut $S = 1$ cm² et leur séparation vaut $d = 1$ mm. Le condensateur est soumis à une différence de potentiel constante, $V_0 = 2.5$ kV.

1. Déterminez la valeur champ électrique dans chacune des couches de la partie isolante. Le condensateur peut-il “claquer” ? (Champ de rupture de l'air : $E_{\text{rupt}} = 2.7$ MV/m, champ de rupture du mica : $E_{\text{rupt}} = 14$ MV/m).
2. Déterminez la capacité du condensateur.

On négligera les effets de bord.



Soit Q , $-Q$ la charge portée par les deux armatures du condensateur

- Champ électrique $\vec{E} = E(z)\hat{z}$
 - dans l'air ($d_2 < z < d$) : application du théorème de Gauss autour de **l'armature 1** (surface de Gauss = **parallépipède de base S**) :

$$S\varepsilon_0 E_1 = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}\hat{z}$$

- dans le diélectrique ($0 < z < d_2$) : application du théorème de Gauss autour de **l'armature 2** :

$$-S\varepsilon E_2 = -Q \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2 = -\frac{Q}{S\varepsilon}\hat{z}$$

- Vérification : application du théorème de Gauss autour de **l'interface entre l'air et le matériau diélectrique**

$$-S\varepsilon_0 E_1 + S\varepsilon E_2 = 0$$

pas de charge libre sur la surface de séparation des deux milieux

- Différence de potentiel V_0 :

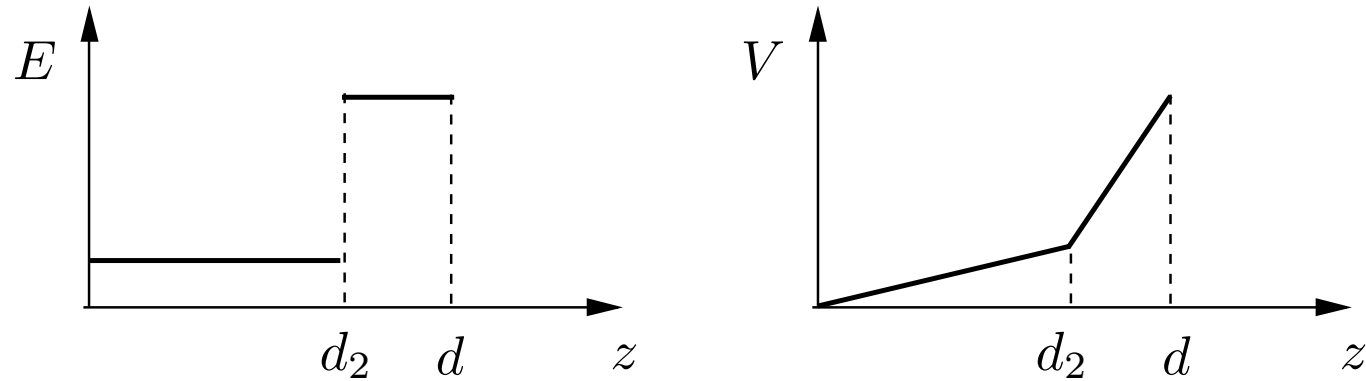
$$V_0 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{d_2} E_2 dz + \int_{d_2}^{d_1+d_2} E_1 dz = Q \left(\frac{d_2}{\epsilon S} + \frac{d_1}{\epsilon_0 S} \right)$$

- Capacité du système :

$$C = \frac{1}{\frac{d_2}{\epsilon S} + \frac{d_1}{\epsilon_0 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}}$$

- Expression de E_1 et E_2 en fonction de V_0

$$E_1 = \frac{V_0}{d} \frac{1}{1 - \frac{d_2}{d} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)} \quad E_2 = \frac{V_0}{d} \frac{1}{1 - \frac{d_1}{d} \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)}$$



- Valeurs numériques :

$$E_1 = 10\,000 \text{ kV/m} \quad E_2 = 1667 \text{ kV/m} \quad C = 3.54 \text{ pF}$$

- Claquage ?

$E_1 > E_{rupt-air} \Rightarrow$ la couche d'air "claque"

V_0 appliqué à la couche de diélectrique d_2

$$E'_2 = \frac{V_0}{d_2} = 2778 \text{ kV/m} < E_{rupt-die} \quad C' = \frac{\epsilon S}{d_2} = 5.57 \text{ pF}$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 1.5 :

- capacité unitaire d'une ligne bifilaire au-dessus d'un plan conducteur,
- application de la méthodes images,
- tenir compte de l'hypothèse $a \ll b, h$ pour placer les charges images.

2. Exercice EC. 1.6 :

- capacité unitaire d'un câble coaxial avec deux milieux : air + matériau diélectrique,
- supposez le champ électrique radial,
- recherchez la forme du potentiel V à partir de l'équation de Laplace.

3. Exercice EC. 1.7 :

- claquage d'un condensateur avec diélectrique et air,
- inspirez-vous de l'exercice 2.11.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP4

MAGNETOSTATIQUE

16 octobre 2017

1. Induction magnétique \vec{B} et champ magnétique \vec{H}

- Exercice 3.1 :
 - induction magnétique créée par une boucle de courant,
 - application de la loi de Bio-Savart.
- Exercice 3.2 :
 - induction magnétique créée par un conducteur rectiligne infiniment long,
 - hypothèse : effets de bord négligés,
 - par intégration directe de la loi de Bio-Savart,
 - par application du théorème d'Ampère.
- Exercice 3.3 :
 - induction magnétique créée par un solénoïde long,
 - hypothèse : effets de bord négligés,
 - application de la loi de Gauss,
 - application du théorème d'Ampère.
- Exercice 3.4 :
 - induction magnétique créée par un conducteur cylindrique,
 - à l'intérieur du conducteur : croît linéairement
 - à l'extérieur du conducteur : résultat équivalent à celui du conducteur rectiligne.

2. Inductances

- Exercice 3.5 :

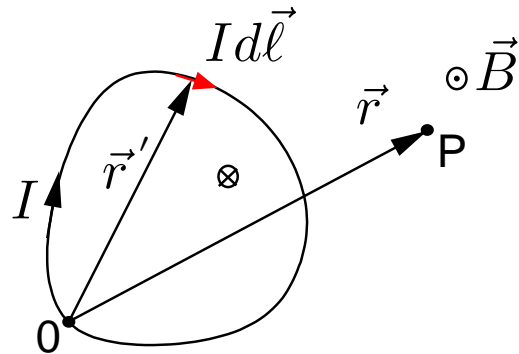
- inductance unitaire d'un câble coaxial,
- application du théorème d'Ampère pour calculer l'induction magnétique dans les diverses parties du câble,
- l'induction est nulle à l'extérieur du câble,
- l'inductance comporte 3 parties : inductance liée à l'induction dans chaque conducteur, inductance liée à l'induction entre les deux conducteurs,
- calcul de l'inductance interne de chaque conducteur à partir de l'énergie magnétique stockée,
- calcul de l'inductance liée à l'induction entre les deux conducteurs à partir du flux embrassé.

- Exercice 3.6 :

- inductance unitaire d'une ligne bifilaire,
- même approche qu'à l'exercice 3.6.

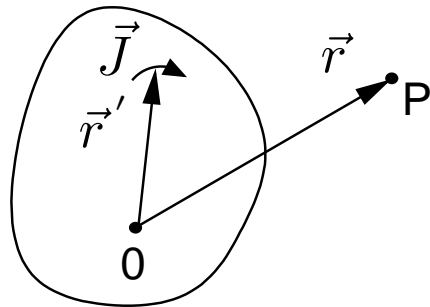
Loi de Bio-Savart

- Induction magnétique produite par un conducteur parcouru par un courant I continu (dans le vide) :



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Pour une distribution volumique de courant $\vec{J}(\vec{r})$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

- Champ magnétique dans le vide :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m : perméabilité magnétique du vide

- Champ magnétique dans un matériau :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ H/m : perméabilité magnétique du matériau

- Equations de Maxwell relatives à \vec{B} et \vec{H} , régime statique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{pas de "charge" magnétique})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (\text{théorème d'Ampère})$$

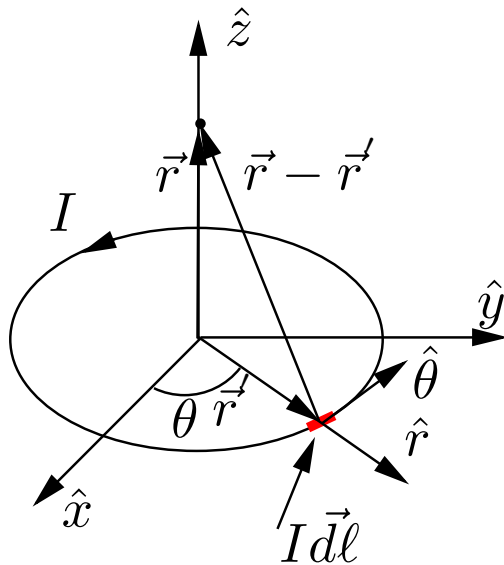
Exercice 3.1 - Champ magnétique produit par une boucle de courant

On considère une boucle de courant de rayon a parcourue par un courant continu I .

Etablissez, par intégration directe, l'expression du champ magnétique produit le long de l'axe de la boucle.

Schéma de résolution

- Coordonnées cylindriques
- Application de la loi de Bio-Savart :

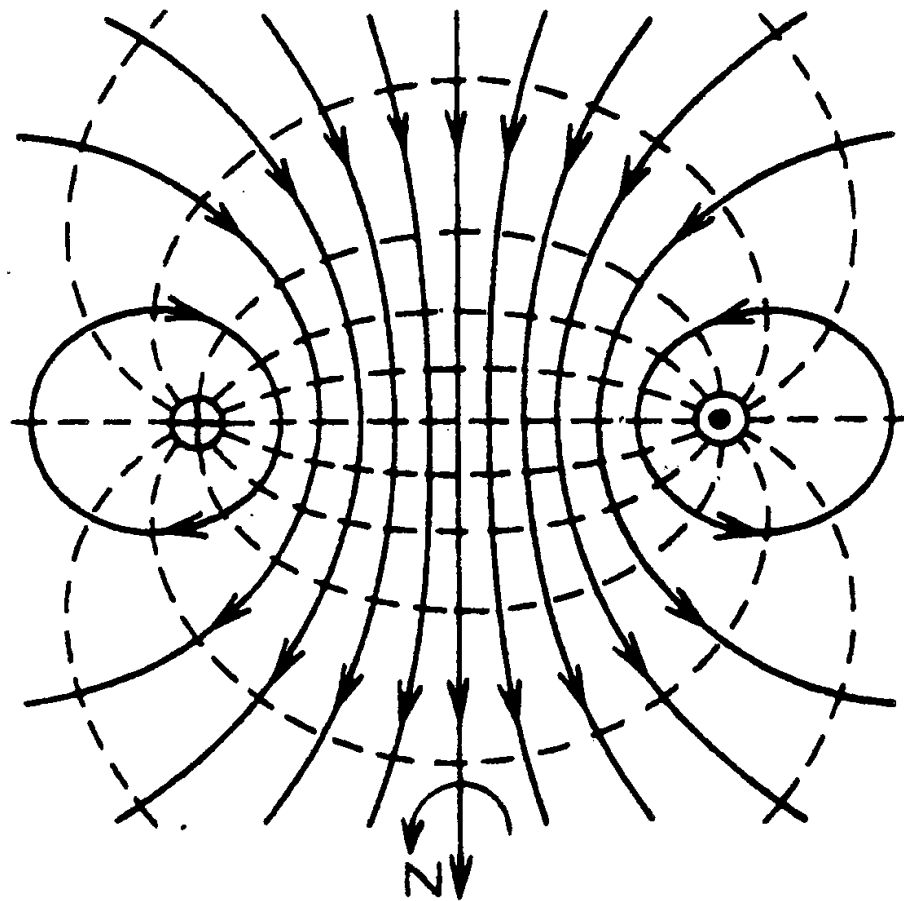


$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_C \vec{d\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = z \hat{z} \quad \vec{r}' = a \hat{r} \quad \vec{d\ell} = a d\theta \hat{\theta}$$

$$H_r = 0 \quad H_z = \frac{a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Lignes de champ magnétique



Exercice 3.2 - Conducteur rectiligne infiniment long

On considère un conducteur rectiligne infiniment long, parcouru par un courant continu I .

Etablissez l'expression du champ magnétique du système :

1. en intégrant la relation de Biot-Savart,
2. en utilisant le théorème d'Ampère.

1. Application de la loi de Bio-Savart

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_C \vec{d\ell} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

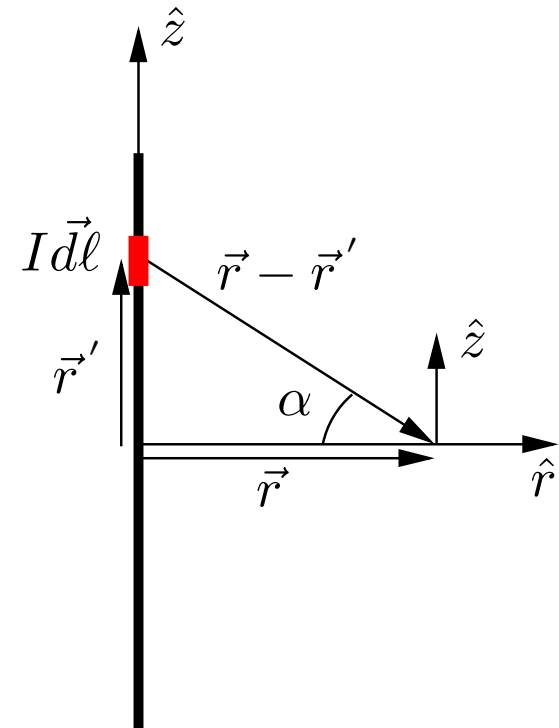
$$\vec{r} = r \hat{r} \quad \vec{r}' = z \hat{z} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$I \vec{d\ell} = I dz \hat{z}$$

$$H_\theta = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} dz = \frac{I}{2\pi r}$$

voir exercice 2.2 pour le calcul de l'intégrale.

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}.$$



Théorème d'Ampère

Application du théorème de Stokes à l'équation $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

En pratique :

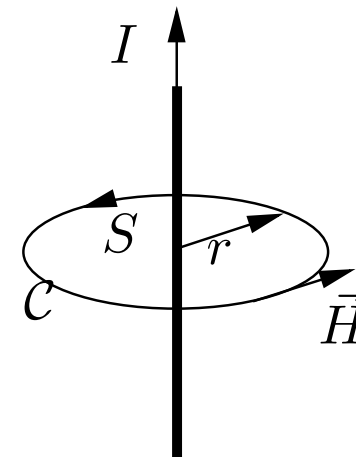
- exploiter la ou les symétries du problème,
- choisir de manière judicieuse le contour C ,
 - \vec{H} tangent ou perpendiculaire au contour,
 - \vec{H} d'amplitude constante sur le contour.

2. Application du théorème d'Ampère : contour = cercle de rayon r

- Par symétrie : $\vec{H} = H(r)\hat{\theta}$

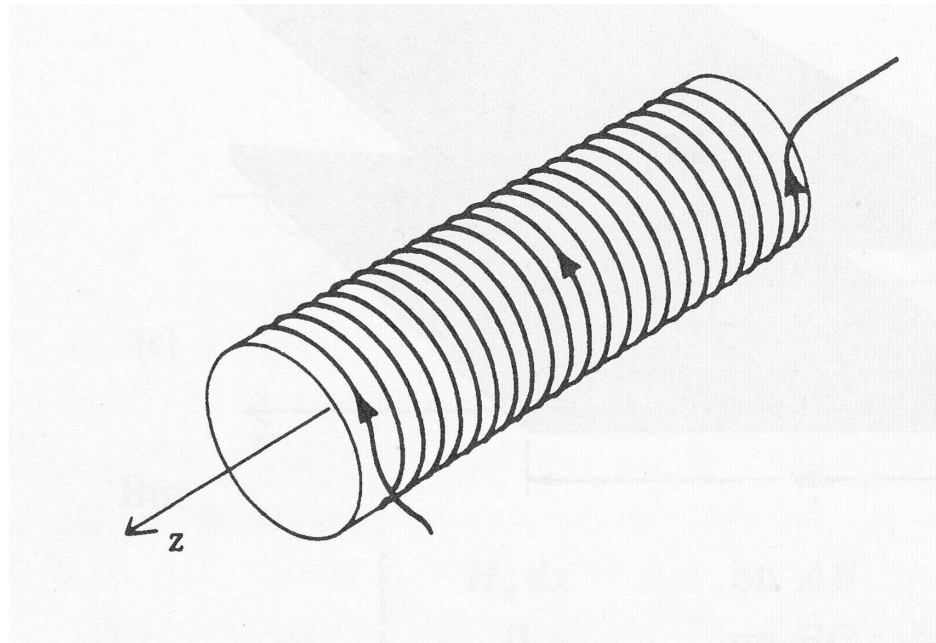
$$I = \int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r H(r)$$

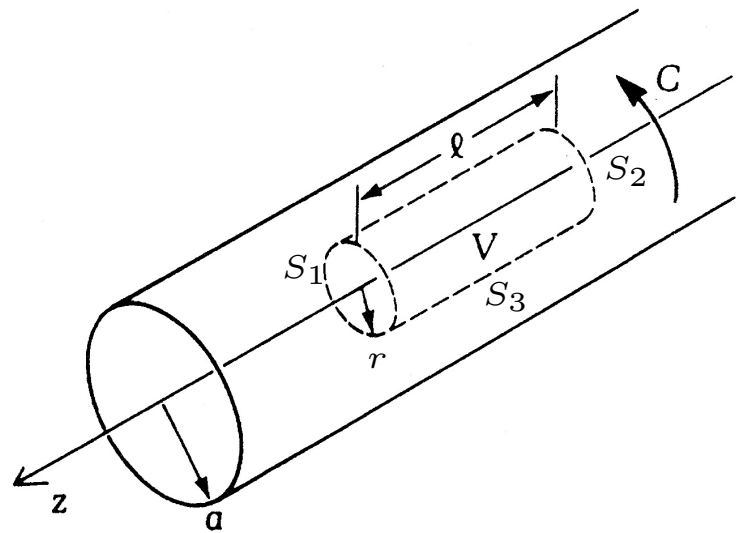
$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$



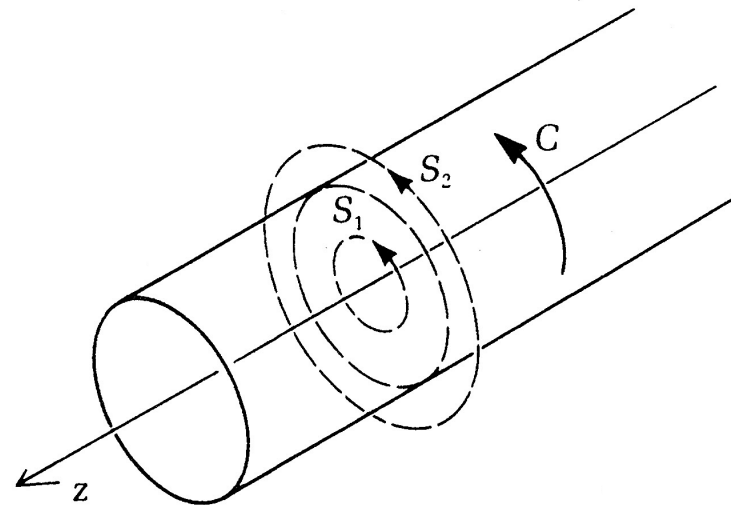
Exercice 3.3 - Champ magnétique produit par un solénoïde à air

Un solénoïde à air est constitué d'un fil conducteur enroulé en forme de cylindre de rayon a et comporte n tours de fil conducteur par mètre de longueur. La longueur ℓ du solénoïde est supposée beaucoup plus grande que son rayon a . Déterminez l'expression de l'induction magnétique créée par ce solénoïde en tout point intérieur et extérieur éloigné de ses extrémités. On exploitera judicieusement les hypothèses et symétries du problème.





(a)



(b)

- Effets de bord négligés, symétrie cylindrique : figure (a)

$$\vec{H} = H_r(r)\hat{r} + H_\theta(r)\hat{\theta} + H_z(r)\hat{z}.$$

- Montrons que $H_r = 0$: par intégration de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ sur le volume d'un cylindre concentrique

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \int_S \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{S} &= \underbrace{\int_{S_1} \mu_0 H_z dS - \int_{S_2} \mu_0 H_z dS}_{=0} + \int_{S_3} \mu_0 H_r dS \\ &= \mu_0 2\pi r H_r \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad H_r = 0 \quad \forall r \end{aligned}$$

car H_z est indépendant de z .

- Montrons que $H_\theta = 0 \forall r$: figure (b), application du théorème d'Ampère
 - pour $r < a$

$$\int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

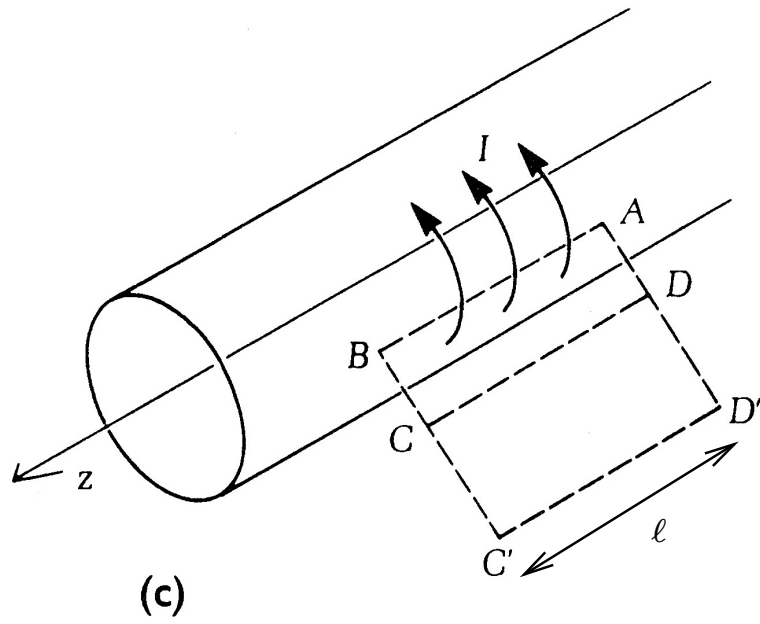
$$2\pi r H_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad H_\theta = 0$$

- pour $r > a$

$$\int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$2\pi r H_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad H_\theta = 0$$

On suppose que les lignes de courant sont parfaitement circulaires



(c)

- Détermination de H_z par application du théorème d'Ampère : figure (c)

- pour $r > a$

$$\int_{DCC'D'} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_z(r_2) \ell - H_z(r_3) \ell = 0$$
$$\Rightarrow H_z(r_2) = H_z(r_3) = Cte \quad \forall r_2, r_3 > a.$$

Or $H_z = 0$ pour $r \rightarrow \infty \Rightarrow H_z = 0 \quad \forall r > a$

- pour $r < a$

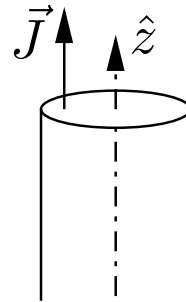
$$\int_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_z(r_1) \ell - H_z(r_2) \ell = nI \ell$$
$$H_z(r_2) = 0 \Rightarrow H_z(r_1) = nI \quad \forall r_1 < a.$$

Exercice 3.4 - Conducteur de section circulaire

On considère un conducteur de rayon a parcouru par un courant continu I réparti de manière uniforme à l'intérieur du conducteur.

Etablissez l'expression du champ magnétique

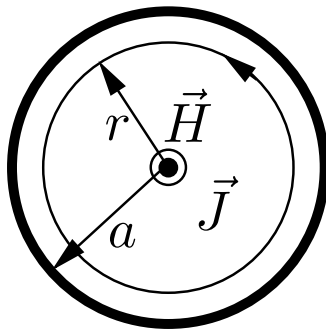
1. à l'intérieur du conducteur,
2. à l'extérieur du conducteur.



- Effets de bord négligés : $\vec{H} = H(r) \hat{\theta}$.
- Application du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r
 - à l'intérieur du conducteur $r < a$

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

densité de courant : $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$

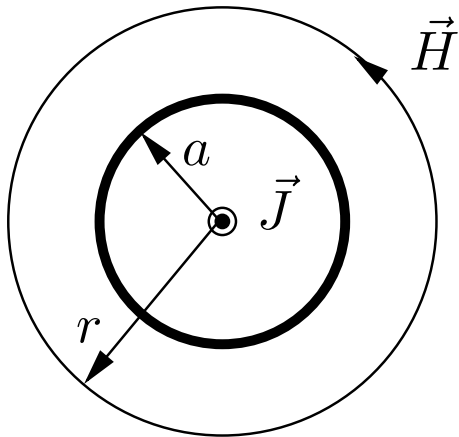


$$2\pi r H(r) = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{\theta} \quad \vec{B} = \frac{\mu_c I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{\theta}$$

- à l'extérieur du conducteur $r > a$



$$2\pi r H(r) = I$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

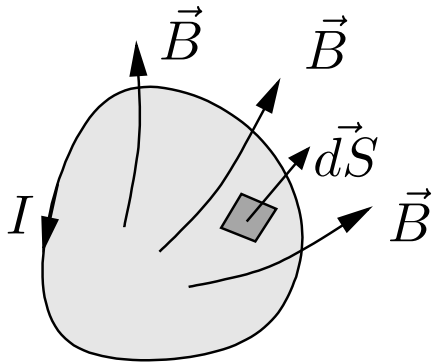
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Flux d'induction magnétique

- Flux d'induction magnétique à travers une surface S :

$$\Phi_S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

- Flux embrassé par une boucle de courant : flux d'induction magnétique à travers la surface limitée par la boucle de courant



$$\lambda = \Phi_S.$$

Pour un circuit à N spires (parcourues par un même courant I) :

$$\lambda = N \Phi_S.$$

Inductance

- Inductance du circuit : (système linéaire)

$$L = \frac{\lambda}{I}.$$

- Définition alternative de l'inductance : système capable de stocker une énergie magnétique.
- Energie magnétique stockée dans un volume V

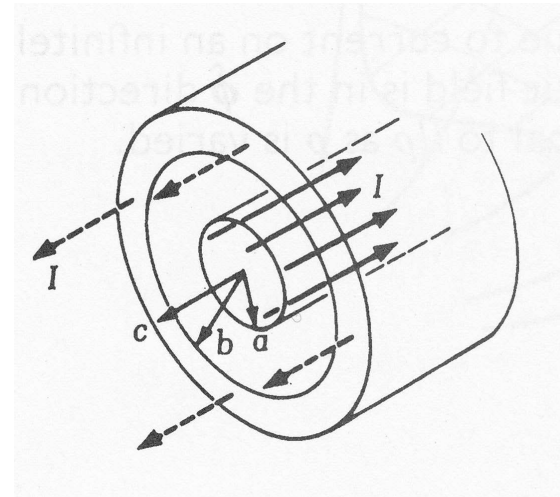
$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} LI^2,$$

$$L = \frac{2W_M}{I^2}.$$

Exercice 3.5 - Inductance d'un câble coaxial

On considère un câble coaxial de longueur infinie alimenté par un courant continu I . Ses caractéristiques géométriques sont les suivantes :

- rayon du conducteur intérieur : a
- rayon intérieur du conducteur extérieur : b
- rayon extérieur du conducteur extérieur : c
- perméabilité du milieu isolant : μ_0
- perméabilité du conducteur : μ_c



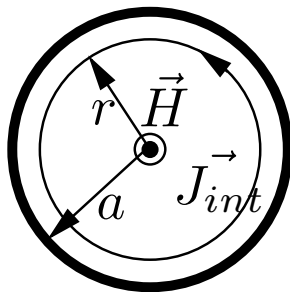
Déterminez l'expression du champ magnétique produit dans les différentes régions du câble, ainsi que son inductance unitaire.

Expression du champ magnétique par application du théorème d'Ampère :
contour = cercle de rayon r

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

densités de courant : $\vec{J}_{int} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$, $\vec{J}_{ext} = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \hat{z}$.

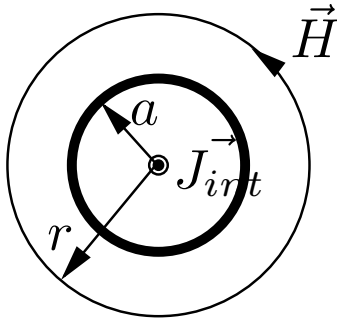
- A l'intérieur du conducteur intérieur : $r < a$



$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{\theta}, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_c I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{\theta}$$

voir exercice 3.4.

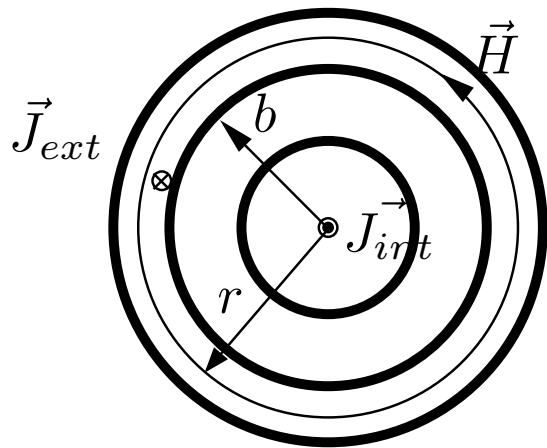
- Entre les deux conducteurs : $a < r < b$



$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

voir exercice 3.4.

- A l'intérieur du conducteur extérieur: $b < r < c$



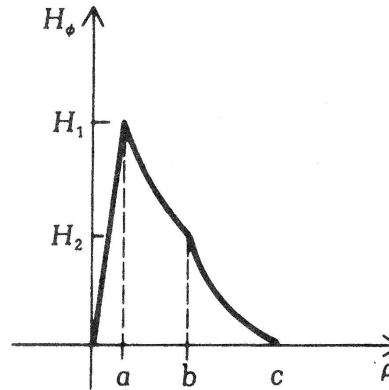
$$2\pi r H(r) = I \left(1 - \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} \right)$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \hat{\theta}, \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_c I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \hat{\theta}.$$

- A l'extérieur du conducteur extérieur : $r > c$

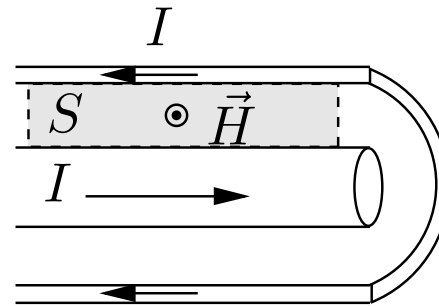
$$\vec{H} = \vec{B} = 0 \quad \text{Blindage !}$$

- Evolution de \vec{H} en fonction de r



- Inductance : composée de trois parties
 - L_{cint} : inductance liée au champ magnétique présent dans le conducteur intérieur,
 - L_{cext} : inductance liée au champ magnétique présent dans le conducteur extérieur,
 - L_i : inductance liée au champ magnétique présent dans l'espace compris entre les deux conducteurs.

- Détermination de L_i : recherche du flux total embrassé par la spire de courant (pour 1 m de longueur)



$$\Phi = \int_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L_i = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H/m.}$$

- Détermination de L_{cint} : recherche de l'énergie magnétique emmagasinée dans 1 m de conducteur

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 dV = \frac{\mu_c I^2}{16\pi}$$

$$L_{cint} = \frac{2W_M}{I^2} = \frac{\mu_c}{8\pi} \text{ H/m.}$$

- Détermination de L_{cext} : recherche de l'énergie magnétique emmagasinée dans 1 m de conducteur

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_3 \cdot \vec{H}_3 dV = \frac{\mu_c I^2}{4\pi} \left(\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{b}{c} - \frac{\frac{1}{4}b^2 - \frac{3}{4}c^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$L_{cext} = \frac{\mu_c}{2\pi} \left(\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{b}{c} + \frac{\frac{1}{4}b^2 - \frac{3}{4}c^2}{c^2 - b^2} \right) \text{ H/m.}$$

Exercice 3.6 - Inductance d'une ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire, c'est-à-dire une ligne constituée de deux conducteurs cylindriques de rayon a séparés de d et parcourus par des courants continus égaux et opposés.

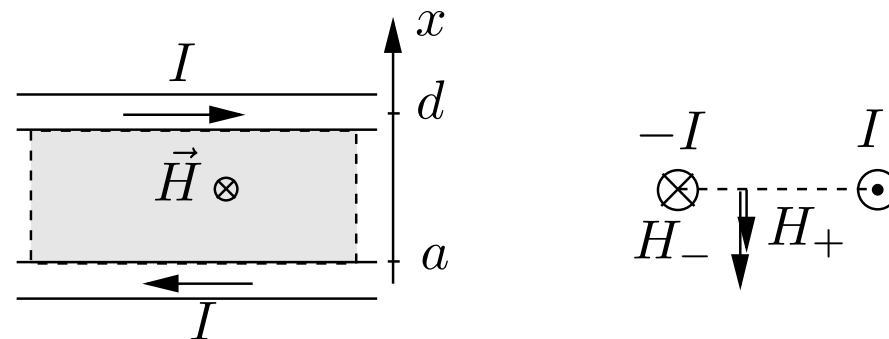
Déterminez l'inductance unitaire de la ligne. On supposera $a \ll d$.

Schéma de résolution

- $L = L_i + L_{c1} + L_{c2}$
- $L_{c1} = L_{c2} = \frac{\mu_c}{8\pi}$

- L_i déterminé à partir du calcul du flux total embrassé par la boucle de courant (1m de longueur).
- \vec{H} est supposé nul en dehors de l'espace séparant les deux conducteurs.
- Dans l'espace entre les deux conducteurs :

$$H(x) = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)}$$



$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$L_i = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \simeq \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \text{ H/m.}$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 2.1 :

- calcul de induction magnétique créée par un fil conducteur en coin à partir de la loi de Bio-Savart,
- calcul de induction magnétique créée par un ruban conducteur en coin d'épaisseur w ,
- décomposez le ruban en fils conducteurs élémentaires, utilisez la superposition et le résultat du point 1.

2. Exercice EC. 2.2 :

- calcul de l'induction magnétique en un point de l'axe d'un solénoïde de longueur finie,
- utilisez le résultat obtenu à l'exercice 3.1 pour la détermination de l'induction créée par une boucle de courant et appliquez la superposition.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP5

CHAMPS VARIABLES - REGIME QUASI-STATIQUE

23 octobre 2017

1. Courant de conduction et courant de déplacement

- Exercice 4.1 :
 - conductance d'un condensateur en régime statique, liée à l'existence d'un courant de conduction,
 - démarche analogue à celle utilisée pour la détermination de la capacité,
 - relation entre G et C .
- Exercice 4.2 :
 - expression du courant de déplacement en régime harmonique dans un condensateur cylindrique,
 - relation avec la règle de la théorie des circuits en régime quasi-statique.
- Exercice 4.3 :
 - blindage électrique, principe de la cage de Faraday,
 - importance de la mise à la masse.
- Exercice 4.4 :
 - phénomènes dissipatifs dans un condensateur : pertes par effet Joule, pertes liées à la polarisation du diélectrique,
 - notion de permittivité effective,
 - admittance équivalente d'un condensateur.

2. Couplage magnétique, pertes dans des bobines

- Exercice 2.5 :
 - force électromotrice parasite induite dans une ligne bifilaire,
 - lignes d'induction magnétiques créées par une ligne bifilaire,
 - influence sur une autre ligne placée à proximité, phénomène de diaphonie entre deux paires de lignes.
- Exercice 2.6 :
 - phénomènes dissipatifs dans une bobine,
 - comparaison des pertes liées aux courants de Foucault et des pertes par hystérésis.

Equations de Maxwell en régime variable

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

f.e.m induite

courant de conduction

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E} \quad I_C = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= -\frac{d\phi}{dt}$$

courant de déplacement

$$= \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad I_D = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Régime harmonique : recours aux phaseurs

$$\vec{\nabla} \times \hat{\vec{E}} = -j\omega \hat{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla} \times \hat{\vec{H}} = \hat{\vec{J}} + j\omega \hat{\vec{D}}$$

Hypothèse des circuits localisés

Régime quasi-statique : la répartition des champs est identique à celle observée en régime statique.

Pas d'accumulation de charges aux noeuds électriques ni dans les éléments. Champs variables confinés à l'intérieur des éléments.

Conductance (résistance) : liée au courant de conduction

$$\hat{\vec{J}}_C = \sigma \hat{\vec{E}} \qquad \hat{I}_C = G\hat{V}$$

Capacité : liée au courant de déplacement

$$\hat{\vec{J}}_D = j\omega\varepsilon \hat{\vec{E}} \qquad \hat{I}_D = j\omega C\hat{V}$$

Inductance : liée à la f.e.m induite

$$\hat{\mathcal{E}} = -j\omega L\hat{I}$$

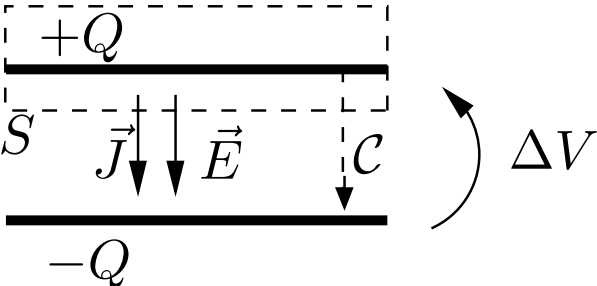
Conductance d'un condensateur

Liée au courant de conduction

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

σ est la conductivité du matériau diélectrique qui sépare les deux conducteurs.

Par définition, en régime statique, pour une différence de potentiel ΔV et un courant total I constant traversant le matériau diélectrique :



$$I = G_c \Delta V \quad \Rightarrow \quad G_c = \frac{I}{\Delta V} = \frac{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$$

S = surface fermée qui entoure un des conducteurs
 C = chemin qui joint les deux conducteurs

On observe

$$\frac{G_c}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

avec C la capacité du condensateur

Pertes associées à G_c = pertes Joule

Méthode de calcul : similaire à celle d'une capacité

1. Imposer la d.d.p ΔV entre les deux conducteurs
 - rechercher l'expression du potentiel V et du champ électrique dans l'espace entre les deux conducteurs (équation de Laplace)
 - en déduire le courant I traversant le condensateur

2. Imposer le courant I
 - rechercher l'expression du champ électrique dans l'espace entre les deux conducteurs
 - en déduire la d.d.p. ΔV entre les deux conducteurs.

Exercice 4.1 - Réacteur chimique à électrodes sphériques

Un réacteur chimique est constitué de deux électrodes sphériques concentriques de rayons respectifs $a = 1$ cm et $b = 3$ cm. Le réacteur est rempli d'un liquide de permittivité relative $\varepsilon_r = 78$ et de conductivité $\sigma = 3$ S/m. En régime, le réacteur est parcouru par un courant continu.

Déterminez la résistance électrique et la capacité de ce réacteur.

- Coordonnées sphériques
- Recherche du potentiel V dans l'espace entre les deux conducteurs : $V = V(r)$
- Problème :

Résoudre $\nabla^2 V = 0$ dans le domaine $a \leq r \leq b$

avec les conditions limites $\begin{cases} V = V_0 & \text{pour } r = a \\ V = 0 & \text{pour } r = b \end{cases}$

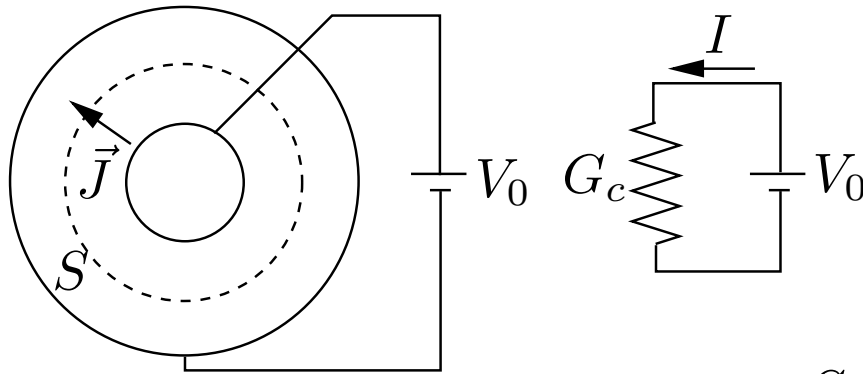
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow V = -\frac{A}{r} + B$$

$$\text{C.L} \Rightarrow V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

- Champ électrique \vec{E}

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

- Courant total I



$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{1}{r^2} \hat{r} = J(r) \hat{r}$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} 4\pi$$

S = surface d'une sphère de rayon r

- Conductance G_c et résistance :

$$G_c = \frac{I}{V_0} = \frac{4\pi\sigma}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \Rightarrow R_c = \frac{1}{G_c} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 1.8 \Omega$$

- Capacité C :

$$C = G_c \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 128 \text{ pF}$$

Exercice 4.2 - Condensateur cylindrique et courant de déplacement

Un condensateur cylindrique, constitué de deux cylindres de rayon a et b , de longueur ℓ et rempli d'un matériau diélectrique de permittivité relative ϵ_r , est alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude de crête V_0 .

1. Déterminez l'expression du courant de déplacement à travers toute surface cylindrique de rayon $a < r < b$.
2. Montrez que le résultat est indépendant du choix du rayon r .
3. Montrez que ce courant est égal au courant de conduction existant dans le fil conducteur alimentant le condensateur.

On suppose être en régime de fonctionnement quasi-statique.

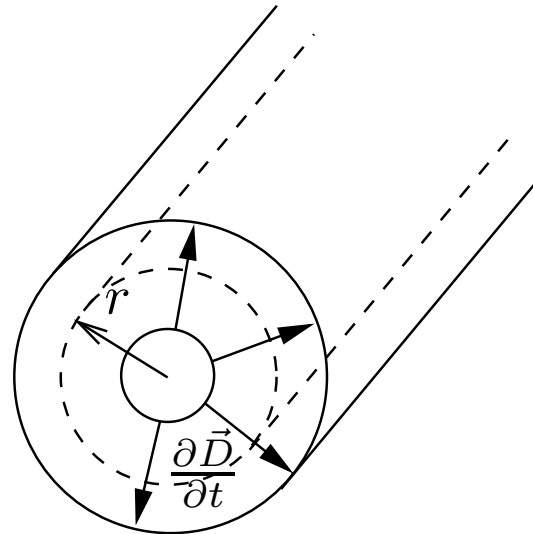
Soit $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Régime quasi-statique \Rightarrow la forme du champ électrique est identique à celle des champs statiques (voir exercice 2.4) :

$$\vec{E} = \frac{v(t)}{\ln b/a} \frac{1}{r} \hat{r} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{\varepsilon v(t)}{\ln b/a} \frac{1}{r} \hat{r}$$

1. Courant de déplacement total : intégration sur une surface cylindrique de rayon r :

$$I_D = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$



2. En termes des phaseurs :

$$v(t) \leftrightarrow \hat{V} = V_0 e^{j\varphi}$$

$$\vec{D} \leftrightarrow \hat{\vec{D}} = \frac{\varepsilon \hat{V}}{\ln b/a} \frac{1}{r} \hat{r}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \hat{\vec{D}}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \hat{I}_D &= \int_S j\omega \hat{\vec{D}} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{j\omega 2\pi \ell \varepsilon}{\ln b/a} \hat{V} \\ &= j\omega C \hat{V} \end{aligned}$$

= courant de charge du condensateur selon la théorie des circuits

L'amplitude du courant de déplacement $I_D = \omega C V_0$ est indépendante de r !!

3. Courant de conduction I_C dans le fil \Rightarrow champ magnétique \vec{H} avec

$$\int_{\mathcal{C}} \hat{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\hat{J}_C + \hat{J}_D) \cdot d\vec{S}$$

avec S , surface limitée par le contour \mathcal{C} .

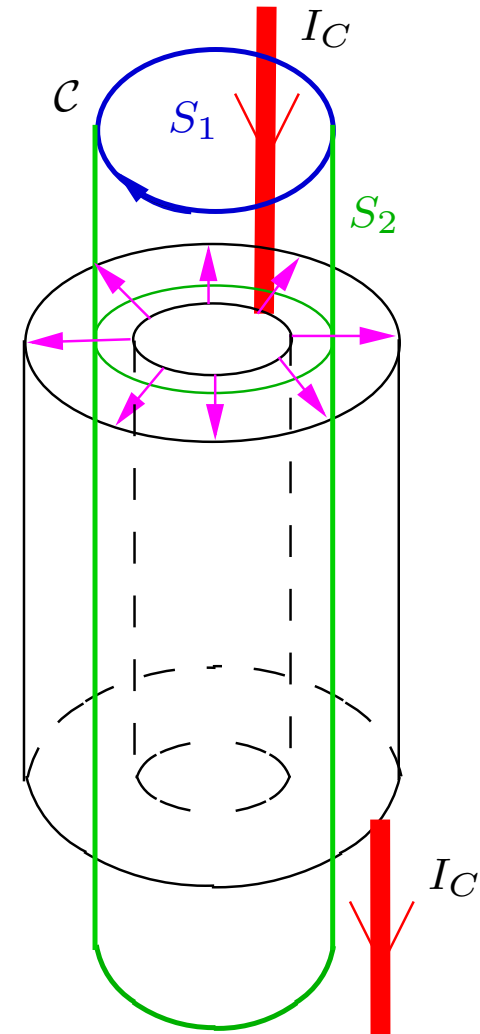
a) Si $S = S_1$:

$$\hat{J}_D = 0 \quad \text{et} \quad \int_C \hat{H} \cdot d\vec{\ell} = \hat{I}_C$$

b) Si $S = S_2$

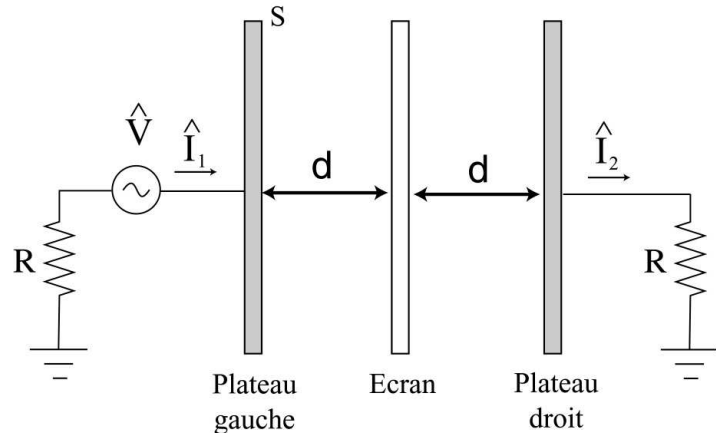
- surface latérale : $\hat{J}_C = 0$, $\hat{J}_D \neq 0$ à l'intérieur du condensateur
- base : $\hat{J}_C = 0$, $\hat{J}_D = 0$

$$\int_C \hat{H} \cdot d\vec{\ell} = \hat{I}_D$$



Exercice 4.3 - Blindage électrique - Cage de Faraday

Un écran métallique est placé entre les deux plateaux d'un condensateur à air.



Le système est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale (amplitude de tension V_0 , fréquence f). Au moment du montage et avant la mise en service du générateur, l'écran est non-chargé. La surface des plateaux est égale à S .

Déterminez

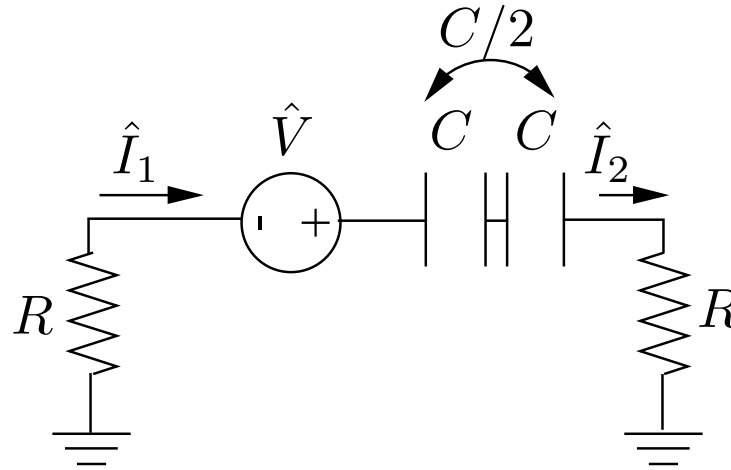
- les courants \hat{I}_1 et \hat{I}_2 ,
- l'allure des lignes de champ électrique,
- la distribution des charges sur l'écran,

dans chacun des deux cas suivants :

- l'écran est à un potentiel flottant (il est isolé galvaniquement des autres éléments du système),
- l'écran est relié à la masse.

1. Ecran à un potentiel flottant

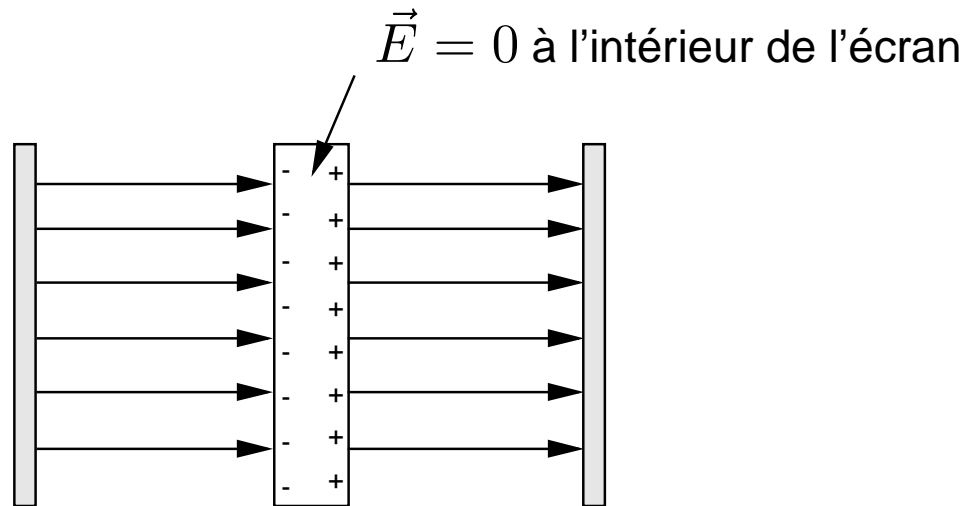
- Circuit électrique équivalent



L'écran forme avec les deux plaques deux condensateurs de capacité $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ connectés en série.

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{V_0}{2R + \frac{2}{j\omega C}}$$

- Lignes de champ

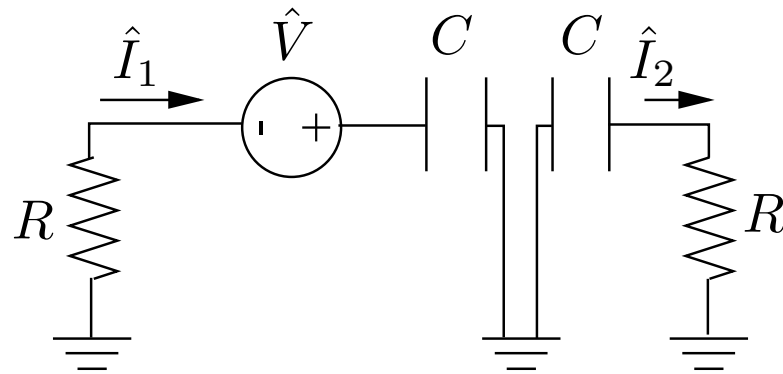


La charge totale sur l'écran reste nulle.

Conclusion : l'écran n'empêche pas l'électrisation du plateau droit du condensateur par le plateau gauche.

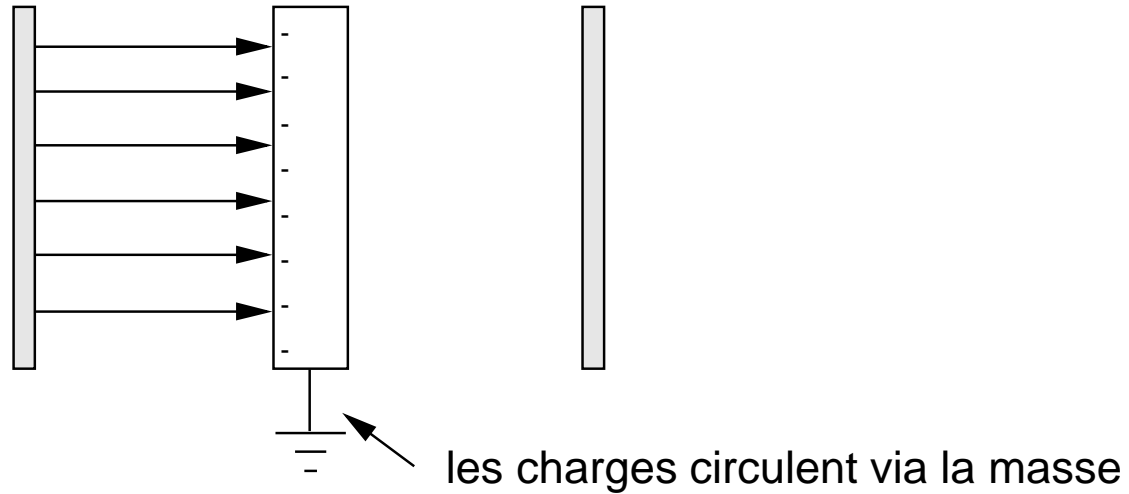
2. Ecran relié à la masse

- Circuit électrique équivalent



$$\hat{I}_2 = 0 \quad \hat{I}_1 = \frac{V_0}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

- Lignes de champ



Conclusion : l'écran remplit son rôle de blindage, l'état électrique du plateau droit ne dépend plus de celui du plateau gauche.

Champs variables - Condensateur- Pertes totales

- Pour des champs variables : apparition de pertes liées à la polarisation du diélectrique : pertes dues à la “friction” entre les dipôles induits par la polarisation.

Ces pertes sont modélisées

- à l'échelle microscopique par l'ajout d'une partie imaginaire à la permittivité :

$$\varepsilon = \varepsilon' - j \varepsilon''$$

- à l'échelle macroscopique par une conductance G_{pol}
- Prise en compte à la fois des pertes par effet Joule et de polarisation :
 - permittivité effective :

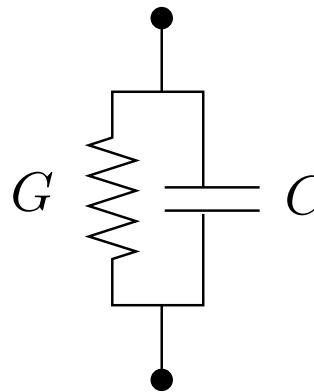
$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right) = \varepsilon' - j\varepsilon''_{tot}$$

- conductance totale équivalente :

$$G = G_c + G_{pol}$$

Admittance équivalente d'un condensateur

Exemple : condensateur plan



$$\begin{aligned}
 Y &= j\omega \frac{\tilde{\epsilon}S}{d} = \frac{\sigma S}{d} + \frac{\omega \epsilon'' S}{d} + j\omega \frac{\epsilon' S}{d} = \frac{\omega \epsilon''_{tot} S}{d} + j\omega \frac{\epsilon' S}{d} \\
 &= G_c + G_{pol} + j\omega C = G + j\omega C
 \end{aligned}$$

Pour une géométrie différente : $f(d)$ facteur dépendant de la géométrie des conducteurs
 (C plan : $f(d) = \frac{S}{d}$)

$$\begin{aligned}
 Y &= j\omega \tilde{\epsilon} f(d) = \sigma f(d) + \omega \epsilon'' f(d) + j\omega \epsilon' f(d) = \omega \epsilon''_{tot} f(d) + j\omega \epsilon' f(d) \\
 &= G_c + G_{pol} + j\omega C = G + j\omega C
 \end{aligned}$$

Exercice 4.4 - Condensateur avec pertes

Déterminez la conductance d'un condensateur plan au mica aux fréquences $f_1 = 50$ Hz et $f_2 = 1$ GHz. Les caractéristiques du condensateur sont les suivantes :

Surface des plateaux : $S = 10 \text{ cm}^2$

Séparation des plateaux : $d = 0.1 \text{ cm}$

Conductivité du mica : $\sigma = 10^{-15} \text{ S/m}$

Propriétés diélectriques à $f = 50$ Hz : $\varepsilon' = 6 \varepsilon_0$ et pertes diélectriques négligeables

Propriétés diélectriques à $f = 1$ GHz : $\varepsilon' = 6 \varepsilon_0$ et $\varepsilon''_{tot} = 1.6 \cdot 10^{-3} \varepsilon_0$.

1. à 50 Hz

$$G = G_c = \frac{\sigma S}{d} = 10^{-15} \text{ S} \quad , \quad G_{pol} \text{ négligeable}$$

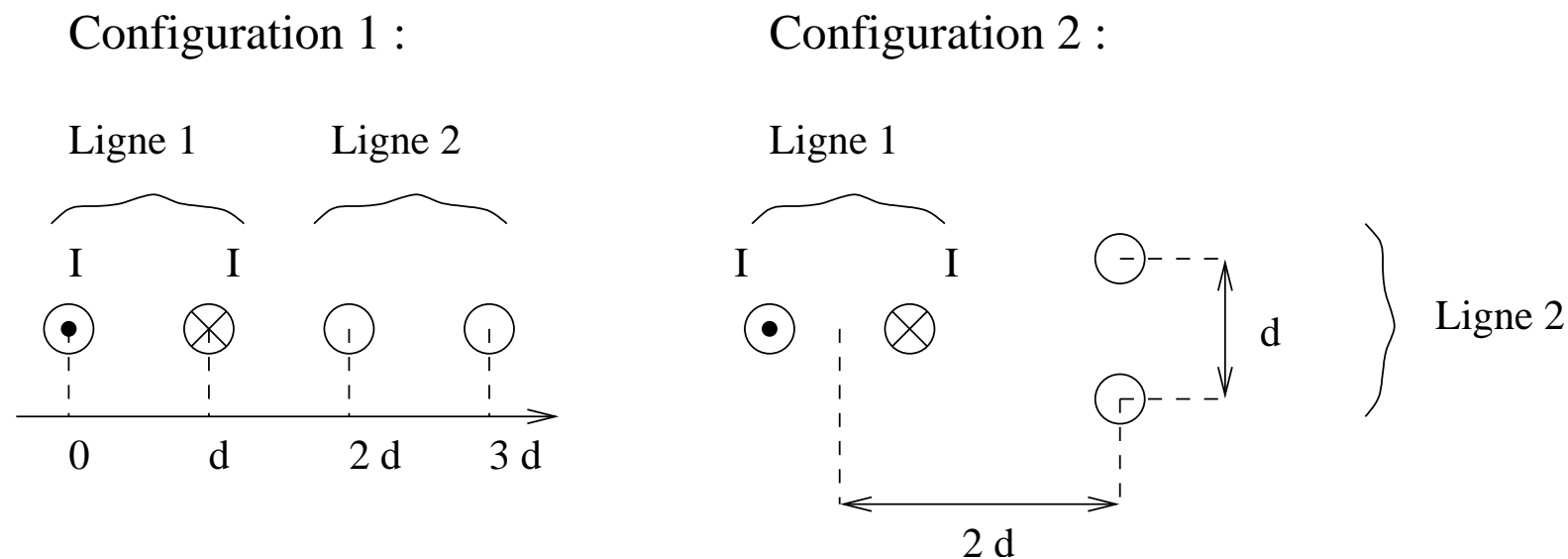
2. à 1 GHz

$$G = G_c + G_{pol} = \omega \left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right) \frac{S}{d} = \omega \varepsilon''_{tot} \frac{S}{d} = 89 \cdot 10^{-6} \text{ S}$$

On remarque qu'en hautes fréquences, G_c représente une partie négligeable de la conductance totale.

Exercice 4.5 - Force électromotrice parasite induite par une ligne bifilaire

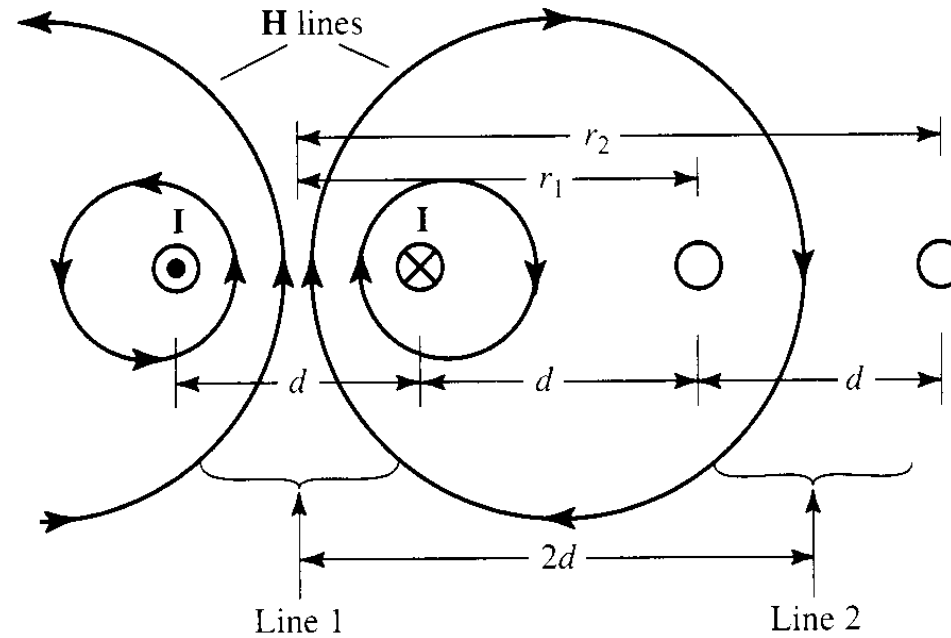
Deux lignes de transmission bifilaires (conducteurs de rayon a séparés d'une distance $d \gg a$) sont placées dans les configurations illustrées ci-dessous :



Dans le cas où la ligne 1 est seule alimentée et parcourue par un courant alternatif d'amplitude maximale $I = 5 \text{ A}$ et de fréquence $f = 6 \text{ kHz}$:

1. Tracez les lignes de l'induction magnétique générée par la ligne 1.
2. Pour la configuration 1, calculez l'amplitude de la force électromotrice induite par la ligne 1 sur une unité de longueur de la ligne 2.
3. Pour la configuration 2, déterminez par un argument de symétrie si la force électromotrice induite dans la ligne 2 est supérieure, égale, ou inférieure au résultat du point 2.

1. Lignes de champs



$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_-$$

$$\vec{B}_+ = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r_+} \vec{\theta}_+ \quad \vec{B}_- = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r_-} \vec{\theta}_-$$

Forme des lignes de champ = forme des équipotentiels de deux conducteurs cylindriques uniformément chargés (voir exercice 2.5)

2. F.e.m induite

- Amplitude de l'induction magnétique en un point du plan situé entre les deux conducteurs de la ligne 2 ($2d + a < x < 3d - a$)

$$B(x) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - d} \right)$$

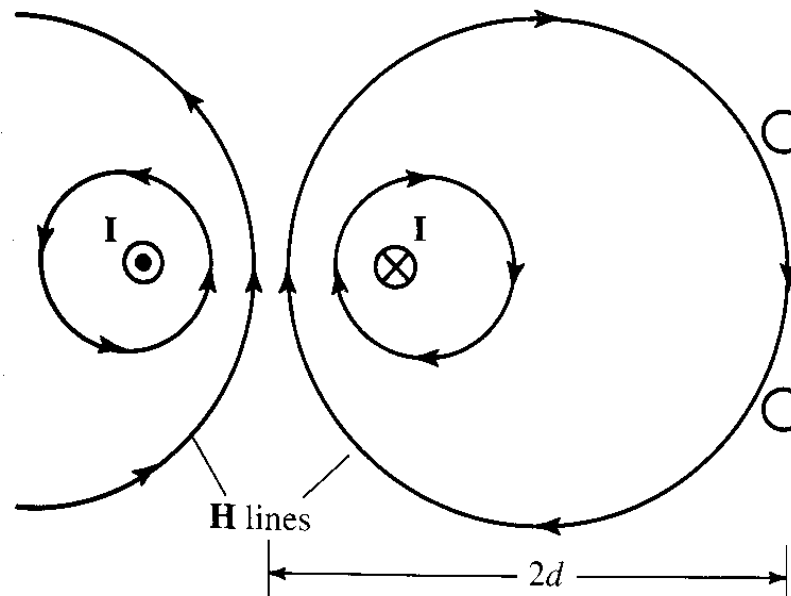
- Flux d'induction magnétique à travers la surface séparant les deux conducteurs ($a \ll d$):

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

- Amplitude de la F.e.m induite :

$$\left| \hat{V} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \mu_0 I f \ln \frac{4}{3} = 11 \text{ mV/m}$$

- Configuration 2



Les lignes de champ entrent et sortent de façon symétrique et génèrent un flux nul

$$\left| \hat{V} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 0$$

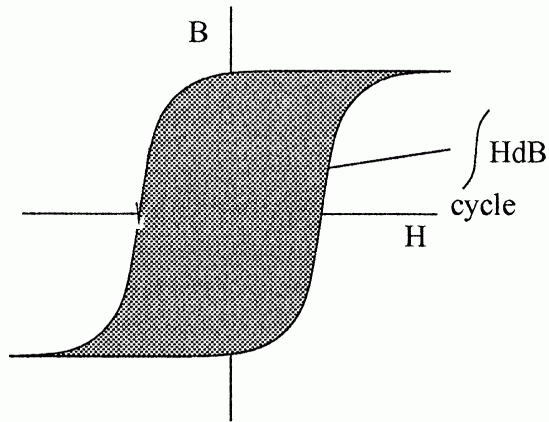
Exercice 4.6 - Pertes d'un bobinage : variation en fonction de la fréquence

On considère un bobinage à noyau ferromagnétique. Comment varient les pertes suivantes en fonction de la fréquence ?

1. Les pertes par hystérésis.
2. Les pertes dues aux courants de Foucault.

Dans chaque cas, on exprimera la puissance dissipée P sous la forme $P \propto f^n$, où n est la puissance algébrique correspondante.

1. Pertes par hystérésis



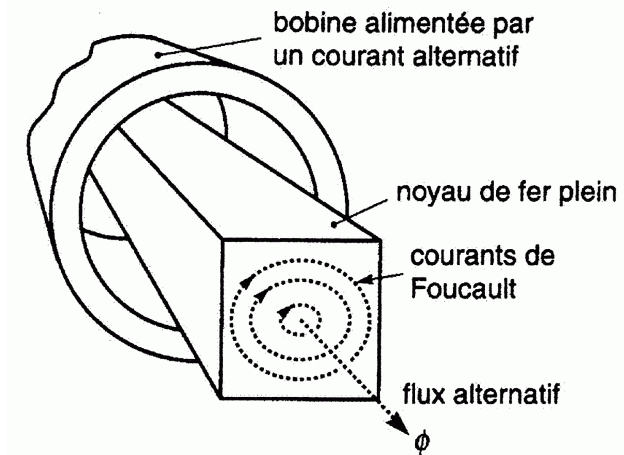
Energie dissipée par cycle dans le matériau

$$\oint_{cycle} H \cdot dB$$

Pour 1 s : f cycles

$$P_{hyst} \propto f$$

2. Pertes dues aux courants de Foucault



F.e.m créée par la variation du flux : $V = \frac{d\Phi}{dt} \propto f$

Pertes données par $RI^2 = \frac{V^2}{R}$ avec R la résistance du matériau

$$P_{Foucault} \propto f^2$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 3.1 :

- calcul de la force électromotrice induite par un courant parcourant un conducteur rectiligne dans une boucle rectangulaire,
- recherchez le flux d'induction magnétique traversant la boucle,
- utilisez les phaseurs.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP6

ONDES

1. Ondes planes se propageant dans un milieu non dissipatif.
 - Exercice 5.1 :
 - estimation de la puissance moyenne totale émise par le soleil à partir de la mesure de la densité de puissance moyenne à la surface de Mercure,
 - illustration des propriétés d'une onde plane dans le vide.
2. Réflexion et absorption d'une onde plane par un milieu dissipatif.
 - Exercice 5.2 :
 - illustration des caractéristiques des ondes réfléchies et transmises dans un bloc de matériau conducteur,
 - expression des coefficients de réflexion et de transmission,
 - évaluation des densités de puissance moyenne réfléchies et transmises dans le bloc de matériau conducteur.
 - Exercice 5.3 :
 - évaluation de la puissance moyenne dissipée dans un bloc de matériau conducteur via l'application du théorème de Poynting,
 - confrontation du résultat avec celui obtenu au cours théorique à partir du calcul de la puissance moyenne dissipée par effet Joule,
 - établissement d'une relation entre l'intensité du champ magnétique à la surface du bloc et l'intensité du courant traversant le bloc.

Ondes planes, milieu linéaire, homogène et isotrope non dissipatif

- Equations d'ondes : milieu dépourvu de sources (ρ et \vec{J})

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

- Solution générale : onde plane progressive, polarisation transverse, régime harmonique

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x} = E_0 \cos(k(z - vt)) \hat{x} \\ \vec{H}(z, t) &= E_0 \frac{k}{\omega\mu} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \end{aligned} \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

- Caractéristiques de la propagation

- nombre d'onde : $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$, vitesse de propagation : $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- impédance caractéristique du milieu de propagation

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

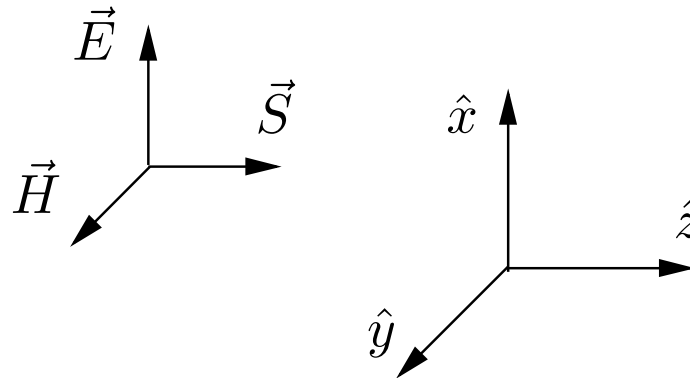
- Dans le vide :

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

- Densité de puissance transportée : vecteur de Poynting :

$$\vec{S}(z, t) = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z} \quad (\text{W/m}^2)$$

Transport de puissance selon \hat{z}



- Dans le domaine fréquentiel : emploi des phaseurs

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}\{E_0 e^{j(\omega t - kz)} \hat{x}\} = \text{Re}\{\hat{\vec{E}}(z) e^{j\omega t}\} \quad \text{avec} \quad \hat{\vec{E}}(z) = E_0 e^{-jkz} \hat{x}$$

- équations d'ondes :

$$\nabla^2 \hat{\vec{E}} + \omega^2 \mu \epsilon \hat{\vec{E}} = 0 \quad \nabla^2 \hat{\vec{H}} + \omega^2 \mu \epsilon \hat{\vec{H}} = 0$$

- champs

$$\hat{\vec{E}}(z) = E_0 e^{-jkz} \hat{x} \quad \hat{\vec{H}}(z) = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{y}$$

- densité de puissance moyenne transportée

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_T \vec{S}(z, t) dt = \frac{1}{2} \text{Re}\{\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{H}}^*\} = \frac{E_0^2}{2\eta} \hat{z}$$

Exercice 5.1 - Puissance solaire reçue par Mercure

La puissance du rayonnement solaire frappant la surface de Mercure vaut approximativement $S = 0.87 \text{ W/cm}^2$.

1. En supposant que les ondes électromagnétiques sont émises par le soleil de façon isotrope, estimez la puissance totale rayonnée par le soleil.
2. En assimilant le rayonnement à la surface de mercure à une onde plane, estimez la valeur efficace du champ électrique produit par ce rayonnement.

Donnée : distance Mercure - Soleil, $d = 60 \text{ Gm}$.

- Densité de puissance moyenne du rayonnement émis à une distance $d = 60 \cdot 10^9 \text{ m}$ = amplitude du vecteur de Poynting $|\langle \vec{S} \rangle|$
- Puissance moyenne totale émise :

$$P = \int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = 4\pi d^2 |\langle \vec{S} \rangle| = 3.94 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

S = surface d'une sphère de rayon d centrée sur le soleil.

La puissance totale émise est la même quelle que soit la distance d considérée : milieu non dissipatif.

- Ondes planes à la surface de Mercure : intensité du vecteur de Poynting :

$$|\langle \vec{S} \rangle| = \frac{E_0^2}{2\eta_0} = 0.87 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 1.8 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Ondes planes dans un milieu dissipatif

- Prise en compte des phénomènes dissipatifs.
- Permittivité ε remplacée par la permittivité effective

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\left(\varepsilon''_{pol} + \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

- Nombre d'onde : $jk = j\omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}} = \alpha + j\beta$
- Impédance intrinsèque du milieu:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} = r + jx = |\eta| e^{j\phi_\eta}$$

- Champs :

$$\hat{\vec{E}} = E_0 e^{-jkz} \hat{x} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x}$$

$$\hat{\vec{H}} = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{y} = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\phi_\eta} \hat{y}$$

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \phi_\eta) \hat{y}$$

- Coefficient d'atténuation α , vitesse de phase $v = \omega/\beta$

Milieux bons conducteurs : effet de peau

- Hypothèses : $\varepsilon'' \simeq 0$, $\sigma \gg \omega\varepsilon$

- Nombre d'onde :

$$jk \simeq (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j) \frac{1}{\delta}$$

- $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$: épaisseur de peau

- Coefficient d'atténuation $\alpha = 1/\delta \propto \sqrt{f}$: dispersion !

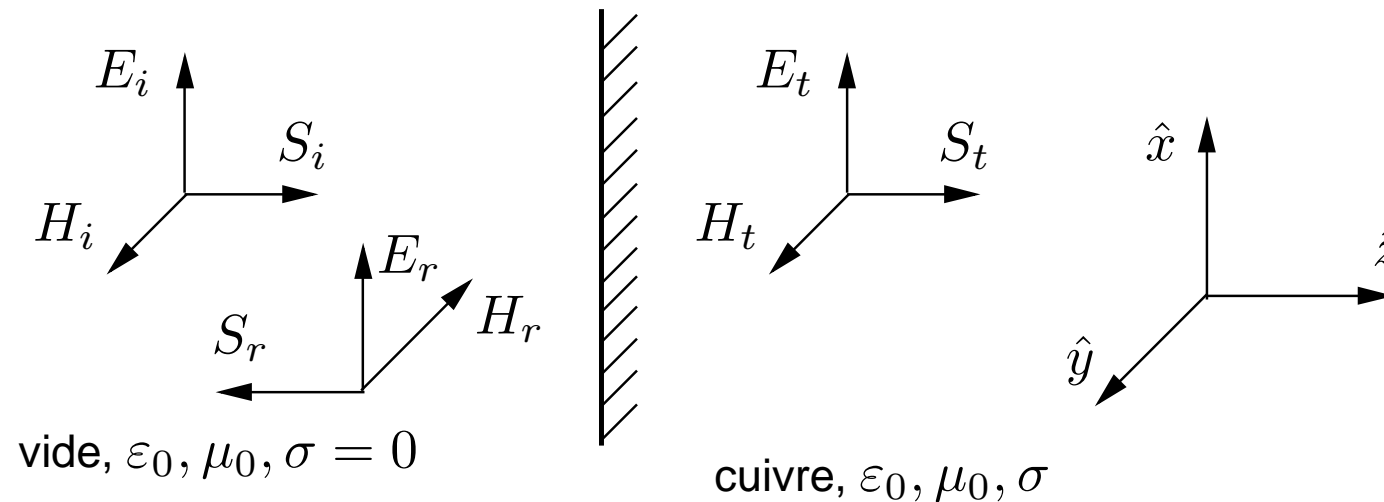
- Vitesse de phase : $v = \omega\delta \propto \sqrt{f}$

- Impédance :

$$\eta = Z_s \simeq \frac{1 + j}{\sigma\delta} = R_s + j\omega L_s$$

Exercice 5.2 Absorption d'une onde plane par une plaque de cuivre

Une onde plane de fréquence $f = 1$ GHz se propage dans l'air et frappe une plaque de cuivre, à incidence normale.



Sachant que la valeur de crête du champ électrique de l'onde incidente vaut $E_0 = 1$ V/m et que la conductivité électrique du cuivre vaut $\sigma = 58 \cdot 10^6$ S/m, déterminez la valeur moyenne de la puissance absorbée par unité de surface par le cuivre.

Réflexion et transmission d'une onde plane à incidence normale sur un plan conducteur

3 ondes planes à incidence normale sur la paroi du conducteur :

- Onde incidente : se propage selon $+z$

$$\hat{\vec{E}}_i = E_0 e^{-jk_i z} \hat{x} \quad \hat{\vec{H}}_i = \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jk_i z} \hat{y}$$

Nombre d'onde : $jk_i = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ Impédance : $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega$

- Onde réfléchie : se propage selon $-z$

$$\hat{\vec{E}}_r = \rho E_0 e^{jk_r z} \hat{x} \quad \hat{\vec{H}}_r = -\rho \frac{E_0}{\eta_0} e^{jk_r z} \hat{y}$$

Nombre d'onde : $jk_r = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ Impédance : $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega$

ρ = coefficient de réflexion

$$\rho = \left. \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_i} \right|_{z=0}$$

- Onde transmise dans le conducteur : se propage selon $+z$

$$\hat{\vec{E}}_t = \tau E_0 e^{-jk_t z} \hat{x} \quad \hat{\vec{H}}_t = \tau \frac{E_0}{\eta} e^{-jk_t z} \hat{y}$$

Milieu dissipatif :

Nombre d'onde : $jk_t = j\omega\sqrt{\mu_0\tilde{\epsilon}}$ Impédance : $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}}}$

τ = coefficient de transmission

$$\tau = \left. \frac{\hat{E}_t}{\hat{E}_i} \right|_{z=0}$$

Milieu bon conducteur ?

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{58 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \sigma \gg \omega\epsilon$$

Epaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = 2.09 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$jk_t \simeq \frac{1+j}{\delta} \quad \eta = Z_s \simeq \frac{1+j}{\sigma\delta} = 8.25 \cdot 10^{-3} (1+j) \Omega$$

- Conditions aux limites sur la paroi conductrice : pour $z = 0$

- continuité de la composante tangentielle de \vec{E} :

$$(\hat{E}_i + \hat{E}_r)|_{z=0} = \hat{E}_t|_{z=0} \quad E_0 + \rho E_0 = \tau E_0$$

- continuité de la composante tangentielle de \vec{H} :

$$(\hat{H}_i - \hat{H}_r)|_{z=0} = \hat{H}_t|_{z=0} \quad \frac{E_0}{\eta_0} - \rho \frac{E_0}{\eta_0} = \tau \frac{E_0}{Z_s}$$

- On déduit :

$$\rho = \frac{Z_s - \eta_0}{Z_s + \eta_0} = -1 + j4.38 \cdot 10^{-5} \quad \tau = \frac{2Z_s}{Z_s + \eta_0} = 4.38 \cdot 10^{-5}(1 + j)$$

- On remarque :

$$|Z_s| \ll \eta_0 \Rightarrow \rho \simeq -1, \quad \tau \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} E_i \simeq -E_r & H_r \simeq H_i \\ E_t \simeq 0 & H_t \simeq 2H_i \end{cases}$$

- Puissance moyenne transportée par l'onde incidente :

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E}_i \hat{H}_i^*) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0} = 1.33 \text{ mW/m}^2$$

- Puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie :

$$\langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E}_r \hat{H}_r^*) = \frac{1}{2} |\rho|^2 \frac{E_0^2}{\eta_0}$$

Ces deux puissances moyennes sont indépendantes de z (milieu non dissipatif).

- Puissance moyenne absorbée par le cuivre = puissance transmise (en $z = 0$):

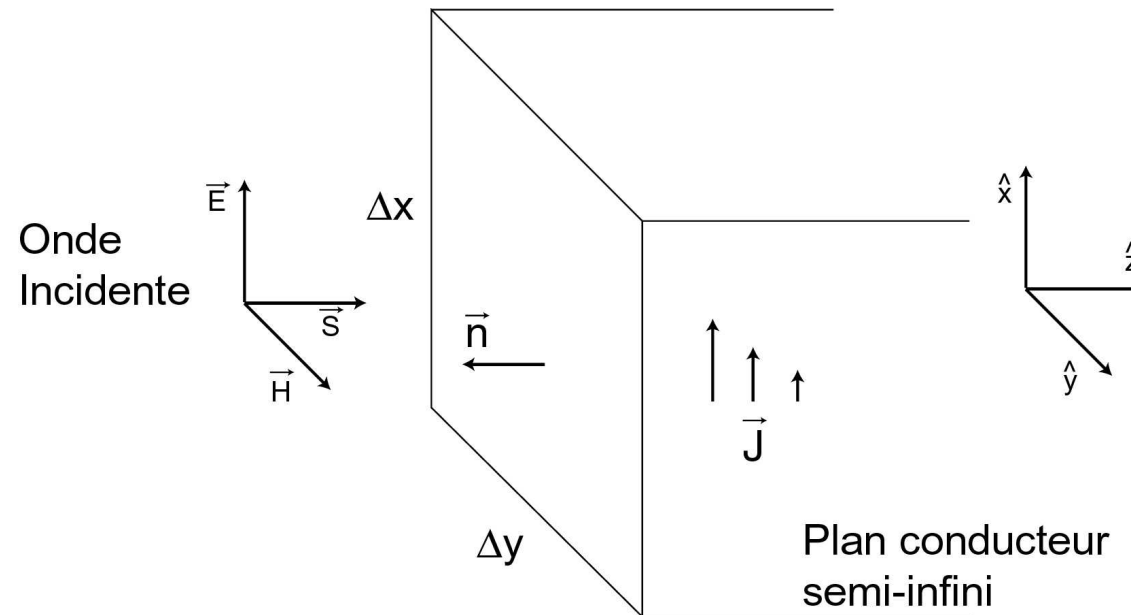
$$\langle S_t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E}_t \hat{H}_t^*) = \frac{1}{2} |\tau|^2 \frac{E_0^2}{|Z_s|^2} \operatorname{Re}(Z_s) = 1.16 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

- En utilisant l'approximation $H_t \simeq 2H_i$:

$$\langle S_t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_s) \left(\frac{2E_0}{\eta_0} \right)^2 = 1.16 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

Exercice 5.3 Application du théorème de Poynting à un bloc conducteur

On considère un bloc de cuivre semi-infini s'étendant dans l'espace $z > 0$, et une onde plane incidente venant frapper le bloc à incidence normale.



Etablissez l'expression de la puissance dissipée dans le bloc de cuivre à partir du vecteur de Poynting de l'onde transmise dans le bloc. Exprimez ensuite cette puissance en fonction de l'amplitude du champ magnétique à la surface du bloc et vérifiez que le résultat obtenu est identique à celui établi au cours par intégration directe de la puissance dissipée par effet Joule.

1. Calcul par intégration directe de la puissance dissipée par effet Joule : voir cours

- Champ électrique et densité de courant dans le cuivre :

$$\hat{\vec{E}} = E_0 e^{-(1+j)z/\delta} \hat{x} \quad \hat{\vec{J}} = \sigma E_0 e^{-(1+j)z/\delta} \hat{x}$$

- Puissance dissipée par effet Joule dans le bloc :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_V \text{Re}(\hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{E}}^*) dV \\ &= \frac{1}{2} R_s \frac{\Delta x}{\Delta y} |\hat{I}|^2 \end{aligned}$$

avec

- $R_s = \frac{1}{\sigma\delta}$: la résistance par carré (1m largeur \times 1 m hauteur)
 - \hat{I} : le courant total traversant le bloc.
- Tout se passe comme si le courant se répartissait de manière uniforme sur une épaisseur δ du bloc.

2. Calcul à partir du vecteur de Poynting à la surface du bloc

Puissance totale dissipée dans le bloc = puissance pénétrant dans le bloc en $z = 0$

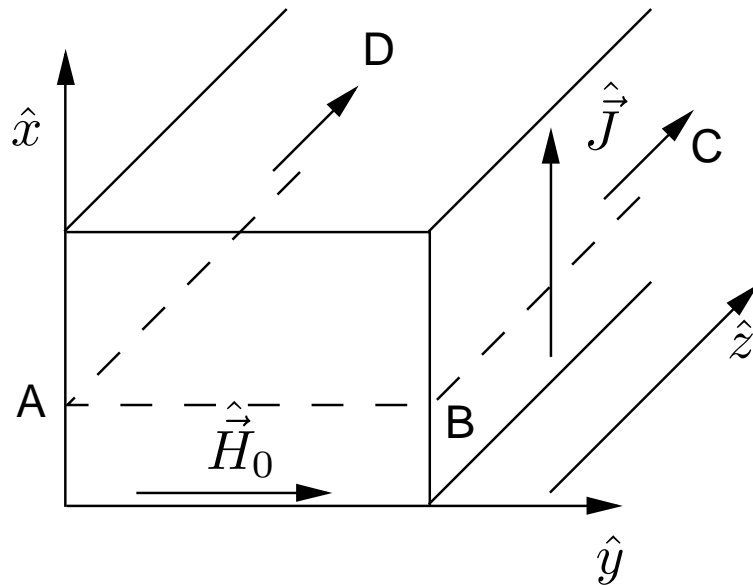
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \operatorname{Re}(\hat{\vec{E}}_t \times \hat{\vec{H}}_t^*) \cdot dx dy \hat{z} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} (Z_s \hat{H}_0 \hat{H}_0^*) dx dy \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{2} R_s |\hat{H}_0|^2 \end{aligned}$$

avec $|\hat{H}_0|$ l'amplitude du champ magnétique à la surface du bloc conducteur.

Il faut :

$$\frac{\Delta x \Delta y}{2} R_s |\hat{H}_0|^2 = \frac{1}{2} R_s \frac{\Delta x}{\Delta y} |\hat{I}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\hat{H}_0| = \frac{|\hat{I}|}{\Delta y}$$

3. Vérification par application du théorème d'Ampère



Application du théorème d'Ampère sur le contour ABCD ($C, D \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} &= \int_S \hat{\vec{J}} \cdot d\vec{S} \\ &= \Delta y \int_0^{\infty} \hat{J} dz \\ &= \hat{I} = \hat{H}_0 \Delta y \end{aligned}$$

$$\int_A^B \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = \hat{H}_0 \Delta y$$

$$\int_B^C \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_D^A \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\vec{H} \perp d\vec{\ell}) \quad \int_C^D \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\vec{H} \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow \infty)$$

Exercice complémentaire

1. Exercice EC. 4.1 :

- réflexion d'une onde plane à incidence normale sur un milieu diélectrique de paramètre μ_r à déterminer à partir de la connaissance du champ magnétique réfléchi,
- déterminez les expressions des impédances d'onde dans chaque milieu,
- déterminez les conditions aux limites des composantes des champs \vec{E} et \vec{H} , et déduisez-en l'expression du coefficient de réflexion, et partant du champ magnétique réfléchi à la surface du matériau.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP7

LIGNES DE TRANSMISSION EN REGIME HARMONIQUE - 1

1. Paramètres caractéristiques de la propagation

- Exercice 6.1:

- ligne téléphonique de géométrie définie, de paramètres unitaires connus, travaillant à une fréquence déterminée
- régime de haute ou basse fréquence ?
- hypothèse de ligne à faibles pertes ?
- calcul de paramètres caractéristiques de la propagation : α , Z_0 , v_p .

2. Calcul des paramètres unitaires R , L , G et C de systèmes de propagation

- Exercice 6.2 :

- ligne microbande travaillant à une fréquence déterminée,
- calcul des paramètres unitaires pour une géométrie plane,
- régime de haute fréquence,
- R et L : prise en compte de l'effet pelliculaire.

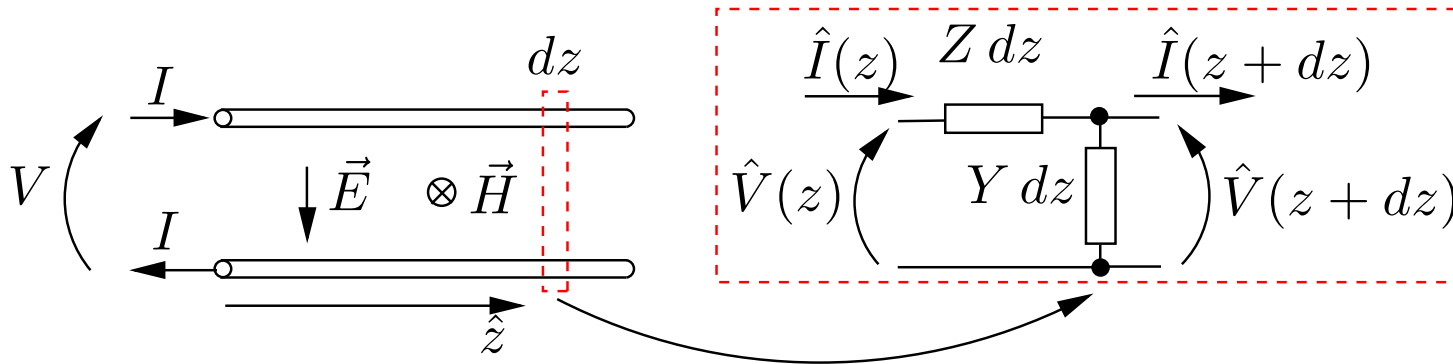
- Exercice 6.3 :

- câble coaxial travaillant à deux fréquences données,
- détermination des paramètres en régime de basse et haute fréquence,
- R et L : prise en compte de l'effet pelliculaire,
- G : liée aux pertes dans le matériau diélectrique.

Equations des télégraphistes en régime harmonique

Hypothèse : OTEM, champs \vec{E} , \vec{H} \perp direction de propagation z

- Modélisation de la ligne



- Equations des télégraphistes

Lois de Kirchhoff sur le tronçon permettent d'obtenir

$$\frac{\partial \hat{V}(z)}{\partial z} = -Z(\omega) \hat{I}(z)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}(z)}{\partial z^2} = Z(\omega) Y(\omega) \hat{V}(z)$$

$$\frac{\partial \hat{I}(z)}{\partial z} = -Y(\omega) \hat{V}(z)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{I}(z)}{\partial z^2} = Z(\omega) Y(\omega) \hat{I}(z)$$

Paramètres unitaires ou linéiques

$$Y = G + j\omega C :$$

C (pF/m): capacité associée à la distribution du champ électrique dans le diélectrique séparant les deux conducteurs

G (S/m) : pertes ohmiques (courant de conduction selon \hat{x}) et de polarisation dans le diélectrique

$$Z(\omega) = R + j\omega L :$$

L (H/m): inductance totale liée à la distribution du champ magnétique à l'intérieur (des) et entre les conducteurs; somme des inductance internes (influence de l'effet de peau) et externe

R (Ω /m) : pertes ohmiques (courants selon \hat{z}) dans le conducteur (influence de l'effet de peau)

Ondes V et I et paramètres de la propagation

- Solutions générales des équations des télégraphistes :

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_- e^{\gamma z} \quad \hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{V}_-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

Somme d'une onde incidente ou progressive se propageant selon $+z$ et d'une onde réfléchie se propageant selon $-z$

Expression temporelle

$$v(z, t) = |\hat{V}_+| e^{-\alpha z} \cos(\omega(t - \frac{z}{v}) + \angle \hat{V}_+) + |\hat{V}_-| e^{\alpha z} \cos(\omega(t + \frac{z}{v}) + \angle \hat{V}_-)$$

- Impédance caractéristique :

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\hat{V}_{inc}(z)}{\hat{I}_{inc}(z)}$$

- Constante de propagation

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

α (Np/m) : coefficient d'atténuation β (rad/m) : vecteur d'onde

- Vitesse de phase et longueur d'onde :

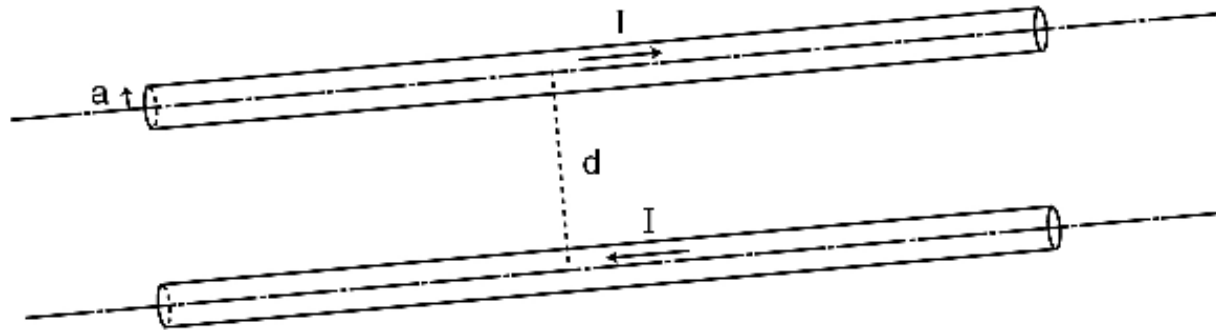
$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$$

- Cas particuliers :

		Z_0	α	β
Ligne idéale	$R = G = 0$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	0	$\omega\sqrt{LC}$
Ligne à faibles pertes	$G \ll \omega C, R \ll \omega L$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\frac{1}{2} \left(GZ_0 + \frac{R}{Z_0} \right)$	$\omega\sqrt{LC}$

Exercice 6.1 Paramètres unitaires d'une ligne téléphonique

Une ligne téléphonique de type bifilaire est constituée de deux conducteurs cylindriques de rayon $a = 0.2$ mm placés parallèlement l'un à l'autre à une distance $d = 0.6$ mm. Les fils sont isolés électriquement par un plastique ($\epsilon_r = 2$). Les fils sont en cuivre ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$).



A la fréquence de travail $f = 1$ kHz, on a mesuré les quatre paramètres unitaires suivants : $R = 100 \Omega/\text{km}$, $C = 0.051 \mu\text{F}/\text{km}$, $L = 0.6 \text{ mH}/\text{km}$ et $G \approx 0 \text{ S}/\text{m}$.

1. Cette ligne travaille-t-elle en régime de haute ou de basse fréquence ?
2. Travaille-t-elle en régime de faibles pertes ?
3. Déterminez l'impédance caractéristique, l'atténuation linéique et la vitesse de phase.

1. Haute ou basse fréquence ?

Basse fréquence : courant \simeq uniformément réparti dans les conducteurs

Haute fréquence : effet pelliculaire, épaisseur de peau $\delta \ll$ dimension du conducteur

Épaisseur de peau à la fréquence de $f = 1$ kHz :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2 \text{ mm} \gg a \quad \text{BF}$$

2. Faibles pertes ?

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{100}{2\pi 10^3 0.6 10^{-3}} = 26.5 \gg 1 \quad \text{non faibles pertes}$$

3. Impédance caractéristique :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = 402.5 - j387.6 \, \Omega \quad \left(\simeq \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R}{\omega C}} = 395(1 - j) \right)$$

Constante de propagation :

$$\gamma = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)} = 0.12 + j0.13 \, \text{km}^{-1}$$
$$\left(\simeq \sqrt{j\omega RC} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega RC} = 0.12(1 + j) \right)$$

Atténuation:

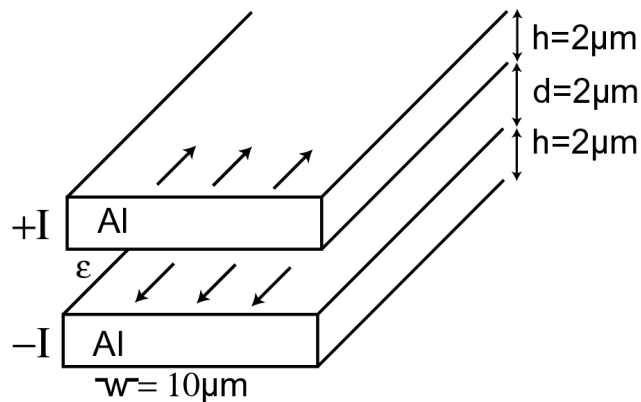
$$\alpha = \text{Re}(\gamma) = 0.12 \, \text{Np/km}$$

Vitesse de phase :

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 49 \, 10^3 \, \text{km/s}$$

Exercice 6.2 Paramètres unitaires d'une ligne microbande

Une ligne microbande (*microstrip* en anglais) est constituée d'un substrat isolant et diélectrique, métallisé sur ses deux faces avec de l'aluminium. La face supérieure véhicule un courant allant du générateur à la charge, le retour s'effectuant par la face inférieure.



Déterminez les quatre paramètres unitaires C , L , R et G , l'impédance caractéristique Z_0 et le coefficient d'atténuation de cette ligne.

Données :

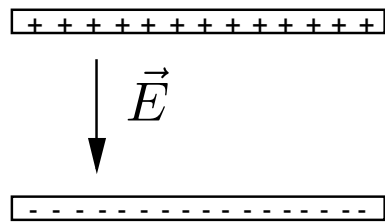
Fréquence de travail : $f = 18\text{ GHz}$.

Aluminium : $\sigma = 3.72 \cdot 10^7\text{ S/m}$, $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$.

Diélectrique : SiO_2 , σ et pertes diélectriques négligeables, $\epsilon_r = 3.8$ et $\mu_r = 1$.

OTEM : dans un plan $z = \text{Cte}$: champ \vec{E} réparti comme dans les problèmes d'électrostatique, champ \vec{H} réparti comme dans les problèmes de magnétostatique (dans l'espace séparant les deux conducteurs).

1. Calcul de C



Effets de bord négligés, C d'un condensateur plan

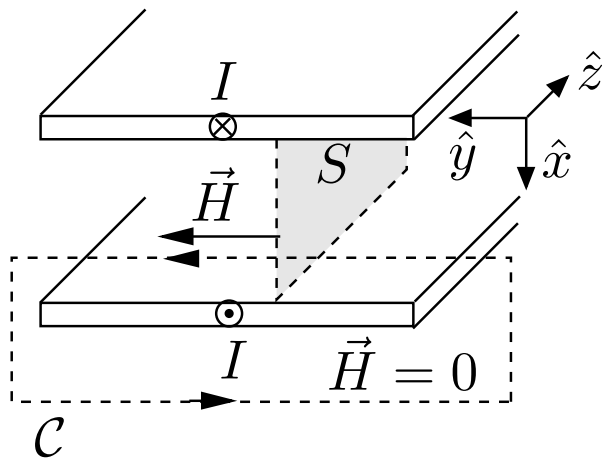
$$C = \frac{\epsilon w}{d} = 168 \text{ pF/m}$$

2. Calcul de G

σ et pertes diélectriques négligeables $\Rightarrow G = 0$

3. Calcul de L_{ext}

- Inductance externe : due au champ \vec{H} existant entre les conducteurs



Effets de bord négligés : $\vec{H} = H(x)\hat{y}$

Application du théorème d'Ampère sur le contour \mathcal{C}

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I = wH \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{I}{w}\hat{y}$$

Flux d'induction magnétique à travers la surface S de 1m de longueur:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I d}{w} \quad \Rightarrow \quad L_{ext} = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu d}{w} = 0.25\mu\text{H/m}$$

4. Impédance des conducteurs à la fréquence $f = 18$ GHz

HF ou BF ? Epaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 0.62 \mu\text{m} \ll h \Rightarrow \text{HF}$$

Bloc conducteur, impédance par carré : $Z_s = \frac{1+j}{\sigma\delta}$. Pour un conducteur de largeur w et de 1m de long ($\Delta x = 1$, $\Delta y = w$, voir cours théorique):

- Puissance dissipée par effet Joule :

$$P = \frac{1}{2} \frac{1}{w\sigma\delta} |\hat{I}|^2 = \frac{1}{2} R_1 |\hat{I}|^2$$

Résistance de 1m de conducteur : $R_1 = \frac{1}{w\sigma\delta} = 4.35 \text{ k}\Omega/\text{m}$

- Energie emmagasinée sous forme magnétique :

$$W_M = \frac{1}{2} \frac{1}{w\omega\sigma\delta} |\hat{I}|^2 = \frac{1}{2} L_1 |\hat{I}|^2$$

Inductance interne de 1 m de conducteur : $L_1 = \frac{1}{w\omega\sigma\delta} = 38 \text{ nH}/\text{m}$

5. Paramètres unitaires

$$C = \frac{\varepsilon w}{d} = 168 \text{ pF/m}$$

$$L = L_{ext} + 2L_1 = \frac{\mu d}{w} + \frac{2}{w\omega\sigma\delta} = 0.33 \text{ } \mu\text{H/m}$$

$$G = 0$$

$$R = 2R_1 = \frac{2}{w\sigma\delta} = 8.7 \text{ k}\Omega/\text{m}$$

6. Paramètres caractéristiques de la propagation :

Faibles pertes ?

$$\frac{R}{\omega L} = 0.233 \ll 1 \quad ??? \quad \frac{G}{\omega C} = 0$$

	valeur exacte	hyp. faibles pertes
Z_0	$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{j\omega C}}$ $44.6 - j5.13 \Omega$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$ 44.3Ω
γ	$\sqrt{(R + j\omega L)j\omega C}$ $97.5 + j847.7 \text{ m}^{-1}$	$\frac{R}{2Z_0} + j\omega\sqrt{LC}$ $98.2 + j842.1 \text{ m}^{-1}$

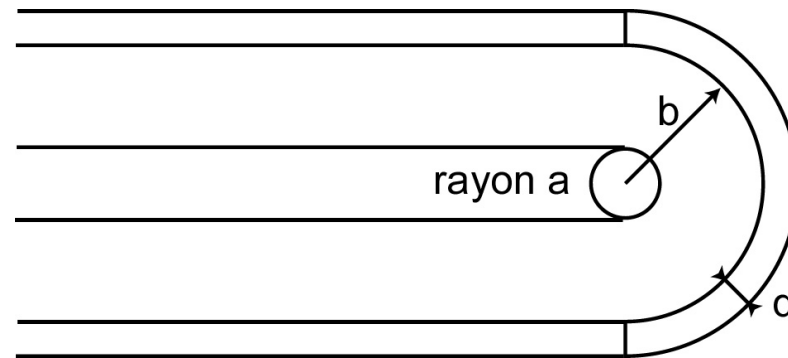
Exercice 6.3 Paramètres unitaires d'un câble coaxial

Un câble coaxial présente les paramètres suivants :

Paramètres géométriques : $a = 1$ mm, $b = 1$ cm et $d = 1$ mm.

Conducteurs : cuivre, $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$.

Diélectrique : polystyrène, $\sigma = 10^{-16}$ S/m, $\mu = \mu_0$, et $\varepsilon' = 2.5\varepsilon_0$,
 $\varepsilon''/\varepsilon' = 10^{-5}$ à $f = 1$ kHz ; $\varepsilon''/\varepsilon' = 2 \cdot 10^{-4}$ à $f = 1$ GHz



On demande de déterminer les paramètres unitaires C , L , R et G , l'impédance caractéristique Z_0 et le coefficient d'atténuation de ce câble, aux deux fréquences $f = 1$ kHz et $f = 1$ GHz.

Interprétez les différences observées.

1. Calcul de C : paramètre indépendant de la fréquence

Effets de bord négligés, C d'un câble coaxial (voir exercice 2.4)

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = 60.3 \text{ pF/m}$$

2. Calcul de L_{ext}

Inductance externe : due au champ \vec{H} existant entre les conducteurs, paramètre indépendant de la fréquence

L_{ext} d'un câble coaxial (voir exercice 3.5)

$$L_{ext} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0.46 \text{ } \mu\text{H/m}$$

3. Calcul de G : lié au courant de conduction dans le diélectrique et aux pertes liées à la polarisation

- permittivité complexe :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''_{tot} = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

- conductance (voir exercice 4.4)

$$G = \omega\varepsilon''_{tot}f(d) = \frac{\omega\varepsilon''_{tot}2\pi}{\ln\frac{b}{a}} = (\sigma + \omega\varepsilon'')\frac{2\pi}{\ln\frac{b}{a}}$$

- ε'' différents à $f = 1$ kHz et 1 GHz

$f = 1$ kHz	$f = 1$ GHz
$\omega\varepsilon'' = 1.4 \cdot 10^{-12} \gg \sigma$	$\omega\varepsilon'' = 2.8 \cdot 10^{-5} \gg \sigma$
pertes diélectriques dominant	
$G = 3.8 \cdot 10^{-12}$ S/m	$G = 75.8$ μ S/m

4. Impédance des conducteurs

- HF ou BF ? Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$
 - $f = 1 \text{ kHz}$, $\delta = 2 \text{ mm} > a, d$: BF
 - $f = 1 \text{ GHz}$, $\delta = 2 \text{ }\mu\text{m} \ll a, d$: HF
- Bloc conducteur cylindrique, impédance pour un m de conducteur : $Z = R + j\omega L$

BF - 1 kHz	HF - 1 GHz
<p>\simeq courant uniformément réparti sur la section</p> $R_1 = \frac{1}{\sigma\pi a^2}$ $R_2 = \frac{1}{\sigma\pi((d+b)^2 - b^2)}$ $L_1 = \frac{\mu_c}{8\pi}$ $L_2 = L_{cext}$ <p>voir exercice 3.5</p>	<p>\simeq courant uniformément réparti sur épaisseur de peau δ</p> $R_1 = \frac{1}{\sigma 2\pi a \delta}$ $R_2 = \frac{1}{\sigma 2\pi b \delta}$ $L_1 = \frac{R_1}{\omega}$ $L_2 = \frac{R_2}{\omega}$

5. Paramètres unitaires

$$f = 1 \text{ kHz}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = 60.4 \text{ pF/m}$$

$$L = L_{ext} + L_1 + L_2 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_c}{8\pi} + \frac{\mu_c}{2\pi} \left(\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{b}{c} - \frac{\frac{1}{4}b^2 - \frac{3}{4}c^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$L = 0.52 \text{ } \mu\text{H/m} \text{ avec } c = b + d$$

$$G = 3.8 \cdot 10^{-12} \text{ S/m}$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{\sigma\pi a^2} + \frac{1}{\sigma\pi ((b+d)^2 - b^2)} = 5.8 \text{ m}\Omega/\text{m}$$

$$f = 1 \text{ GHz}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = 60.4 \text{ pF/m}$$

$$L = L_{ext} + L_1 + L_2 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\sigma\omega 2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0.46 \text{ } \mu\text{H/m} \simeq L_{ext}$$

$$G = 75.8 \text{ } \mu\text{S/m}$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{\sigma 2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1.44 \text{ } \Omega/\text{m}$$

6. Paramètres caractéristiques de la propagation :

à $f = 1$ kHz

- Faibles pertes ? non

$$\frac{R}{\omega L} \simeq 1$$

- Impédance caractéristique :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = 114 - j66.5 \Omega$$

- Atténuation :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = 25 \cdot 10^{-6} + j43 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha = \text{Re}(\gamma) = 25 \cdot 10^{-6} \text{ Np/m}$$

à $f = 1$ GHz

- Faibles pertes ? oui

$$\frac{R}{\omega L} = 5.2 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad \frac{G}{\omega C} = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

- Impédance caractéristique :

$$Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} = 87.4 \, \Omega$$

- Atténuation :

$$\alpha \simeq \frac{R}{2Z_0} + \frac{Z_0 G}{2} = 0.012 \text{ Np/m}$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 5.1 :

- calcul des paramètres unitaires et des paramètres de la propagation pour une ligne bifilaire.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP8

LIGNES DE TRANSMISSION EN REGIME HARMONIQUE - 2

1. Lignes de transmission : ondes stationnaires en régime harmonique

- Exercice 6.4:

- ligne de transmission idéale fermée sur une impédance de charge complexe,
- calcul du coefficient de réflexion ρ et du taux d'ondes stationnaires S ,
- détermination de l'impédance équivalente vue à l'entrée de la ligne,
- illustration des ondes stationnaires : localisation des maxima et minima et tracé de l'amplitude de la tension le long de la ligne.

- Exercice 6.5 :

- application : mesure d'une impédance en haute fréquence,
- l'impédance Z_L à déterminer est connectée à l'extrémité d'une ligne idéale,
- mesures : V_{max} , V_{min} et la localisation d'un minimum de l'amplitude de la tension,
- on déduit : $S \Rightarrow |\rho|$, emplacement du minimum $\Rightarrow \angle\rho$, $\rho \Rightarrow Z_L$.

2. Ligne quart-d'onde

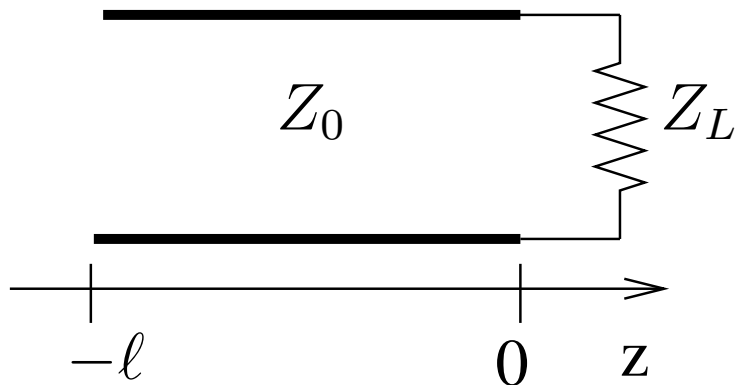
- Exercice 6.6 :

- illustration des caractéristiques de la propagation sur une ligne de transmission de longueur égale à $\lambda/4$,
- allures de $|\hat{V}(z)|$ et $|\hat{I}(z)|$, pour différentes terminaisons : court-circuit, circuit ouvert, résistance de charge.

- Exercice 6.7 :

- illustration du principe de l'adaptation d'une charge à sa ligne d'alimentation,
- calcul de divers paramètres de la propagation.

Ligne terminée sur une impédance de charge Z_L



- Ondes de tension et de courant:

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_- e^{\gamma z} = \hat{V}_+ (e^{-\gamma z} + \rho e^{\gamma z})$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{V}_-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

- Coefficient de réflexion (à la charge):

$$\rho = \frac{\hat{V}_-}{\hat{V}_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

- Impédance vue de l'entrée de la ligne :

$$Z_{in}(\ell) = \frac{\hat{V}(z = -\ell)}{\hat{I}(z = -\ell)} = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma \ell) + Z_0 \sinh(\gamma \ell)}{Z_0 \cosh(\gamma \ell) + Z_L \sinh(\gamma \ell)}$$

Cas de la ligne idéale :

$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta \ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta \ell)}$$

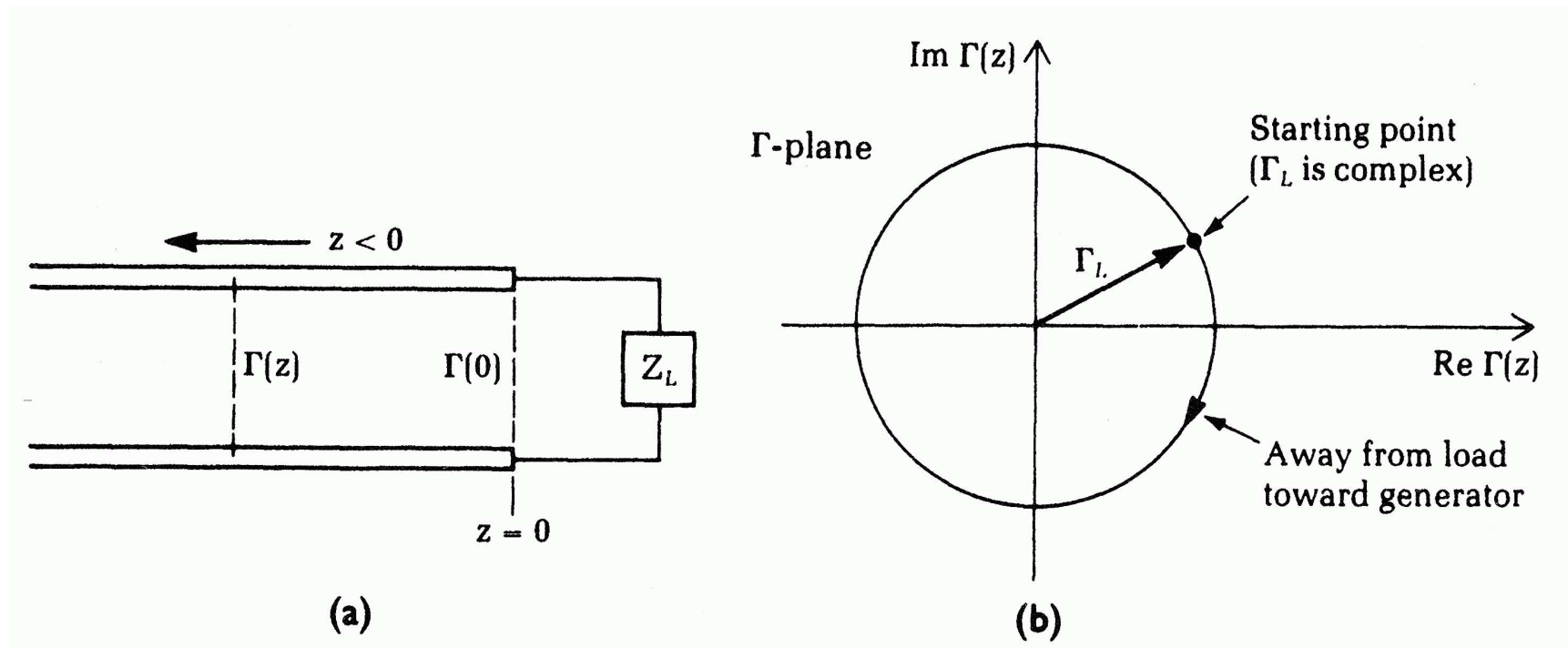
Cas particuliers

	Z_L	Z_{in}	ρ
Ligne adaptée	Z_0	Z_0	0
Ligne cc.	$Z_L = 0$	$jZ_0 \tan(\beta l)$	-1
Ligne ouverte	$Z_L = \infty$	$-jZ_0 \cot(\beta l)$	1

Lignes idéales : ondes stationnaires

- Coefficient de réflexion généralisé :

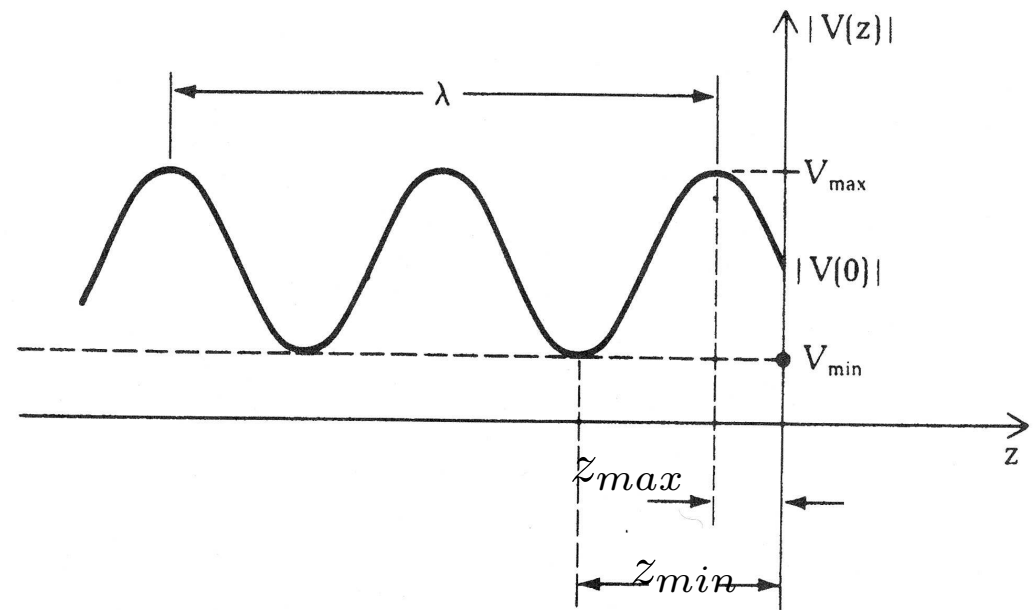
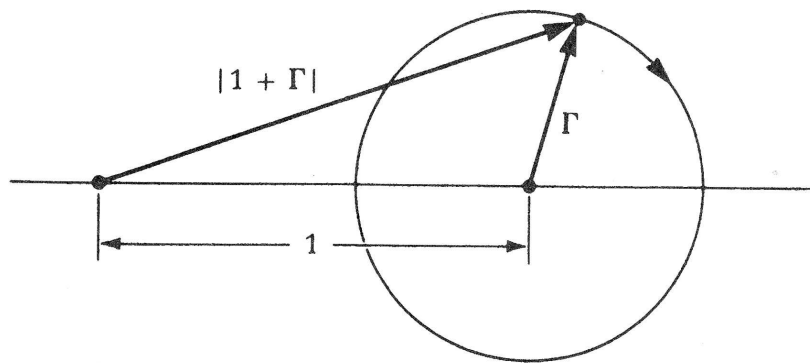
$$\Gamma(z) = \frac{\hat{V}_{refl}(z)}{\hat{V}_{inc}(z)} = \frac{\hat{V}_- e^{j\beta z}}{\hat{V}_+ e^{-j\beta z}} = \rho e^{2j\beta z} = |\rho| e^{j(2\beta z + \theta_\rho)}$$



- Allure de $|\hat{V}(z)|$ le long de la ligne

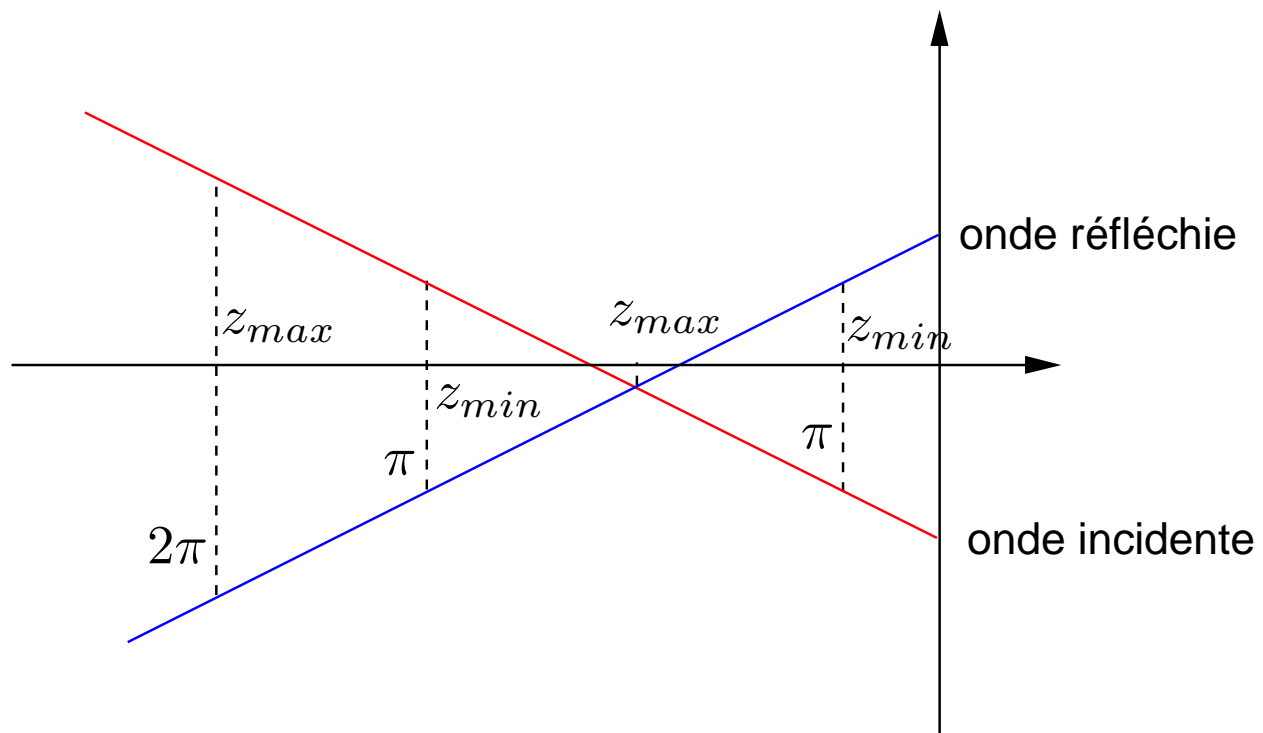
$$\hat{V}(z) = \hat{V}_+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma(z))$$

$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| |1 + \Gamma(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z + \theta_\rho)}$$



$$V_{max} = |\hat{V}_+| (1 + |\rho|) \quad V_{min} = |\hat{V}_+| (1 - |\rho|)$$

Phase des ondes incidente et réfléchié :



- Maxima=ventre de la tension lorsque onde incidente et onde réfléchie sont en phase

$$-\beta z = \beta z + \theta_\rho + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad z_{max} = -\frac{\lambda}{4\pi}\theta_\rho - k\frac{\lambda}{2}$$

Deux maxima successifs sont séparés de $\lambda/2$

- Minima=noeud de la tension lorsque onde incidente et onde réfléchie sont en opposition de phase

$$-\beta z = \beta z + \theta_\rho + (2k + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad z_{min} = -\frac{\lambda}{4\pi}\theta_\rho - k\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$$

Deux minima successifs sont séparés de $\lambda/2$

Un maximum et un minimum sont séparés de $\lambda/4$

- Taux d'ondes stationnaires :

$$S = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad \Rightarrow \quad |\rho| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

Courant et impédance

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \rho e^{j\beta z}) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{-j\beta z} (1 - \Gamma(z))$$

- En un maximum de tension, ondes incidente et réfléchie de courant sont en opposition de phase \Rightarrow minimum de courant (Z_0 réel)

$$I_{min} = \frac{|V_+|}{Z_0} (1 - |\rho|)$$

$$Z_{max} = \frac{\hat{V}(z_{max})}{\hat{I}(z_{max})} = Z_0 \frac{\hat{V}_+(1 + |\rho|)}{\hat{V}_+(1 - |\rho|)} = SZ_0 \quad \text{impédance réelle !}$$

- En un minimum de tension, ondes incidente et réfléchie de courant sont en phase \Rightarrow maximum de courant

$$I_{max} = \frac{|V_+|}{Z_0} (1 + |\rho|)$$

$$Z_{min} = \frac{\hat{V}(z_{min})}{\hat{I}(z_{min})} = Z_0 \frac{\hat{V}_+(1 - |\rho|)}{\hat{V}_+(1 + |\rho|)} = \frac{Z_0}{S} \quad \text{impédance réelle !}$$

Exercice 6.4 - Allure de l'amplitude de la tension le long d'une ligne en régime harmonique

Une ligne de transmission idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 75 \Omega$ et de longueur $\ell = 0.6\lambda$ est terminée sur une charge d'impédance $Z_L = 100 + j150 \Omega$.

1. Déterminez le taux d'ondes stationnaires S et la position des maxima et minima de la tension le long de la ligne.
2. Esquissez l'allure de $|\hat{V}(z)|$.
3. Déterminez l'impédance vue au droit de l'emplacement $z = -0.4\lambda$, l'impédance d'entrée de la ligne ainsi que les impédances Z_{\min} et Z_{\max} vues au droit des minima et maxima de tension.

1. Taux d'ondes stationnaires S et emplacement des maxima et minima de $|V|$

- Coefficient de réflexion

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0.51 + j0.42 = 0.66e^{j0.7}$$

- $|\rho| \rightarrow S$:

$$S = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 4.9$$

- $\theta_\rho \rightarrow z_{max}, z_{min}$:

$$-z_{max} = \theta_\rho \frac{1}{2\beta} + k \frac{\pi}{\beta} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$-z_{max} = \theta_\rho \frac{\lambda}{4\pi} + k \frac{\lambda}{2} = 0.056\lambda + k \frac{\lambda}{2}$$

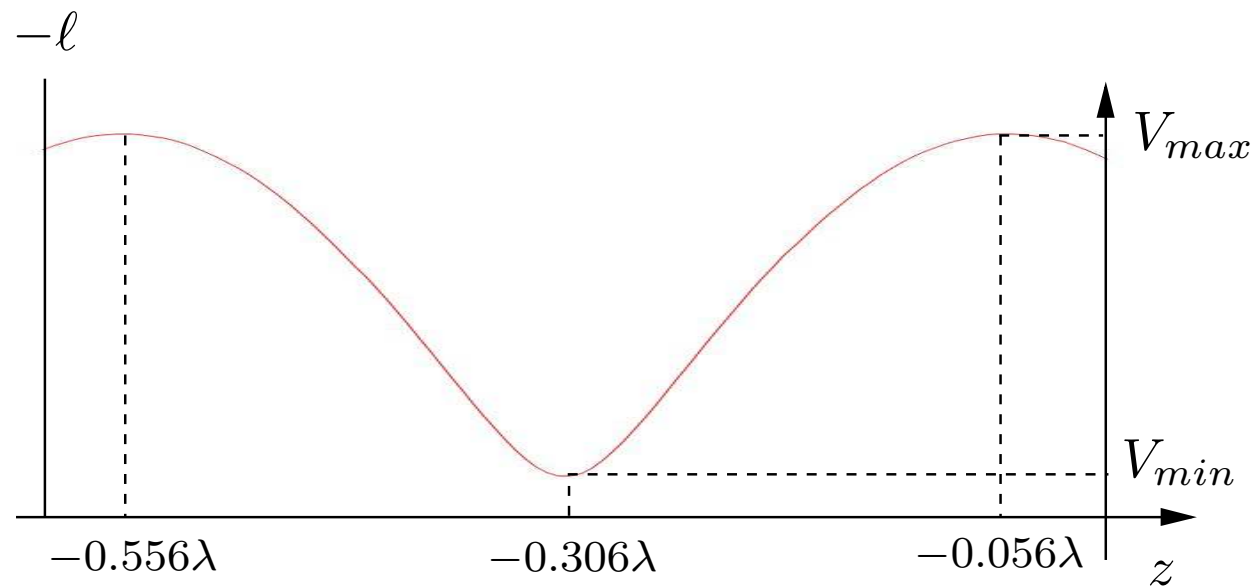
Longueur de la ligne : $\ell = 0.6\lambda \Rightarrow$

2 maxima : $-z_{max,1} = 0.056\lambda$ ($k = 0$), $-z_{max,2} = 0.556\lambda$ ($k = 1$)

1 minimum : $-z_{min,1} = -z_{max,1} + \frac{\lambda}{4} = 0.306\lambda$

2. Allure de $|\hat{V}(z)|$

$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| |1 + \Gamma(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z + \theta_\rho)}$$



3. Impédances

$$Z_{in}(z = -\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

- Impédance vue de $z = -\ell_1 = -0.4\lambda$

$$\beta\ell_1 = 0.8\pi \Rightarrow Z_{in} = 22 + j47.6 \Omega$$

- Impédance d'entrée de la ligne : $\ell = 0.6\lambda$

$$\beta\ell = 1.2\pi \Rightarrow Z_{in} = 133.6 - j165.7 \Omega$$

- Impédance aux maxima de la tension :

$$Z_{max} = SZ_0 = 367.5 \Omega$$

- Impédance aux minima de la tension :

$$Z_{min} = \frac{Z_0}{S} = 15.3 \Omega$$

Exercice 6.5 - Mesure d'une impédance en hautes fréquences

Une ligne idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$ alimente une impédance de charge Z_L , que l'on cherche à déterminer. La mesure de la tension le long de la ligne fournit un taux d'ondes stationnaires $S = 3$. Le premier minimum de la tension est également localisé à une distance $z_{\min} = 0.33 \lambda$ de la charge.

Déterminez la valeur de l'impédance de charge Z_L .

Principe

- $S \rightarrow |\rho|$
- $l_{min} \rightarrow \theta_\rho$
- $\rho \rightarrow Z_L$

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \Rightarrow |\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} = \frac{1}{2}$$

$$l_{min} = \theta_\rho \frac{\lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \theta_\rho = 0.32\pi = 1$$

$$\rho = 0.5e^{j1} \Rightarrow Z_L = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = 52.5 + j59.1 \Omega$$

Exercice 6.6 - Ligne idéale quart d'onde

On considère un tronçon de ligne idéale d'impédance caractéristique Z_0 et d'une longueur ℓ égale au quart de la longueur d'onde du signal transmis. Pour chacune des situations suivantes :

1. ligne laissée ouverte à son extrémité;
2. ligne court-circuitée;
3. ligne terminée sur une résistance de charge $R_1 < Z_0$;
4. ligne terminée sur une résistance de charge $R_2 > Z_0$;

déterminez :

- le coefficient de réflexion et le taux d'ondes stationnaires ;
- l'expression et l'allure du module de la tension et du courant le long de la ligne ;
- l'impédance vue de l'entrée de la ligne.

Ligne d'une longueur d'un quart de la longueur d'onde :

$$\ell = \frac{\lambda}{4}, \quad \beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

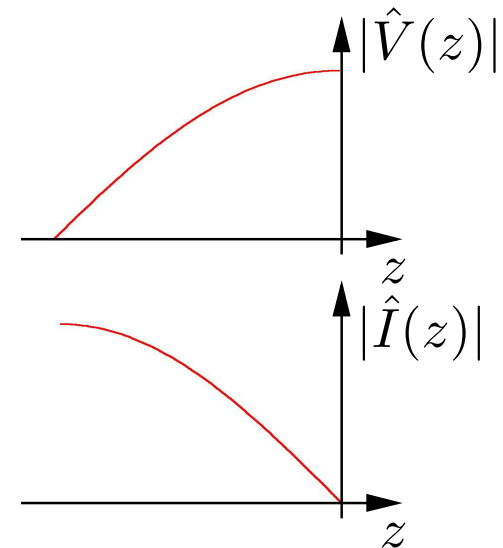
1. Ligne ouverte.

$$Z_L = \infty, \quad \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1 \quad S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \infty$$

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_+ e^{-j\beta z} + \hat{V}_+ e^{j\beta z} = 2\hat{V}_+ \cos \beta z$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{j\beta z} = -\frac{2j\hat{V}_+}{Z_0} \sin \beta z$$

$$Z_{in1} = \frac{\hat{V}(-\ell)}{\hat{I}(-\ell)} = 0$$



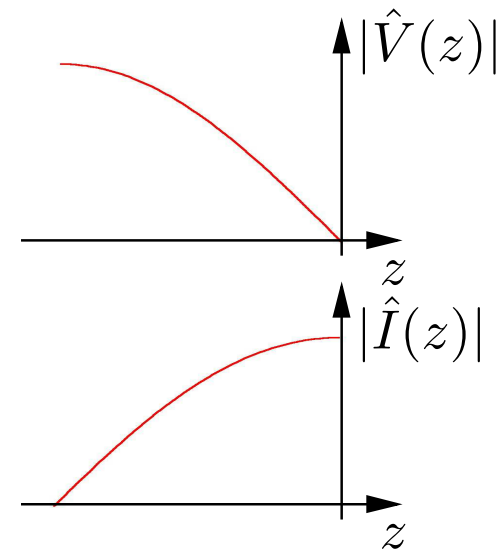
2. Ligne court-circuitée.

$$Z_L = 0, \quad \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1 \quad S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \infty$$

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_+ e^{-j\beta z} - \hat{V}_+ e^{j\beta z} = -2j\hat{V}_+ \sin \beta z$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{-j\beta z} + \frac{\hat{V}_+}{Z_0} e^{j\beta z} = \frac{2\hat{V}_+}{Z_0} \cos \beta z$$

$$Z_{in2} = \frac{\hat{V}(-\ell)}{\hat{I}(-\ell)} = \infty$$



3. Résistance de charge $R_1 < Z_0$.

$$Z_L = R_1, \quad \rho = \frac{R_1 - Z_0}{R_1 + Z_0} < 0 \quad \theta_\rho = \pi$$

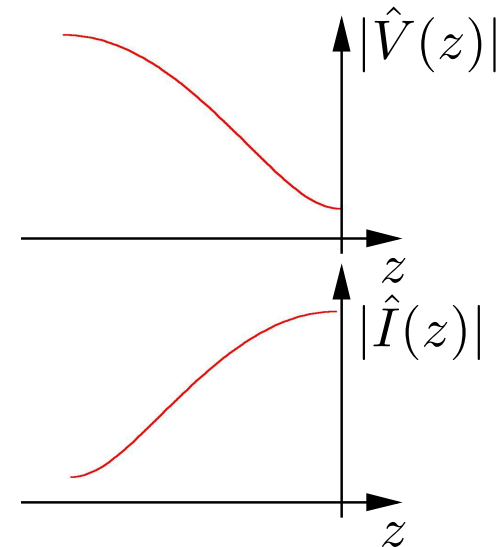
$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z + \pi)}$$

maximum en $z_{max} = -\frac{\lambda}{4}$ minimum en $z_{min} = 0$

$$|\hat{I}(z)| = \frac{|\hat{V}_+|}{Z_0} \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z)}$$

maximum en $z_{max} = 0$ minimum en $z_{min} = -\frac{\lambda}{4}$

$$Z_{in3} = Z_0 \frac{R_1 + jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{Z_0 + jR_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{R_1} > Z_0$$



4. Résistance de charge $R_2 > Z_0$.

$$Z_L = R_2, \quad \rho = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} > 0 \quad \theta_\rho = 0$$

$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z)}$$

maximum en $z_{max} = 0$ minimum en $z_{min} = -\frac{\lambda}{4}$

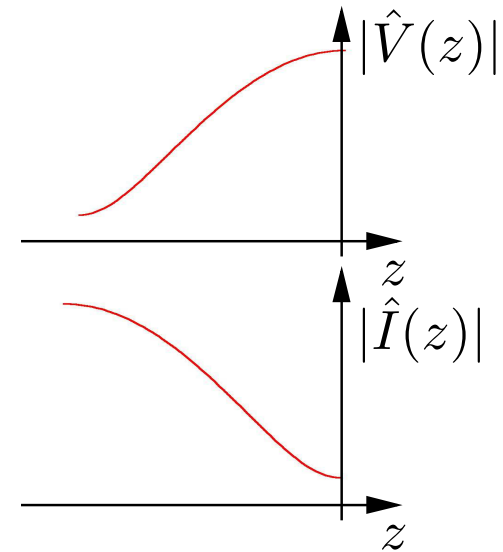
$$|\hat{I}(z)| = \frac{|\hat{V}_+|}{Z_0} \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z + \pi)}$$

maximum en $z_{max} = -\frac{\lambda}{4}$ minimum en $z_{min} = 0$

$$Z_{in4} = Z_0 \frac{R_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{Z_0 + jR_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{R_2} < Z_0$$

On remarque que dans les situations 3 et 4 :

$$Z_L \cdot Z_{in} = Z_0^2$$

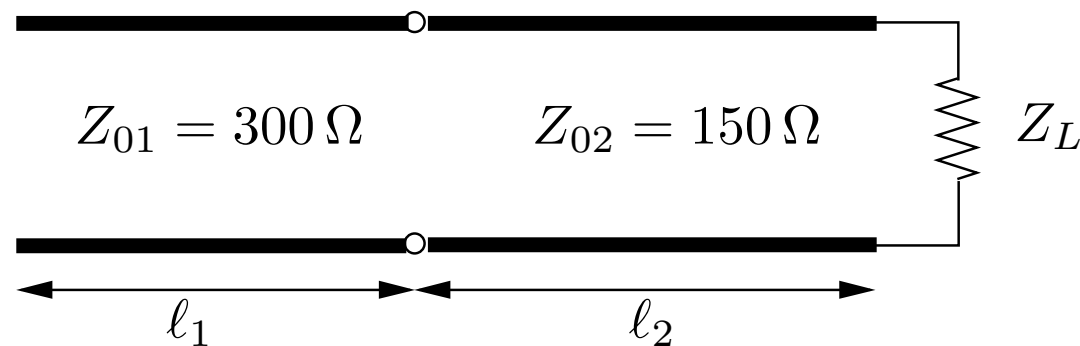


Exercice 6.7 - Adaptation par tronçon de ligne quart d'onde

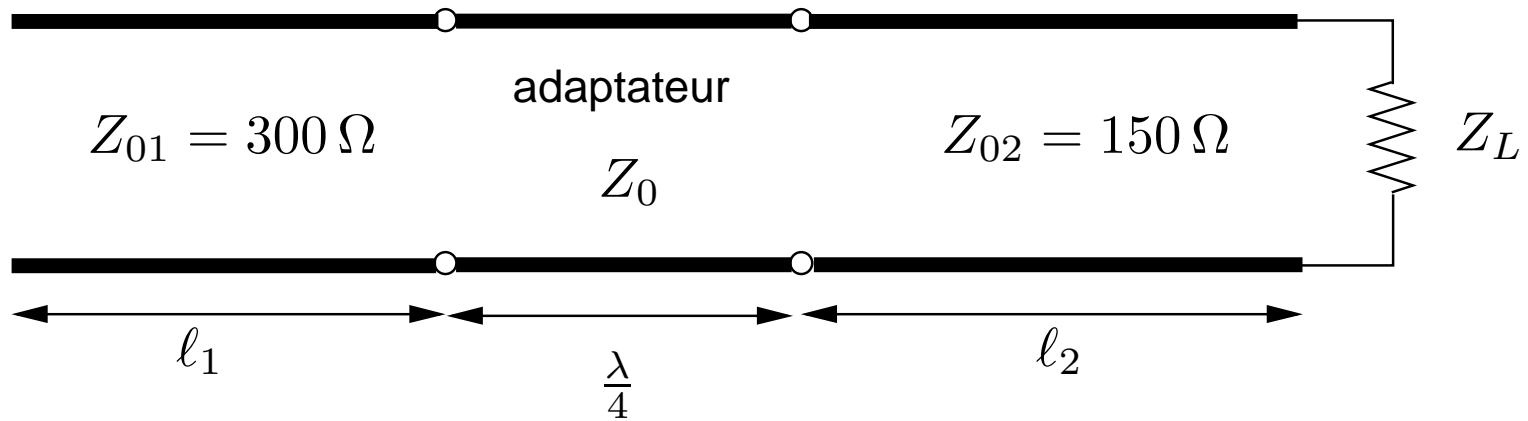
Une ligne de longueur $\ell_1 = 10$ m et d'impédance caractéristique $Z_{01} = 300 \Omega$ doit être connectée à une deuxième ligne, d'impédance caractéristique $Z_{02} = 150 \Omega$, de longueur $\ell_2 = 20$ m, et terminée sur une charge $Z_L = 150 \Omega$.

Les lignes sont constituées de câbles coaxiaux remplis avec un diélectrique de permittivité relative $\epsilon_r = 2.25$ et sont considérées sans perte. La fréquence de travail est $f = 50$ MHz.

1. Si les deux lignes sont connectées directement, déterminez le taux d'ondes stationnaires dans le tronçon de longueur ℓ_1 .



2. On souhaite à présent connecter les deux lignes par l'intermédiaire d'un *adaptateur quart d'onde*, constitué d'un câble coaxial rempli avec le même diélectrique.



- (a) Déterminez la longueur l et l'impédance caractéristique Z_0 du tronçon intermédiaire permettant de réaliser l'adaptation à la première ligne.
- (b) Déterminez le coefficient de réflexion au droit de l'entrée de la deuxième ligne (impédance caractéristique Z_{02}) et au droit de l'entrée de l'adaptateur. En déduire le taux d'ondes stationnaires dans le tronçon de longueur l_1 et celui dans l'adaptateur.

1. Lignes en cascade sans adaptateur.

- Impédance vue à l'entrée du tronçon de ligne 2 :
la ligne est adaptée ($Z_L = Z_{02}$) et $Z_{in}(-\ell_2) = Z_{02}$
- Taux d'ondes stationnaires dans le tronçon de ligne 1:
 - la ligne 1 est terminée sur l'impédance équivalente $Z_{eq} = Z_{in}(-\ell_2) = 150 \Omega$
 - coefficient de réflexion correspondant :

$$\rho = \frac{Z_{eq} - Z_{01}}{Z_{eq} + Z_{01}} = -1/3$$

- taux d'ondes stationnaires :

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 2$$

2. Adaptation par tronçon quart d'onde.

(a) Adaptation au tronçon de ligne 1 si à l'entrée de l'adaptateur $Z_{in} = Z_{01}$

L'adaptateur est terminé sur l'impédance équivalente $Z_{eq} = Z_{02}$. Pour une longueur d'adaptateur de $\frac{\lambda}{4}$:

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_{02}}$$

On déduit l'impédance caractéristique de l'adaptateur :

$$Z_0 = \sqrt{Z_{01} Z_{02}} = 212.1 \Omega$$

Longueur de l'adaptateur :

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad \lambda = \frac{v_p}{f} = 4 \text{ m}, \quad \ell = \frac{\lambda}{4} = 1 \text{ m}$$

(b) Coefficients de réflexion et taux d'ondes stationnaires

- dans l'adaptateur terminé sur $Z_{eq} = Z_{02}$

$$\rho = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} = -0.17, \quad S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 1.4$$

- dans le tronçon de ligne 1 : ligne adaptée

$$\rho = 0, \quad S = 1$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 5.2 :

- ligne de transmission terminée sur une impédance de charge RC,
- calcul de divers paramètres de la propagation,
- allure de $|\hat{V}(z)|$.

2. Exercice EC. 5.3 :

- adaptation de deux lignes de transmissions de type câble coaxial par un adaptateur quart d'onde,
- déterminez tout d'abord l'impédance caractéristique que doit présenter l'adaptateur,
- recherchez ensuite les dimensions et/ou la permittivité du diélectrique qui permettent d'obtenir cette impédance caractéristique.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP9

LIGNES DE TRANSMISSION EN REGIME HARMONIQUE - 3

1. Adaptation de la ligne à son impédance de charge

- Exercice 6.8 :

- adaptation d'un réseau d'antennes par ajout d'un "stub" en court-circuit en parallèle sur la ligne,
- illustration de l'adaptation par l'ajout d'un stub : où placer le stub sur la ligne ?, quelle longueur pour le stub ?
- utilisez les admittances des éléments pour réaliser la mise en parallèle des deux tronçons de ligne.

2. Bilan de puissance dans une ligne idéale

- Exercice 6.9 :

- ligne de transmission alimentée par un générateur et fermée par une impédance de charge,
- détermination des valeurs de la tension à l'entrée et à la sortie de la ligne,
- calcul de la puissance moyenne transmise à la charge.

3. Forme des champs \vec{E} et \vec{H} pour le mode TEM

- Exercice 6.10 :

- ligne de transmission vue comme un guide d'ondes propageant un mode TEM,
- illustration de la forme des champs \vec{E} et \vec{H} pour une géométrie coaxiale,
- relations entre les champs \vec{E} et \vec{H} et les ondes \hat{V} et \hat{I} ,
- recours au vecteur de Poynting pour la dérivation de la puissance moyenne transportée.

Exercice 6.8 - Adaptation d'un réseau d'antennes par ajout d'un "stub"

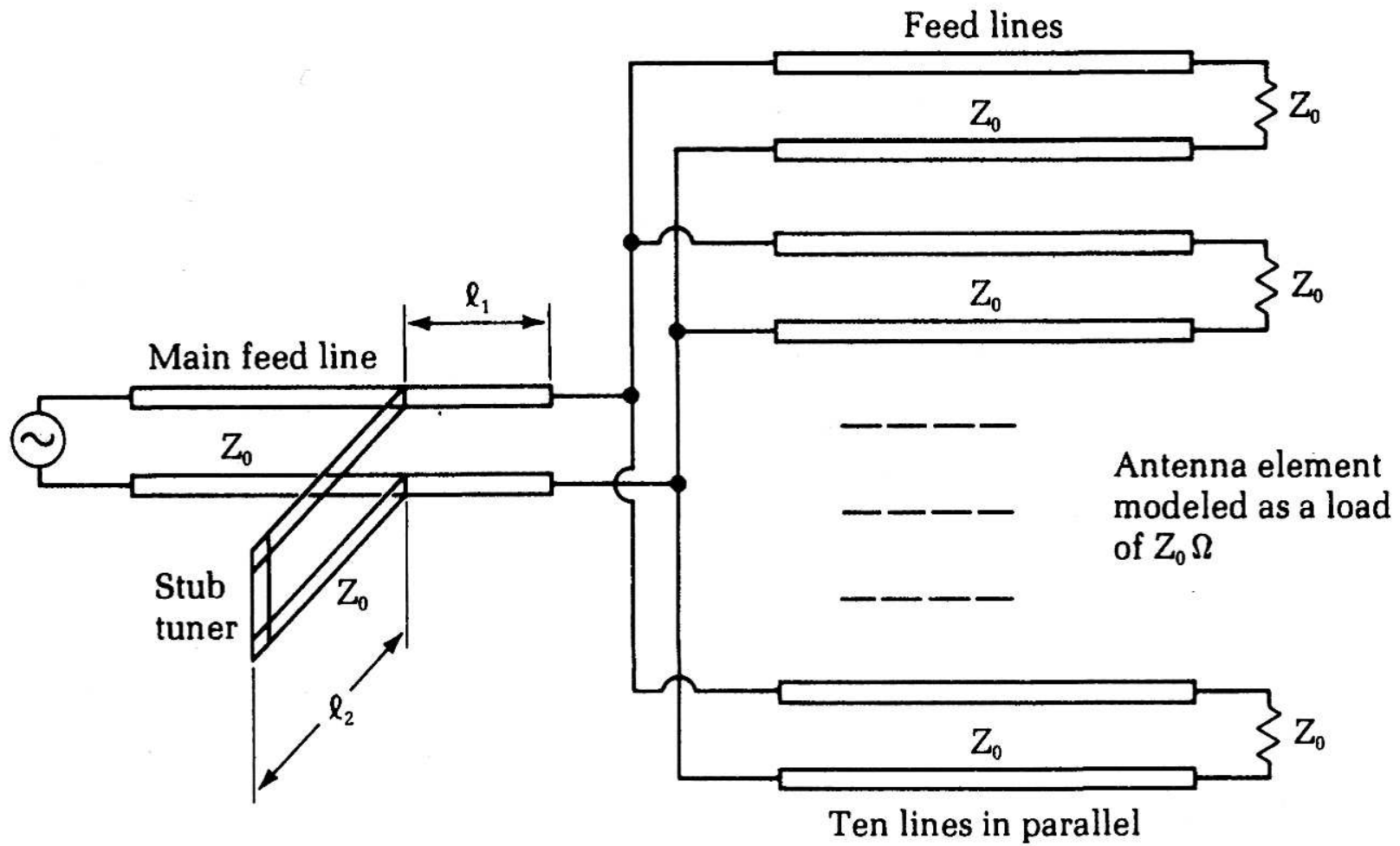
Un réseau d'antennes est constitué de la mise en parallèle d'un ensemble de 10 antennes identiques, chacune alimentée par une ligne idéale. Chaque antenne est adaptée à sa ligne d'alimentation de sorte que l'impédance caractéristique de chaque ligne d'alimentation Z_0 est égale à l'impédance de l'antenne $Z_L = 50 \Omega$. On désire réaliser l'adaptation de ce réseau d'antennes à sa ligne d'alimentation principale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$. A cette fin, on place en parallèle sur la ligne d'alimentation principale, à une distance ℓ_1 du réseau d'antennes, un stub en court-circuit de même impédance caractéristique Z_0 et de longueur ℓ_2 .

Déterminez les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2 qui réalisent l'adaptation. Pour ces valeurs, que vaut le taux d'ondes stationnaires (i) dans la ligne au droit du réseau d'antennes, (ii) dans le stub au droit du court-circuit ?

Données :

Fréquence de travail : $f = 1 \text{ GHz}$.

Constantes caractéristiques des lignes : $\epsilon_r = 2.3$ et $\mu_r = 1$.



Principe

- Soit $Y_1(\ell_1) = G_1(\ell_1) + jB_1(\ell_1)$ l'admittance vue en $z = -\ell_1$ au droit du tronçon de ligne terminé sur le réseau d'antennes
- Soit $Y_{cc}(\ell_2) = -jY_0 \cot(\beta\ell_2) = jB_2(\ell_2)$ l'admittance du stub cc. de longueur ℓ_2
- Les deux éléments sont connectés en parallèle, l'admittance équivalente vaut :

$$Y = G_1(\ell_1) + jB_1(\ell_1) + jB_2(\ell_2)$$

- Pour réaliser l'adaptation, il faut : $Y = Y_0$ avec Y_0 réel
1. Déterminer ℓ_1 tel que $G_1(\ell_1) = Y_0$
 2. ℓ_1 fixé, on a : $Y_1 = Y_0 + jB_1$ avec B_1 connu
 3. Déterminer ℓ_2 tel que $B_2(\ell_2) = -B_1$

- Impédance du réseau de 10 antennes en parallèle : $Z_L = Z_0/10 = 5 \Omega$
- Longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v}{f} = 19.8 \text{ cm} \quad \text{avec } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 1.98 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- Admittance Y_1

$$Y_1(\ell_1) = Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell_1)}{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell_1)}$$

- Il faut :

$$\text{Re}(Y_1) = Y_0 \Leftrightarrow 250 + 250 \tan^2(\beta\ell_1) = 25 + 2500 \tan^2(\beta\ell_1)$$

$$\tan(\beta\ell_1) = \pm \sqrt{\frac{1}{10}}$$

- deux solutions possibles pour ℓ_1 :

$$\ell_1^{(a)} = 0.049\lambda = 0.96 \text{ cm} \quad \ell_1^{(b)} = 0.451\lambda = 8.94 \text{ cm}$$

- On trouve

$$B_1(\ell_1^{(a)}) = -2.846Y_0 \quad B_1(\ell_1^{(b)}) = 2.846Y_0$$

- Solution (a) : $\ell_1 = 0.049\lambda$

Il faut : $B_2(\ell_2) = 2.846Y_0$

$$Y_0 \cot(\beta\ell_2) = -2.846Y_0 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 0.446\lambda = 8.83 \text{ cm}$$

- Solution (b) : $\ell_1 = 0.451\lambda$

Il faut : $B_2(\ell_2) = -2.846Y_0$

$$Y_0 \cot(\beta\ell_2) = 2.846Y_0 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 0.054\lambda = 1.07 \text{ cm}$$

Taux d'ondes stationnaires :

- Dans le tronçon de ligne $[-\ell_1, 0]$:

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -0.82 \quad S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 10.1$$

- Dans le stub cc. :

$$\rho = -1 \quad S = \infty$$

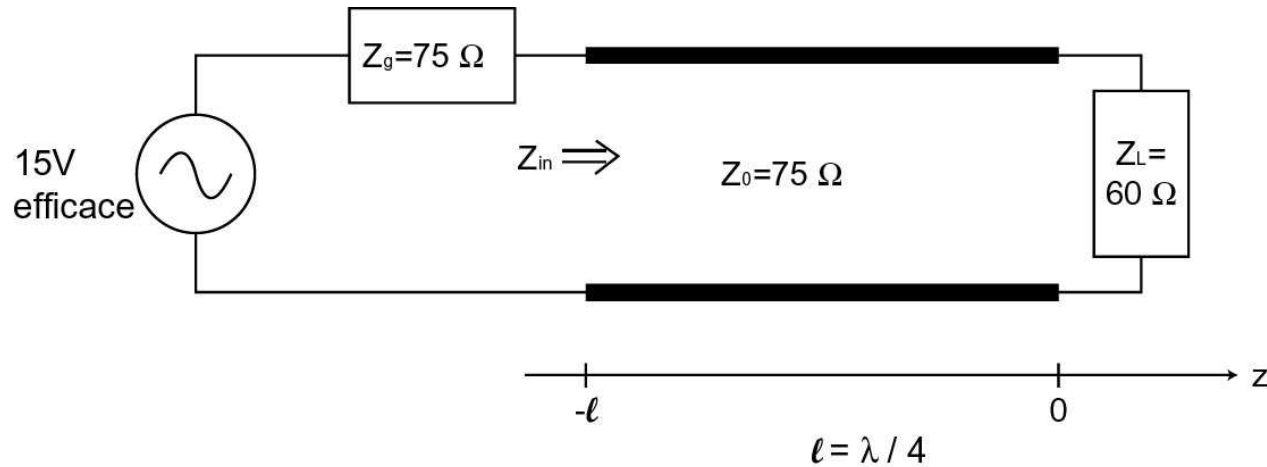
- Dans le tronçon de ligne $[-\ell, -\ell_1]$:

$$\rho = 0 \quad S = 1$$

Pas de réflexion, adaptation !

Exercice 6.9 - Bilan de puissance dans une ligne quart d'onde

Un générateur de tension efficace $V_g = 15 \text{ V}$ et d'impédance interne $Z_g = 75 \Omega$ alimente une charge d'impédance $Z_L = 60 \Omega$ par l'intermédiaire d'une ligne de transmission idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 75 \Omega$ et de longueur $\ell = \lambda/4$.

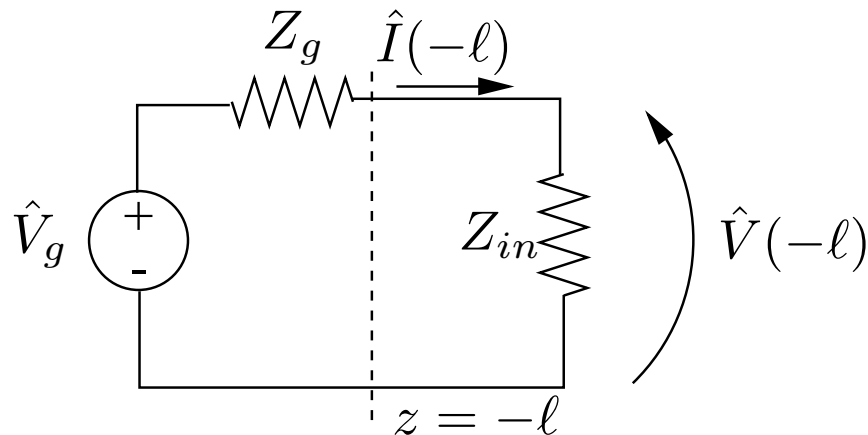


1. Que vaut l'impédance d'entrée $Z_{in}(-\ell)$?
2. Que vaut la puissance moyenne délivrée à la ligne ?
3. Quelle est la tension développée aux bornes de la charge, en $z = 0$?
4. Quelle est la puissance moyenne dissipée par la charge ?
5. Esquissez l'allure de $|\hat{V}(z)|$ pour $-\ell < z < 0$.

1. Impédance d'entrée :

$$\ell = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow Z_{in}(-\ell) = \frac{Z_0^2}{Z_L} = 93.75 \Omega$$

2. Circuit électrique équivalent : remplacer la ligne fermée sur Z_L par l'impédance d'entrée Z_{in}



$$\hat{V}(-\ell) = \hat{V}_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} = 8.33 \text{ V}$$

$$\hat{I}(-\ell) = \frac{\hat{V}_g}{Z_g + Z_{in}} = 89 \text{ mA}$$

$$P_{in} = \text{Re}(\hat{V}(-\ell)\hat{I}^*(-\ell)) = 0.74 \text{ W}$$

Les amplitudes de v et i sont exprimées en valeur efficace !!

3. Exprimer les conditions aux limites à l'entrée de la ligne (au générateur) et à la charge :

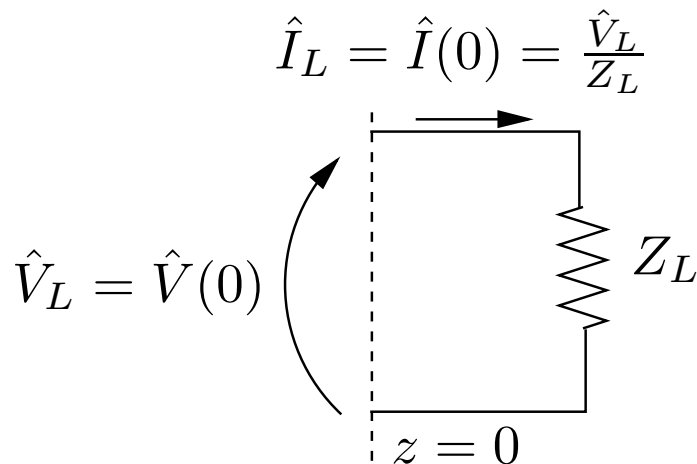
$$\text{au générateur } z = -\ell : \hat{V}(-\ell) = \hat{V}_+(e^{j\beta\ell} + \rho e^{-j\beta\ell}) = 8.33$$

$$\text{avec } \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -0.11 \Rightarrow \hat{V}_+ = -7.5j$$

$$\text{à la charge } z = 0 : \hat{V}(0) = \hat{V}_+(1 + \rho) = -j6.67$$

$$v(t)|_{z=0} = \sqrt{2} 6.67 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$

4. Puissance consommée par la charge :



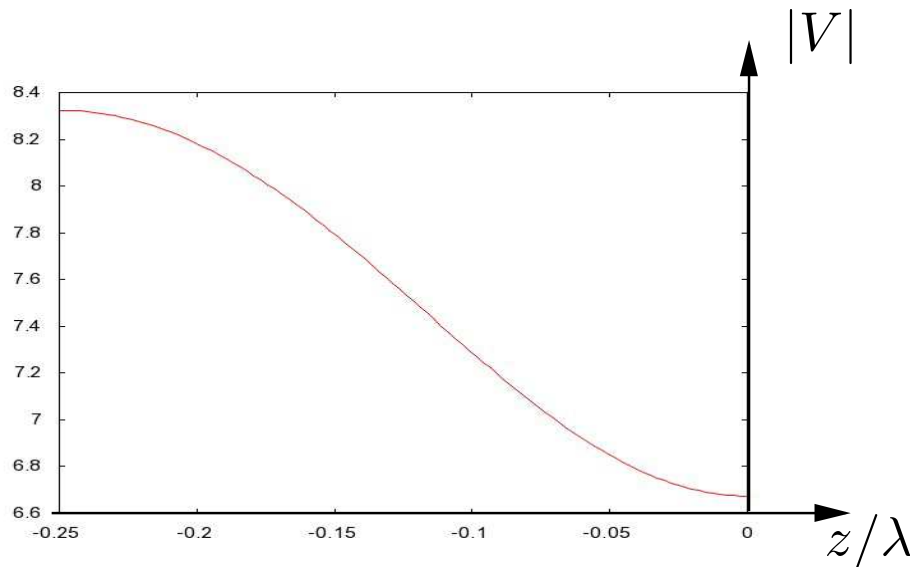
$$P_L = \text{Re}(\hat{V}_L \hat{I}_L^*) = \text{Re}\left(\frac{V_L^2}{Z_L^*}\right) = 0.74 \text{ W} = P_{in} !!$$

Ligne idéale, pas de pertes dans la ligne.

5. Allure de $|\hat{V}(z)|$

$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(2\beta z + \pi)} = 7.5 \sqrt{1.012 - 0.22 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} z\right)}$$

$$z_{max} = -\frac{\lambda}{4} = -\ell \quad z_{min} = 0$$



On vérifie :

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{1.11}{0.89} = \frac{8.33}{6.67}$$

Exercice 6.10 - Propagation d'un mode TEM dans un câble coaxial

Un câble coaxial est caractérisé par les paramètres suivants :

rayons intérieur et extérieurs : $a = 1.2 \text{ mm}$, $b = 3.25 \text{ mm}$

épaisseur du conducteur extérieur : $d = 2 \text{ mm}$

propriétés diélectriques à $f = 100 \text{ MHz}$: $\varepsilon' = 1.3\varepsilon_0$ et $\varepsilon'' \approx 0$

conducteurs considérés parfaits.

Le câble est alimenté par un signal sinusoïdal d'amplitude de crête $V_0 = 500 \text{ V}$ et de fréquence $f = 100 \text{ MHz}$. Ce signal se propage sous la forme d'un mode TEM (onde progressive).

1. Esquisser l'allure des lignes de champ de \vec{E} et \vec{H} dans une section transverse.
2. Déterminer les expressions des phaseurs $\hat{\vec{E}}$ et $\hat{\vec{H}}$ en fonction de V_0 et des paramètres du câble. Travailler en coordonnées cylindriques.
3. Déterminer l'expression et la valeur numérique de la puissance moyenne transportée par le signal, (i), en utilisant le vecteur de Poynting, (ii), en utilisant la théorie des lignes de transmission (pour rappel, $Z_0 = (\eta/2\pi)\ln[b/a]$).

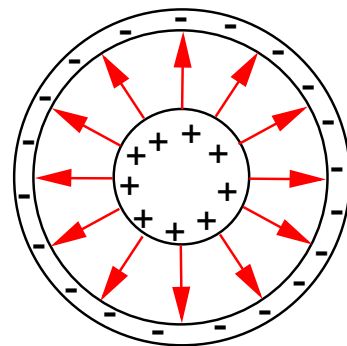
- Propagation selon z , symétrie selon θ

$$\hat{\vec{E}}(r, z) = \hat{\vec{E}}(r)e^{-\gamma z} \quad \hat{\vec{H}}(r, z) = \hat{\vec{H}}(r)e^{-\gamma z}$$

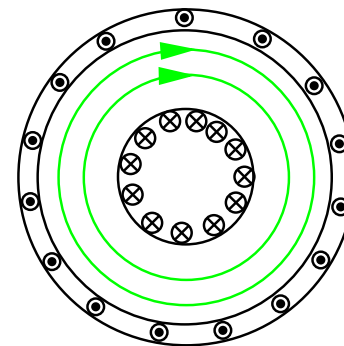
- Mode TEM : $\hat{E}_z = \hat{H}_z = 0$, pas de pertes : $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\epsilon\mu}$
- Dans un plan transverse à la direction de propagation, c-à-d z fixé, les champs présentent une forme semblable à celle des champs statiques

$$\hat{\vec{E}}(r) = \hat{E}_r(r)\hat{r} \quad \hat{\vec{H}}(r) = \hat{H}_\theta(r)\hat{\theta}$$

1. Lignes de champ :



$$\sigma_S = \hat{n} \cdot \vec{E}$$



$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}$$

2. Expressions des phaseurs \hat{E} et \hat{H}

Dans une section transverse, on définit :

- la tension : $\hat{V}(z) = \int_a^b \hat{\vec{E}}(z) \cdot d\vec{\ell}$ et le courant : $\hat{I}(z) = \oint_C \hat{\vec{H}}(z) \cdot d\vec{\ell}$
!! Les contours d'intégration sont entièrement contenus dans un plan transverse
- par application du théorème de Gauss sur une surface cylindrique de rayon r , on dérive : $\hat{\vec{E}}(r) = \frac{\hat{A}}{r} \hat{r}$ et en $z = 0$ (pris au générateur)

$$\hat{V}_0 = \int_a^b \frac{\hat{A}}{r} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \hat{A} \ln b/a \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{\hat{V}_0}{\ln b/a}$$

Expression du champ électrique :

$$\hat{\vec{E}}(r, z) = \frac{\hat{V}_0}{\ln b/a} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \hat{r}$$

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{V_0}{\ln b/a} \frac{1}{r} \cos(\omega t - \beta z) \hat{r}$$

- De $\vec{\nabla} \times \hat{\vec{E}} = -j\omega\mu\hat{\vec{H}}$ on tire :

$$\frac{\partial \hat{E}_r}{\partial z} = -j\omega\mu\hat{H}_\theta$$

$$\hat{E}_r = \eta\hat{H}_\theta \quad \text{avec} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Expression du champ magnétique:

$$\hat{\vec{H}}(r, z) = \frac{\hat{V}_0}{\eta \ln b/a} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \hat{\theta}$$

$$\vec{H}(r, z, t) = \frac{V_0}{\eta \ln b/a} \frac{1}{r} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\theta}$$

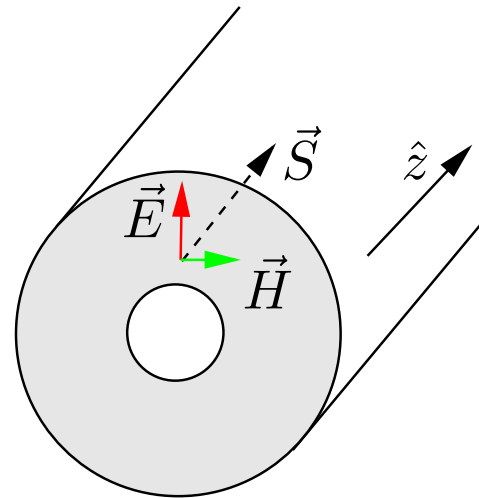
3. Puissance moyenne transportée

a. A partir du vecteur de Poynting

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{H}}^*) \\ &= \frac{V_0^2}{2\eta(\ln b/a)^2} \frac{1}{r^2} \hat{z}\end{aligned}$$

Puissance moyenne transportée :

$$\begin{aligned}P &= \int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{\pi}{\eta} \frac{V_0^2}{\ln b/a} = 2.4 \text{ kW}\end{aligned}$$



b. A partir de la théorie des lignes de transmission

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{V}(z)\hat{I}^*(z)) = \frac{1}{2} \frac{|\hat{V}(z)|^2}{Z_0}$$

$Z_0 = \frac{\hat{V}(z)}{\hat{I}(z)}$ est l'impédance caractéristique de la ligne

Expressions des tension et courant :

$$\hat{V}(z) = \int_a^b \hat{\vec{E}} \cdot d\vec{\ell} = \hat{V}_0 e^{-j\beta z}$$

$$\hat{I}(z) = \oint \hat{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{2\pi}{\eta \ln b/a} \hat{V}_0 e^{-j\beta z}$$

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln b/a = 52 \Omega$$

Finalement

$$P = \frac{V_0^2}{2Z_0} = \frac{\pi}{\eta} \frac{V_0^2}{\ln b/a} = 2.4 \text{ kW}$$

Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 5.4 :

- adaptation d'une impédance complexe par un adaptateur quart d'onde et un stub en court-circuit,
- s'inspirer de l'exercice 6.8 pour déterminer la longueur du stub en court-circuit de manière à obtenir une admittance équivalente réelle,
- résoudre ensuite le problème classique de l'adaptation à une charge résistive par un adaptateur quart d'onde.

2. Exercice EC. 5.5 :

- vérification de l'adaptation par ajout d'un stub ouvert,
- s'inspirer de l'exercice 6.8.

ELEN0076 - ELECTROMAGNETISME

TP10

LIGNES DE TRANSMISSION EN REGIME TRANSITOIRE

- Exercice 7.1 :
 - propagation d'une impulsion brève de tension dans une ligne idéale fermée sur une résistance de charge,
 - détermination des réflexions se produisant aux deux extrémités de la ligne,
 - prise en compte des ondes de tension et de courant,
 - analyse de l'énergie dissipée aux cours des réflexions.
- Exercice 7.2 :
 - propagation d'un échelon de tension dans une ligne idéale,
 - détermination des réflexions se produisant aux deux extrémités de la ligne,
 - application du principe de superposition pour déterminer la valeur finale de la tension.
- Exercice 7.3 :
 - charge d'un condensateur au travers d'une ligne,
 - régime transitoire : **pas de notion d'impédance**
 - appliquer les conditions aux limites aux extrémités de la ligne pour déterminer la tension aux bornes du condensateur.

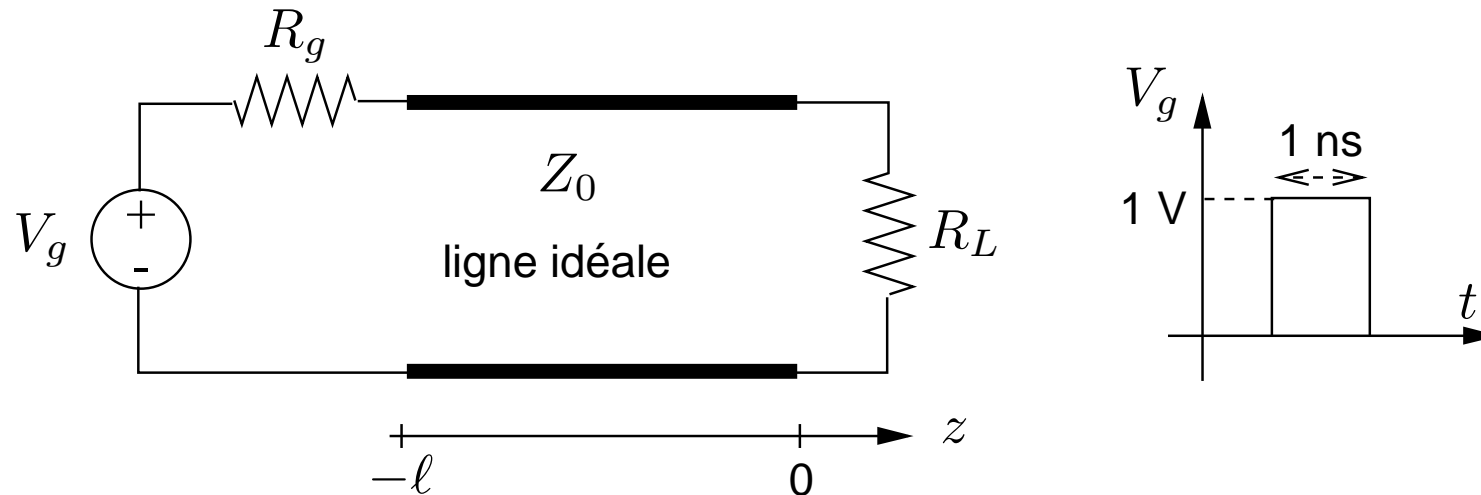
Lignes en temporel

- Transmission de signaux \neq signaux sinusoïdaux : impulsion, échelon, ...
- Spectre de fréquences large
- Superposition : traiter propagation de chaque composante de Fourier
- Sous l' hypothèse d'une ligne idéale:
 - vitesse v_p indépendante de ω : toutes les composantes fréquentielles se propagent à la même vitesse, pas de distorsion du signal;
 - atténuation nulle : $\alpha = 0$
 - impédance caractéristique réelle
- \Rightarrow le signal se propage sans modification de forme
- considérer la propagation du signal temporel de forme inchangée à la vitesse v_p
- appliquer les conditions aux limites aux extrémités de la ligne ($z = 0$ et $z = -\ell$)



| on ne peut plus parler d'impédances Z , d'admittances Y ou de phaseurs !!

Exercice 7.1 - Propagation d'une impulsion carrée dans une ligne idéale



Une ligne idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$, de longueur $\ell = 2 \text{ m}$ et de vitesse de phase $v_p = 10^8 \text{ m/s}$ est terminée sur une résistance de charge $R_L = 20 \Omega$, et alimentée par un générateur de résistance interne $R_g = 30 \Omega$. Ce générateur délivre un signal sous forme d'impulsions carrées de durée $\Delta = 1 \text{ ns}$ et de tension $V_0 = 1 \text{ V}$.

On demande

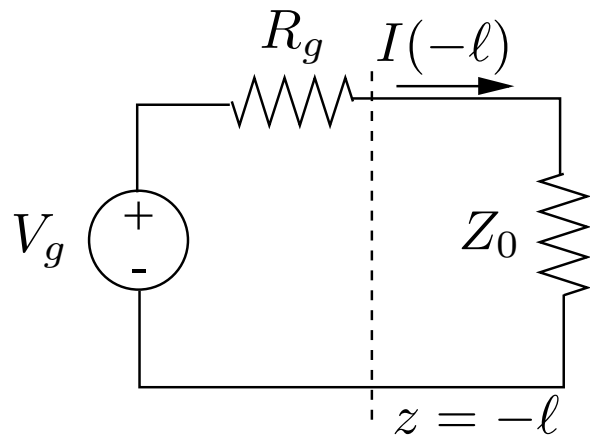
1. de tracer l'allure de la tension et du courant en fonction du temps, au droit de $z = 0$ et $z = -\ell/2$. On se limitera aux deux premières impulsions reçues à ces positions ;
2. de calculer la fraction de l'énergie fournie au générateur qui est dissipée dans la charge R_L .

1. $t = 0$

Une impulsion est émise par le générateur = onde incidente, pas encore d'onde réfléchie.

Conditions aux limites à l'entrée de la ligne : l'impulsion "voit" l'impédance caractéristique Z_0 (réelle !).

La ligne peut être remplacée par son impédance caractéristique Z_0



$$V(-l, 0) = V_+ = V_g \frac{Z_0}{R_g + Z_0} = 0.625 \text{ V}$$
$$I(-l, 0) = I_+ = \frac{V_+}{Z_0} = 12.5 \text{ mA}$$

2. L'onde se propage le long de la ligne : temps nécessaire pour atteindre l'extrémité

$$z = 0 : T = \frac{\ell}{v_p} = 20 \text{ ns}$$

Hypothèse : $\Delta \ll T$: impulsion "quasi" instantanée (pas de superposition d'ondes le long de la ligne, uniquement aux extrémités)

3. $t = T$:

L'impulsion subit une réflexion sur la résistance de charge R_L en $z = 0$.

Conditions aux limites :

$$V_L = R_L I_L = V(0, T) = V_+ + V_-$$

$$I_L = I(0, T) = I_+ + I_- = \frac{V_+}{Z_0} - \frac{V_-}{Z_0}$$

On déduit :

$$V_- = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} V_+ = \rho_L V_+ = -0.429 V_+ = -0.268 \text{ V}$$

$$I_- = -\frac{V_-}{Z_0} = -\rho_L I_+ = 5.36 \text{ mA}$$

L'onde V_+ est réfléchiée avec le coefficient de réflexion ρ_L

4. $T < t < 2T$:

L'onde V_- se propage vers le générateur.

5. $t = 2T$:

L'onde V_- subit une réflexion sur le générateur avec un coefficient

$$\rho_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = -0.25$$

$$V_{+2} = \rho_g V_- = \rho_L \rho_g V_+ = 0.067 \text{ V} \quad I_{+2} = -\rho_g I_- = \rho_L \rho_g I_+ = 1.34 \text{ mA}$$

6. $2T < t < 3T$:

L'onde V_{+2} se propage vers la charge.

7. $t = 3T$:

L'onde V_{+2} subit une réflexion sur la charge avec le coefficient ρ_L

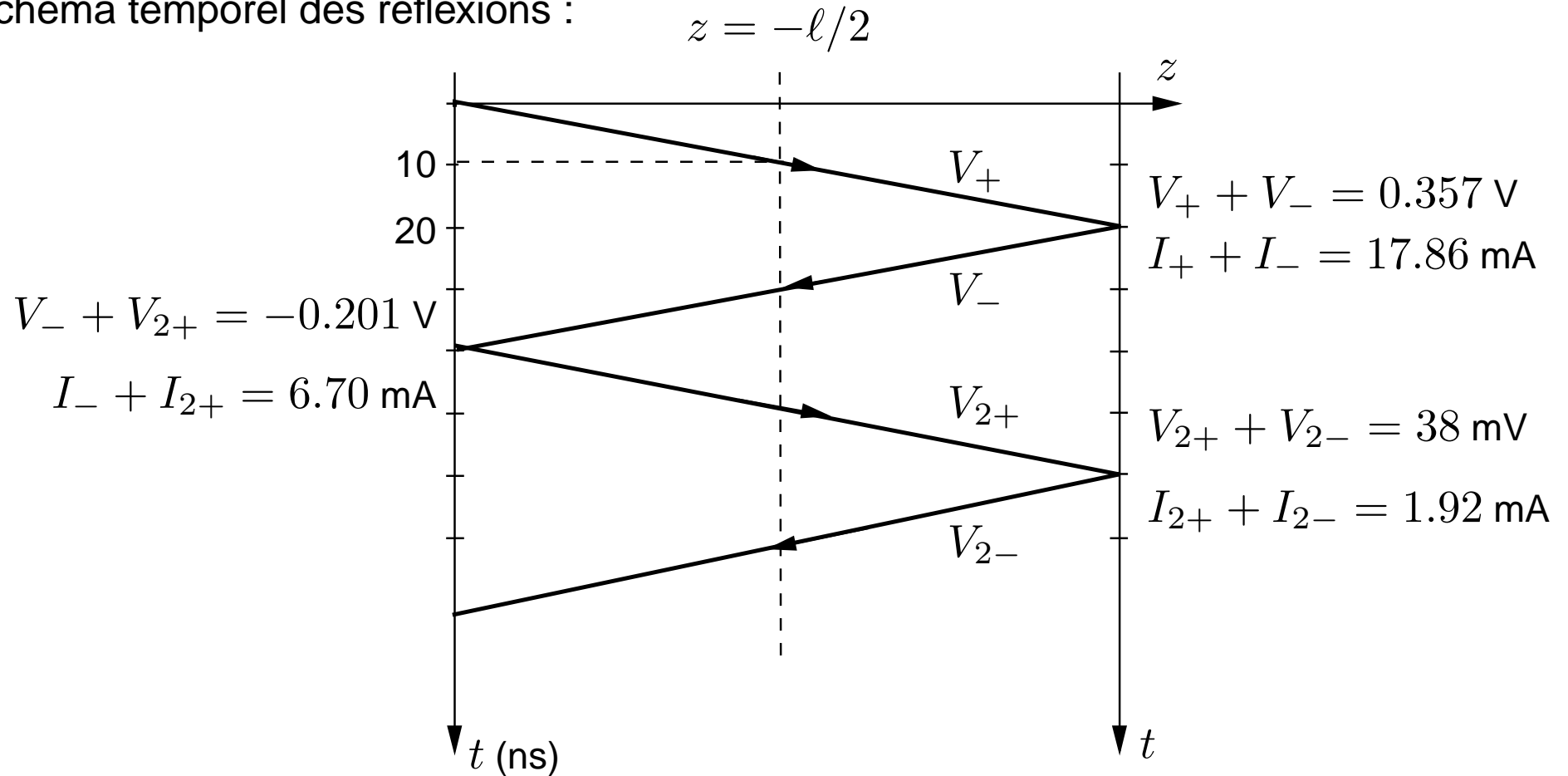
$$V_{-2} = \rho_L V_{+2} = \rho_L^2 \rho_g V_+ = -0.029 \text{ V}, \quad I_{-2} = -\rho_L I_{+2} = -\rho_L^2 \rho_g I_+ = 0.58 \text{ mA}$$

8. $3T < t < 4T$:

L'onde V_{-2} se propage vers le générateur.

Le processus de réflexions successives se poursuit indéfiniment.

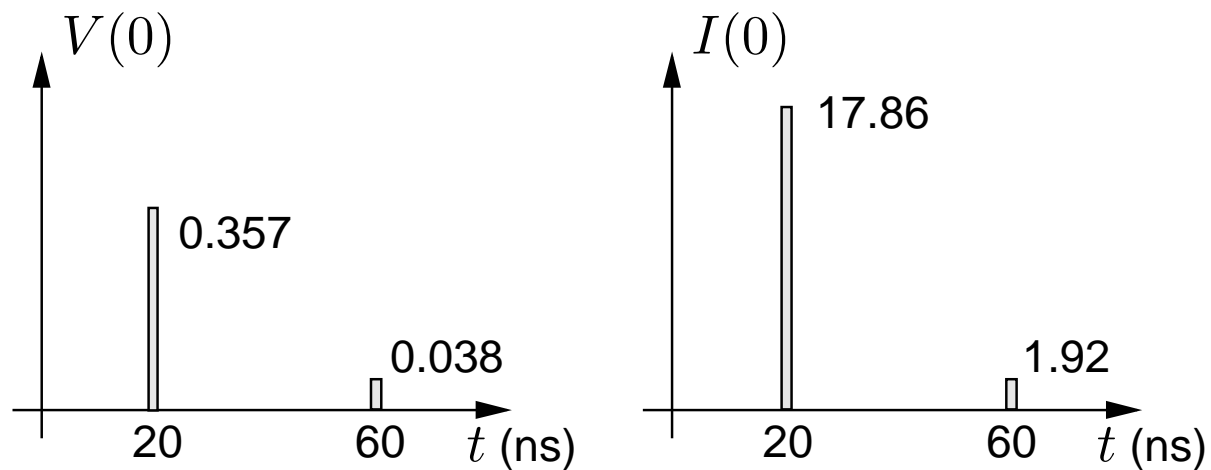
Schéma temporel des réflexions :



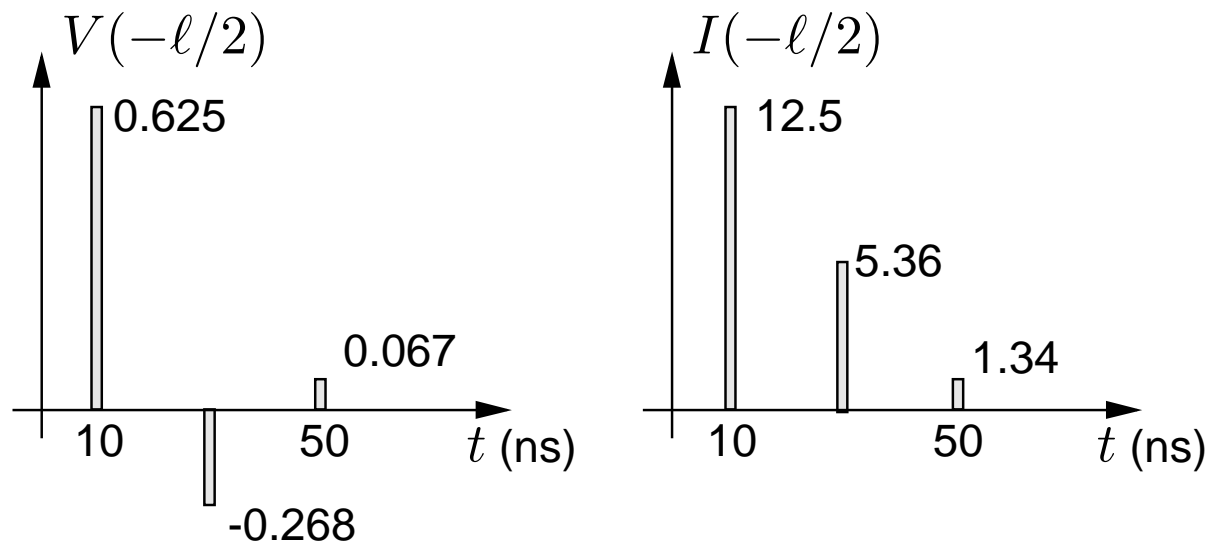
On vérifie : ($t > \Delta$)

$$V(-\ell, t) + R_g I(-\ell, t) = 0 \quad V(0, t) = R_L I(0, t)$$

- Tension et courant à la charge ($z = 0$)



- Tension et courant à la moitié de la ligne ($z = -\ell/2$)



Energie dissipée

- Energie fournie par le générateur (1ère impulsion) : $E = V_g I_+ \Delta$

- Energie transportée par la 1ère impulsion incidente dans la ligne :

$$E_+ = V_+ I_+ \Delta = E \frac{Z_0}{Z_0 + R_g}$$

La différence $E - E_+$ est consommée par la résistance R_g : $E - E_+ = R_g I_+^2 \Delta$

- A la première réflexion à la charge :

- la fraction $E_- = -V_- I_- \Delta = \rho_L^2 E_+$ est réfléchiée dans la ligne vers le générateur

- la fraction $E_+(1 - \rho_L^2) = V(0)I(0)\Delta$ est dissipée dans la charge R_L

- A la première réflexion au générateur :

- la fraction $E_{+2} = V_{+2} I_{+2} \Delta = \rho_L^2 \rho_g^2 E_+$ est réfléchiée dans la ligne vers la charge

- la fraction $E_-(1 - \rho_g^2)$ est dissipée dans la charge R_g

Diagramme des réflexions

temps t	E dissipée dans R_g		E dissipée dans R_L
0	$E \frac{R_g}{Z_0 + R_g}$		
$0 < t < T$		$\rightarrow E_+$	
T			$(1 - \rho_L^2)E_+$
$T < t < 2T$		$\leftarrow \rho_L^2 E_+$	
$2T$	$(1 - \rho_g^2)\rho_L^2 E_+$		
$2T < t < 3T$		$\rightarrow \rho_L^2 \rho_g^2 E_+$	
$3T$			$(1 - \rho_L^2)\rho_L^2 \rho_g^2 E_+$
$3T < t < 4T$		$\leftarrow \rho_L^4 \rho_g^2 E_+$	
$4T$	$(1 - \rho_g^2)\rho_L^4 \rho_g^2 E_+$		
$4T < t < 5T$		$\rightarrow \rho_L^4 \rho_g^4 E_+$	
$5T$			$(1 - \rho_L^2)\rho_L^4 \rho_g^4 E_+$
...			

- Energie totale dissipée dans R_L

$$E_L = (1 - \rho_L^2)(1 + \rho_L^2 \rho_g^2 + \rho_L^4 \rho_g^4 + \dots) E_+ = \frac{1 - \rho_L^2}{1 - \rho_L^2 \rho_G^2} \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} E$$

- fraction de l'énergie fournie par le générateur et consommée dans R_L :

$$\frac{E_L}{E} = \frac{1 - \rho_L^2}{1 - \rho_L^2 \rho_G^2} \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} = 51.5 \%$$

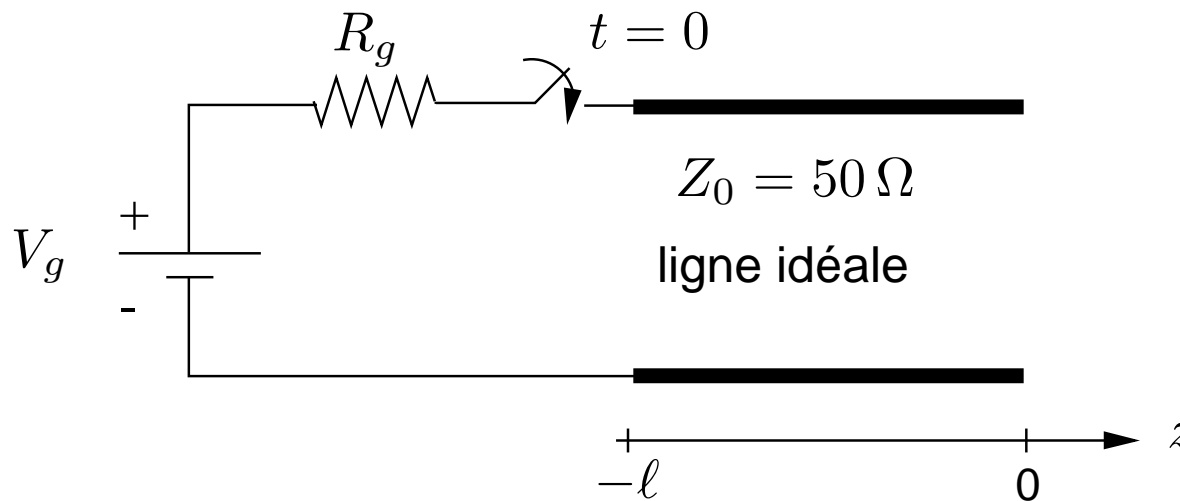
- Remarque : si la ligne était adaptée ($R_L = Z_0$), il n'y aurait aucune réflexion ($\rho_L = 0$); l'énergie dissipée dans R_L est donnée par E_+ :

$$\frac{E_L}{E} = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} = 62.5 \%$$

Exercice 7.2 - Propagation d'un échelon de tension dans une ligne idéale

Une ligne idéale a pour paramètres $Z_0 = 50 \Omega$, $\ell = 2 \text{ m}$ et $v_p = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Elle est terminée sur une résistance de charge $R_L = Z_0/2$, et alimentée par un générateur de résistance interne $R_g = Z_0/2$. Ce générateur délivre un signal échelon d'amplitude $V_0 = 1 \text{ V}$.



Esquissez l'allure de la tension en $z = -\ell$ en fonction du temps durant les 50 premières millisecondes après l'établissement de l'échelon de tension.

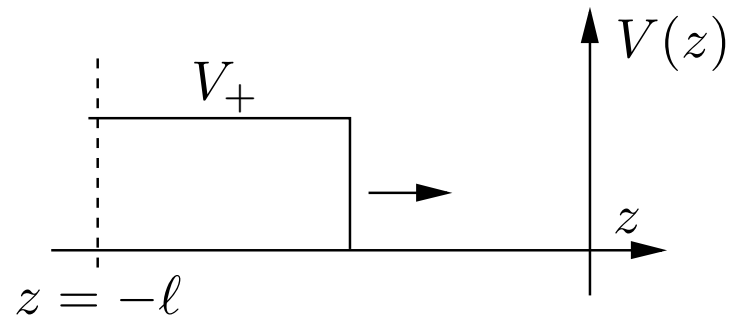
- Même schéma de résolution qu'à l'exercice 7.1 (circuit résistif)
- Coefficients de réflexion à la charge et au générateur

$$\rho_L = \rho_g = \rho = -\frac{1}{3} \quad \text{puisque } R_L = R_g = \frac{Z_0}{2}$$

1. Propagation de l'échelon le long de la ligne à la vitesse v_p

Onde incidente :

$$V_+ = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} V_0 = \frac{2}{3} V_0$$

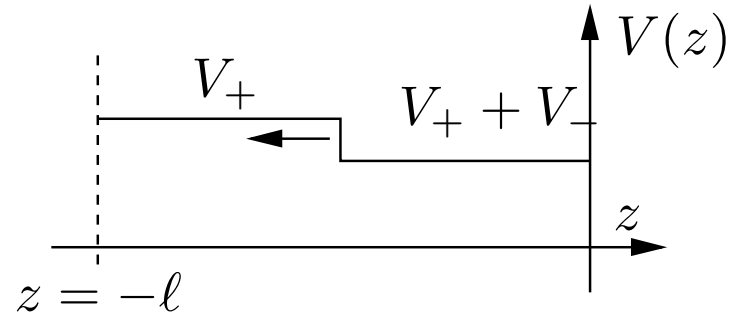


Temps nécessaire pour atteindre la charge : $T = \ell/v_p = 10 \text{ ns}$

2. $t = T$: Réflexion sur la résistance R_L , onde réfléchie se propageant vers le générateur

$$V_- = \rho V_+ = -\frac{1}{3}V_+ = -\frac{2}{9}V_0$$

Principe de superposition : ondes incidente et réfléchie s'additionnent : $T < t < 2T$



3. $t = 2T$: Réflexion sur R_g , onde réfléchie se propageant vers la charge

$$2T < t < 3T$$

$$V_{+2} = \rho V_- = \rho^2 V_+ = \frac{2}{27}V_0$$

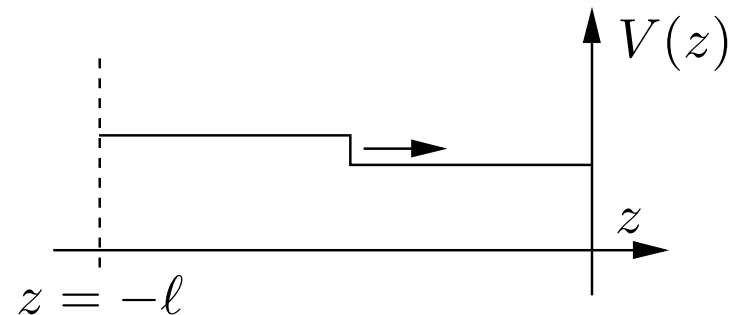
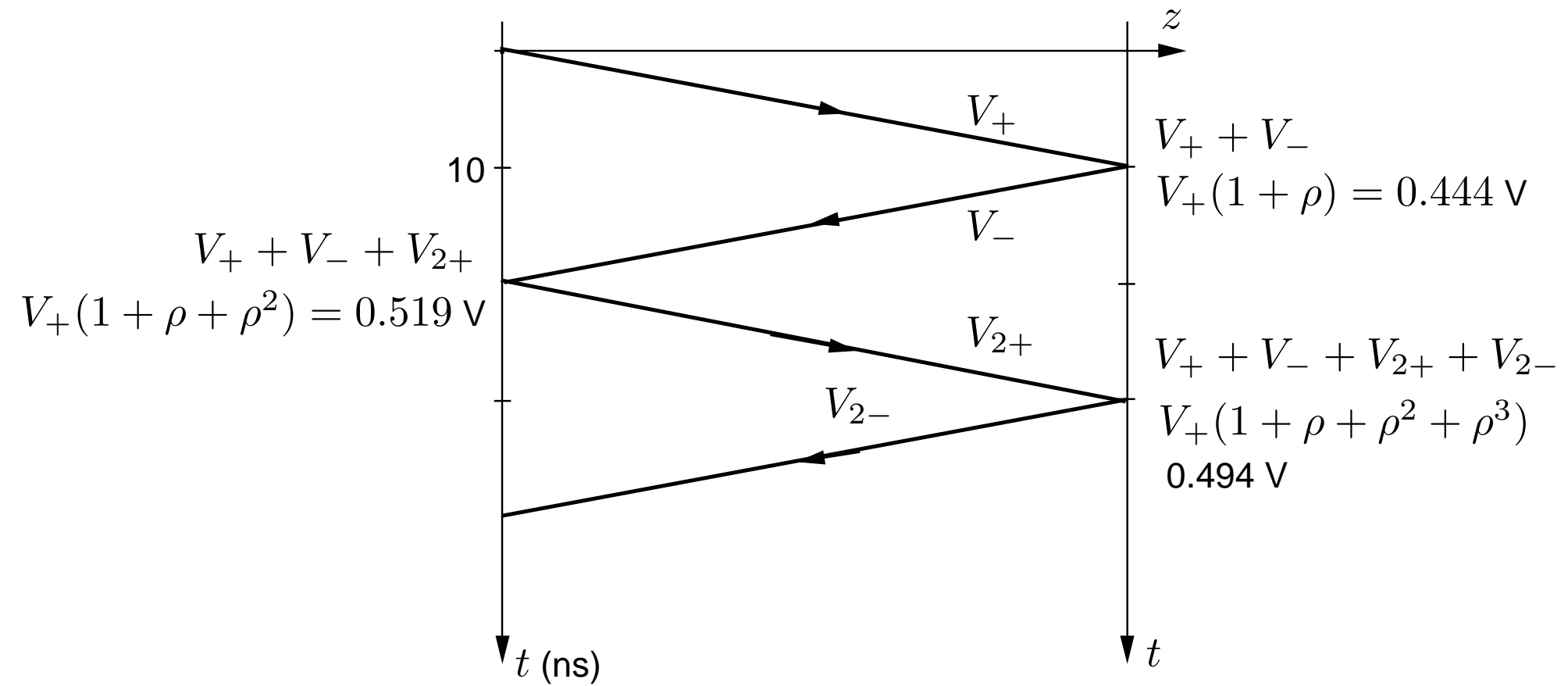
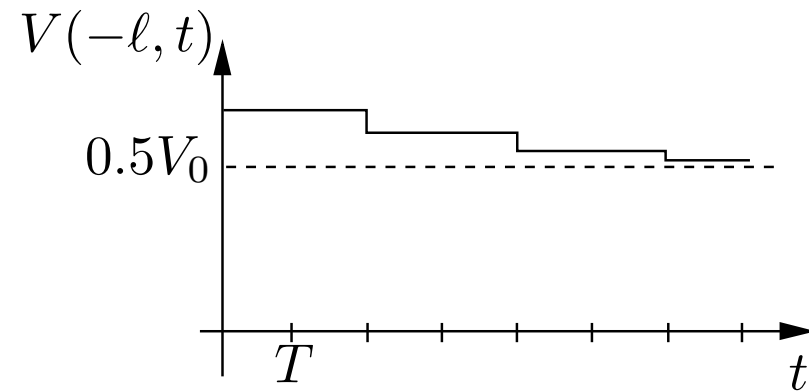
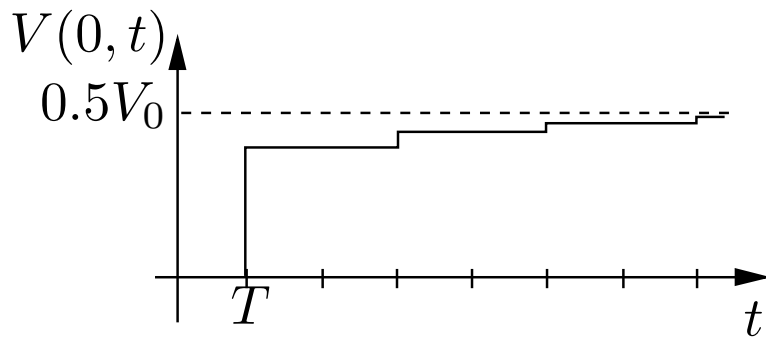


Diagramme des réflexions





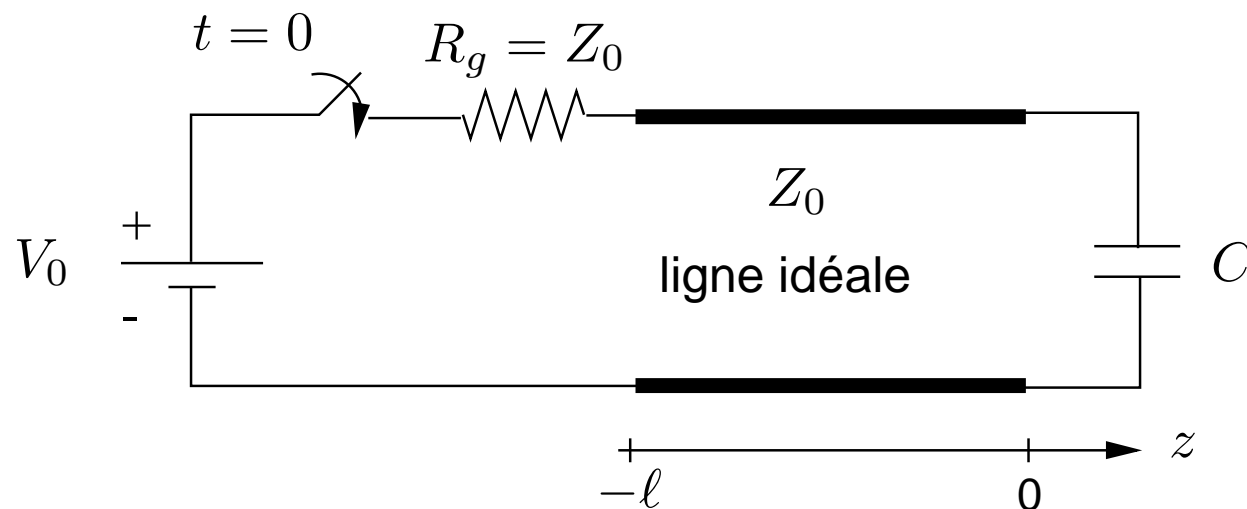
Les tensions convergent finalement vers :

$$\begin{aligned}
 V(0, t \rightarrow \infty) &= \frac{2}{3} V_0 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \dots) \\
 &= \frac{2}{3} \frac{V_0}{1 - \rho} = \frac{1}{2} V_0 \\
 &= V(l, t \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

= résultat circuit localisé, régime continu établi ($\lambda \rightarrow \infty$)

Exercice 7.3 - Charge d'un condensateur en régime transitoire

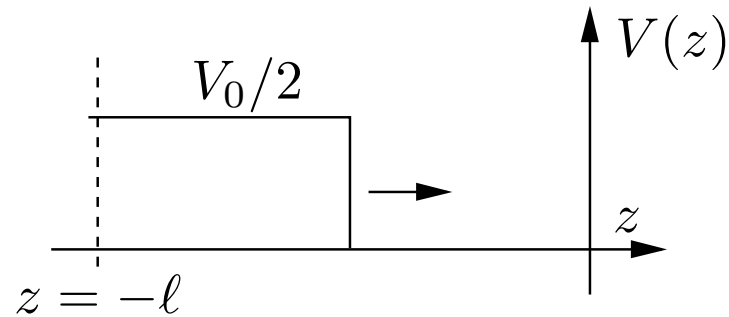
Un générateur alimente un condensateur de capacité C par l'intermédiaire d'une ligne de transmission idéale. En supposant que l'interrupteur est fermé en $t = 0$ et que le condensateur est initialement non chargé, déterminez l'allure de la tension $V(z, t)$ le long de la ligne.



- Charge = condensateur : pas de coefficient de réflexion
 - Ecrire les équations temporelles exprimant les conditions aux limites à l'extrémité de la ligne
1. $t < T$: Propagation de l'échelon le long de la ligne à la vitesse v_p .

Onde incidente :

$$V_+ = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} V_0 = \frac{1}{2} V_0$$



Temps nécessaire pour atteindre la charge : $T = \ell/v_p$

2. $t = T$: réflexion au condensateur. On a

$$\begin{aligned}V_C &= V_+ + V_- \\I_C &= \frac{V_+}{Z_0} - \frac{V_-}{Z_0} \\I_C &= C \frac{dV_C}{dt}\end{aligned}$$

On déduit :

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{Z_0 C} = \frac{V_0}{Z_0 C}$$

La solution est :

$$V_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < T, \text{ C non chargé initialement} \\ V_0(1 - e^{-(t-T)/\tau}) & \text{pour } t > T, \text{ avec } \tau = Z_0 C, \text{ Cte de temps} \end{cases}$$

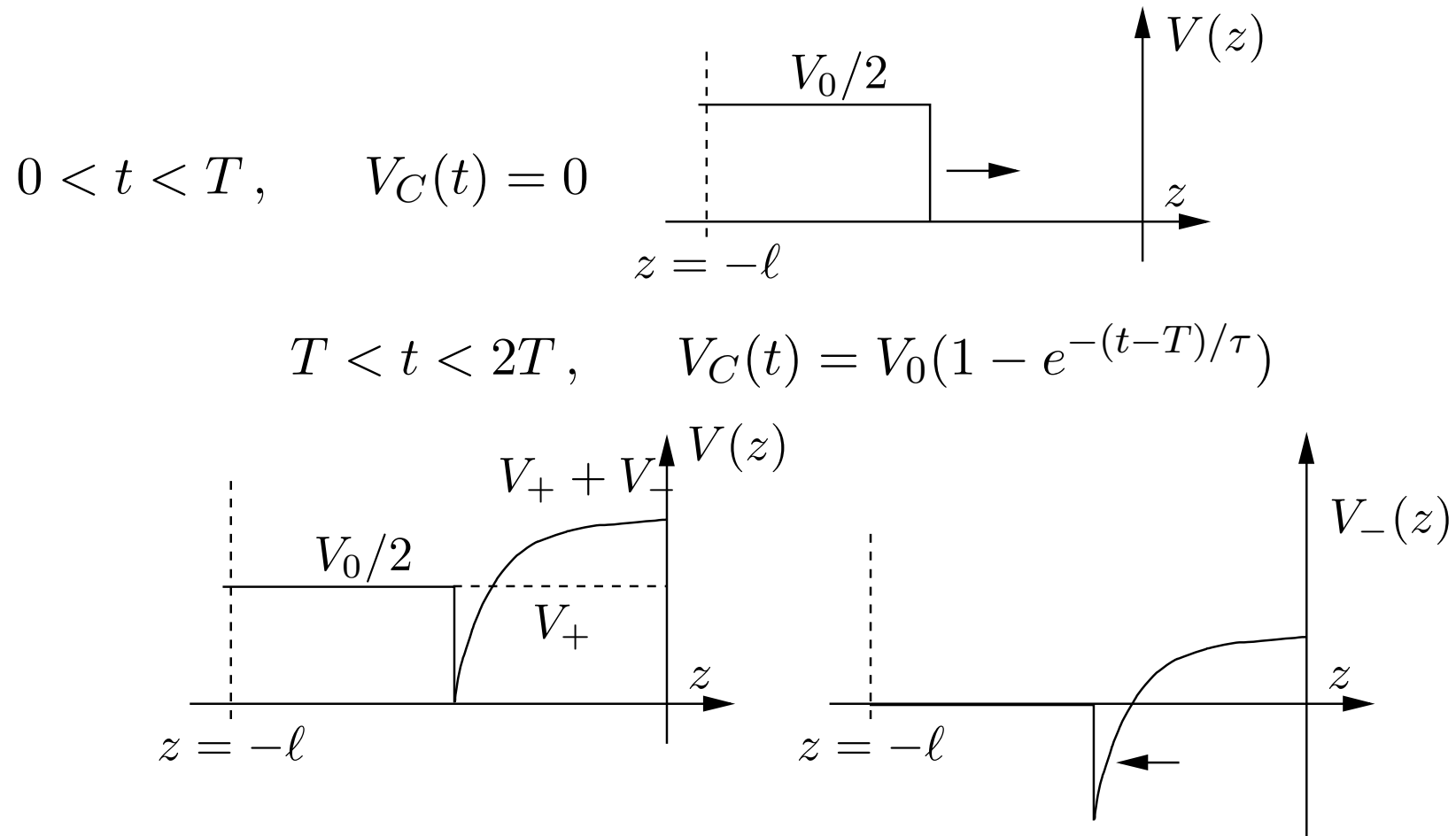
L'onde réfléchie vaut :

$$V_- = V_C - V_+ = \frac{V_0}{2}(1 - 2e^{-(t-T)/\tau}) \quad t > T$$

3. $t > T$: L'onde réfléchiée V_- se propage vers le générateur et s'ajoute à l'onde incidente V_+

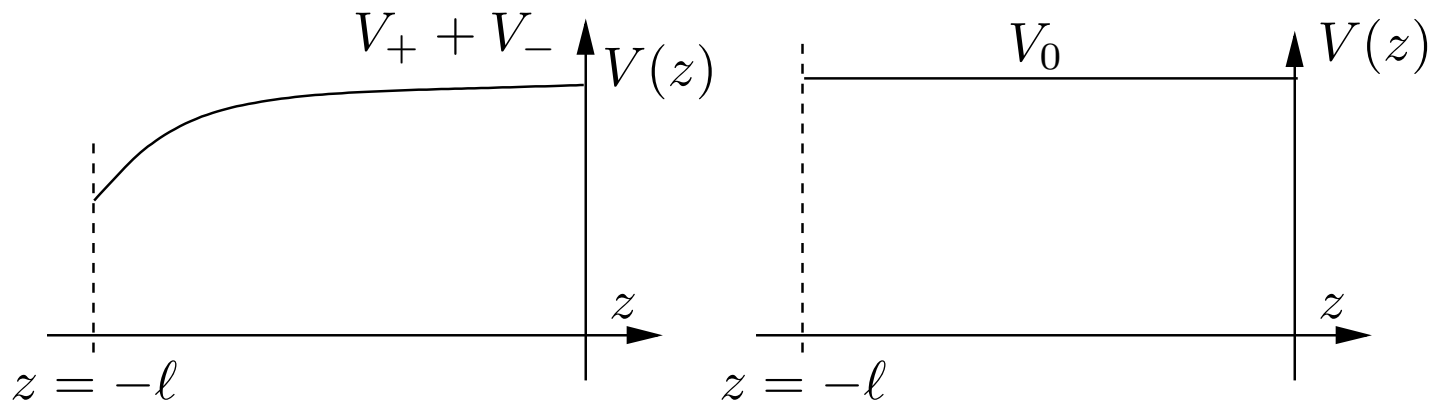
Arrivée au générateur, il y a adaptation ($R_g = Z_0$) et plus aucune réflexion

4. Résumé



$$t > 2T, \quad V_C(t) = V_0(1 - e^{-(t-T)/\tau})$$

$$t \rightarrow \infty$$



Exercices complémentaires

1. Exercice EC. 6.1 :

- ligne alimentée par un générateur de tension continue et laissée ouverte,
- analyse des réflexions aux deux extrémités de la ligne,
- s'inspirer de l'exercice 7.2.

2. Exercice EC. 6.2 :

- analyse de l'influence de la présence d'un défaut résistif présent sur une ligne adaptée à ses deux extrémités,
- considérez la réflexion se produisant au niveau du défaut.