
UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT D'ELECTRICITE, ELECTRONIQUE ET
INFORMATIQUE

ELECTROMAGNETISME

Exercices du cours ELEN0076

septembre 2017

P. Rousseaux
B. Vanderheyden
Institut Montefiore Bât. B28
Sart-Tilman, 4000 Liège.

PARTIE 1

Exercices résolus au cours des travaux dirigés

Table des matières

1	Analyse vectorielle	3
2	Electrostatique	4
3	Magnétostatique	8
4	Champs variables - régime quasi-statique et circuits localisés	11
5	Ondes	14
6	Lignes de transmission en régime harmonique	16
7	Lignes de transmission en régime transitoire	22
1	Electrostatique	25
2	Magnétostatique	37
3	Champs variables - régime quasi-statique et circuits localisés	40
4	Ondes	41
5	Lignes de transmission en régime harmonique	42
6	Lignes de transmission en régime transitoire	52

1 Analyse vectorielle

Exercice 1.1 (Divergence et théorème de la divergence)

Soit le vecteur $\vec{A} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = r \hat{r}$.

1. Calculez l'intégrale

$$I_S = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

sur la surface d'une sphère de rayon R centrée à l'origine.

2. Calculez $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, ainsi que l'intégrale

$$I_V = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$

sur le volume de la même sphère.

3. Interprétez les résultats obtenus aux deux points précédents.

Exercice 1.2 (Rotationnel et théorème de Stokes)

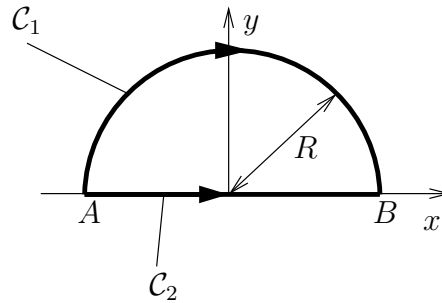


FIGURE 1 – exercice 1.2

Soit le vecteur $\vec{A} = A_0 \hat{x}$ où A_0 est une constante. Calculez les intégrales curvilignes suivantes :

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{\ell},$$

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell},$$

où les chemins \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont représentés à la figure 1.

2 Electrostatique

Exercice 2.1 (Dipôle électrique)

Un dipôle électrique est constitué de deux charges électriques d'amplitudes égales et de signes opposés, distantes de d et placées dans le vide (figure 2).

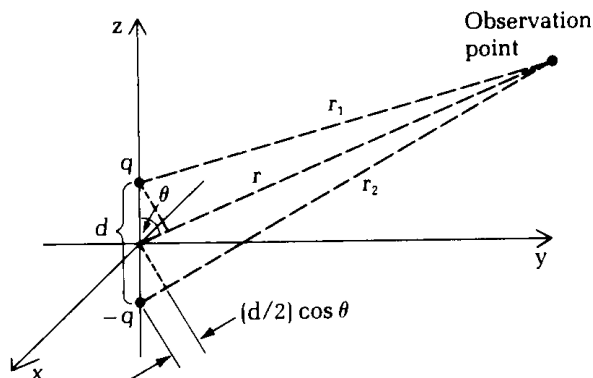


FIGURE 2 – exercice 2.1

1. Déterminez l'expression du potentiel et du champ électrique du système en un point \vec{r} , dans la limite $d \ll |\vec{r}|$.
2. Représentez les lignes de champ.
3. Déterminez l'expression de la densité de charge électrique ρ en tout point de l'espace (différent des 2 charges).

Exercice 2.2 (Distribution linéaire de charges)

On considère un système de charges électriques distribuées uniformément sur une droite indéfinie, avec une densité linéaire ρ_L (unités : C/m). Le système est dans le vide (figure 3).

1. Déterminez l'expression du champ électrique de cette distribution
 - (a) par intégration directe,
 - (b) en utilisant le théorème de Gauss.
2. Déterminez l'expression du potentiel électrique correspondant.

Exercice 2.3 (Capacité du condensateur plan - Equation de Laplace)

On considère un condensateur plan à air dont les plateaux sont séparés d'une distance d . Le potentiel du plateau supérieur vaut V_0 volts, celui du plateau inférieur vaut 0 volt.

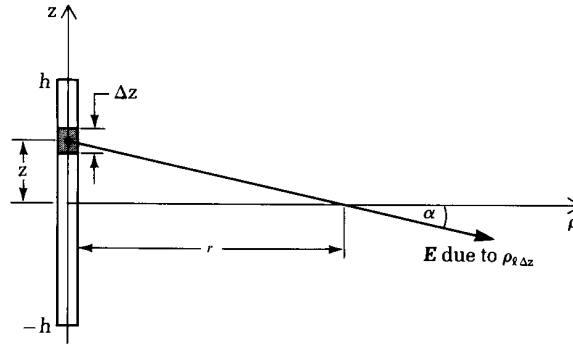


FIGURE 3 – exercice 2.2

1. En partant de l'équation de Laplace, déterminez les expressions du potentiel et du champ électrique entre les deux plateaux. On négligera les effets de bord.
2. Quelle est l'expression de la charge surfacique (en C/m^2) portée par le plateau supérieur ?
3. Déterminez l'expression de la capacité de ce système.

Exercice 2.4 (Capacité d'un câble coaxial)

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs de même axe et de rayons respectifs a et b , avec $b > a$. Les conducteurs sont placés dans le vide.

1. Déterminez l'expression de la capacité unitaire (par unité de longueur) du système.
2. Donnez-en une valeur numérique dans le cas suivant : le rayon extérieur est égal à $b = 0.5 \text{ cm}$, le conducteur intérieur a une section de 1 mm^2 .

Exercice 2.5 (Deux lignes chargées parallèles)

On considère deux lignes uniformément chargées, portant respectivement une densité de charge linéaire ρ_L et $-\rho_L$, placées parallèlement dans le vide à une distance d l'une de l'autre (figure 4).

1. Déterminez l'expression du potentiel électrique du système en tout point de l'espace.
2. Esquissez l'allure des courbes équipotentielles et des lignes de champ électrique.

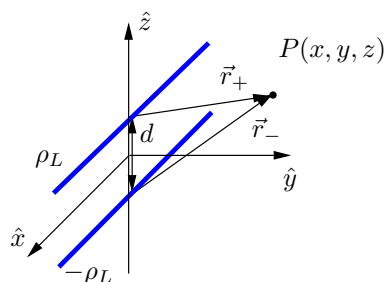


FIGURE 4 – exercice 2.5

Exercice 2.6 (Distribution linéaire de charges au-dessus d'un plan conducteur)

Une ligne uniformément chargée (densité linéaire de charge ρ_L) est placée parallèlement à un plan conducteur d'extension infinie, à une distance h de celui-ci (figure 5).

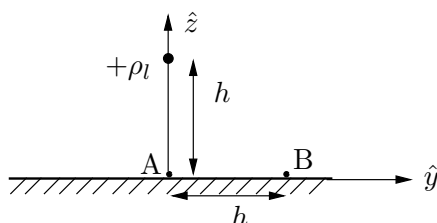


FIGURE 5 – exercice 2.6

1. Déterminez les expressions du potentiel V et du champ électrique \vec{E} au-dessus du plan conducteur.
2. Déterminez la charge électrique induite par unité de surface sur le plan conducteur.
3. A partir du principe de superposition, déterminez les valeurs du champ électrique aux points A et B du plan.

Exercice 2.7 (Ligne à proximité d'un conducteur cylindrique)

On considère une ligne portant une distribution linéaire de charges ρ_L placée dans le vide parallèlement à un conducteur cylindrique plein de rayon a , porté à un potentiel nul (figure 6).

Déterminez l'expression du potentiel électrique du système.

Exercice 2.8 (Capacité unitaire d'une ligne bifilaire)

On considère une ligne bifilaire, constituée de deux conducteurs cylindriques de rayon a placés parallèlement à une distance d l'un de l'autre.

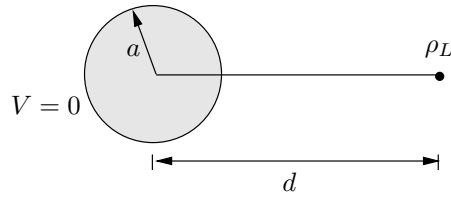


FIGURE 6 – exercice 2.7

En supposant que $d \gg a$, établissez l'expression de la capacité électrique par unité de longueur du système.

Exercice 2.9 (Conducteur cylindrique au-dessus d'un plan conducteur)

On considère un cylindre conducteur placé parallèlement à un plan conducteur. Le cylindre est porté au potentiel V_0 , le plan conducteur est relié à la masse (figure 7). Déterminez la capacité unitaire du système.

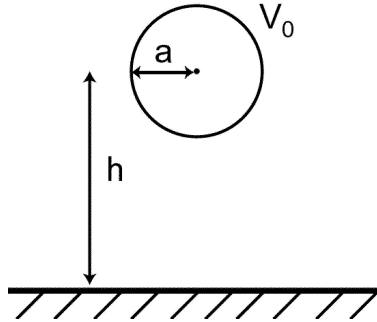


FIGURE 7 – exercice 2.9

Exercice 2.10 (Condensateur plan et matériau diélectrique)

On considère un condensateur plan dont les plateaux ont une surface S et sont séparés d'une distance d . L'espace entre les deux plateaux est rempli par un diélectrique de permittivité ϵ . Le condensateur est soumis à une différence de potentiel de V_0 volts (figure 8).

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \epsilon \\ \rightarrow \\ \vec{E} \end{array} \right| \\ +\sigma \quad -\sigma \end{array} \equiv \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \epsilon_0 \\ \rightarrow \\ \vec{E} \end{array} \right| \\ \sigma + \sigma_{pol,1} \quad -\sigma + \sigma_{pol,2} \end{array}$$

FIGURE 8 – exercice 2.10

1. Déterminez les expressions de la densité de surface des charges libres, σ , de la densité de surface des charges liées, $\sigma_{pol_{1,2}}$, et du champ électrique \vec{E} régnant entre les plateaux.

2. Déduisez-en l'expression de la capacité C du condensateur.
3. Calculez les valeurs numériques de σ , $\sigma_{\text{pol}_{1,2}}$, \vec{E} et C dans les deux cas suivants :
 - (a) $S = 1 \text{ mm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$, $V_0 = 10 \text{ V}$ et $\varepsilon_r = 1$ (air),
 - (b) $S = 1 \text{ mm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$, $V_0 = 10 \text{ V}$ et $\varepsilon_r = 6$ (mica).

Exercice 2.11 (Condensateur plan à deux diélectriques)

On considère un condensateur plan dont la partie isolante est constituée de deux couches diélectriques (figure 9). La première couche est de l'air ($\varepsilon_r = 1$) et a une épaisseur $d_1 = 0.1 \text{ mm}$. La deuxième couche est composée de mica ($\varepsilon_r = 6$) et a une épaisseur $d_2 = 0.9 \text{ mm}$. La surface des plateaux vaut $S = 1 \text{ cm}^2$ et leur séparation vaut $d = 1 \text{ mm}$. Le condensateur est soumis à une différence de potentiel constante, $V_0 = 2.5 \text{ kV}$.

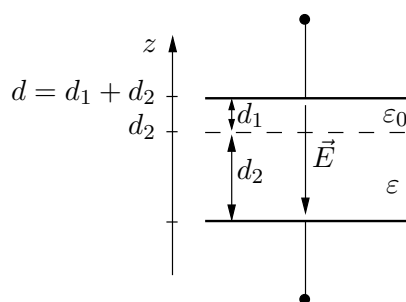


FIGURE 9 – exercice 2.11

1. Déterminez la valeur champ électrique dans chacune des couches de la partie isolante. Le condensateur peut-il “claquer” ? (Champ de rupture de l'air : $E_{\text{rupt}} = 2.7 \text{ MV/m}$, champ de rupture du mica : $E_{\text{rupt}} = 14 \text{ MV/m}$).
2. Déterminez la capacité du condensateur.

3 Magnétostatique

Exercice 3.1 (Champ magnétique produit par une boucle de courant)

On considère une boucle de courant de rayon a parcourue par un courant continu I (figure 10).

Etablissez, par intégration directe, l'expression du champ magnétique produit le long de l'axe de la boucle.

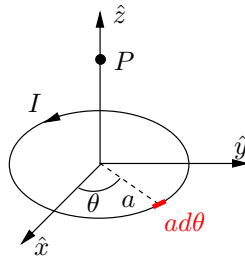


FIGURE 10 – exercice 3.1

Exercice 3.2 (Conducteur rectiligne indéfini)

On considère un conducteur rectiligne infiniment long, parcouru par un courant continu I .

Etablissez l'expression du champ magnétique du système, des deux façons suivantes :

1. en intégrant la relation de Biot-Savart,
2. en utilisant le théorème d'Ampère.

Exercice 3.3 (Champ magnétique produit par un solénoïde à air)

Un solénoïde à air est constitué d'un fil conducteur enroulé en forme de cylindre de rayon a et comporte n tours de fil conducteur par mètre de longueur. La longueur ℓ du solénoïde est supposée beaucoup plus grande que son rayon a (figure 11). Déterminez l'expression de l'induction magnétique créée par ce

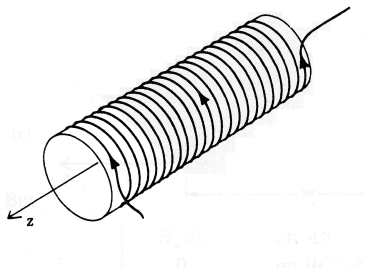


FIGURE 11 – exercice 3.3

solénoïde en tout point intérieur et extérieur éloigné de ses extrémités. On exploitera judicieusement les hypothèses et symétries du problème.

Exercice 3.4 (Conducteur de section circulaire)

On considère un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant continu I . Etablissez l'expression du champ magnétique

1. à l'intérieur du conducteur,
2. à l'extérieur du conducteur.

Exercice 3.5 (Inductance d'un câble coaxial)

On considère un câble coaxial de longueur supposée infinie alimenté par un courant continu I (figure 12). Ses caractéristiques géométriques sont les suivantes :

rayon du conducteur intérieur	: a
rayon intérieur du conducteur extérieur	: b
rayon extérieur du conducteur extérieur	: c
perméabilité du milieu isolant	: μ_0
perméabilité du conducteur	: μ_c

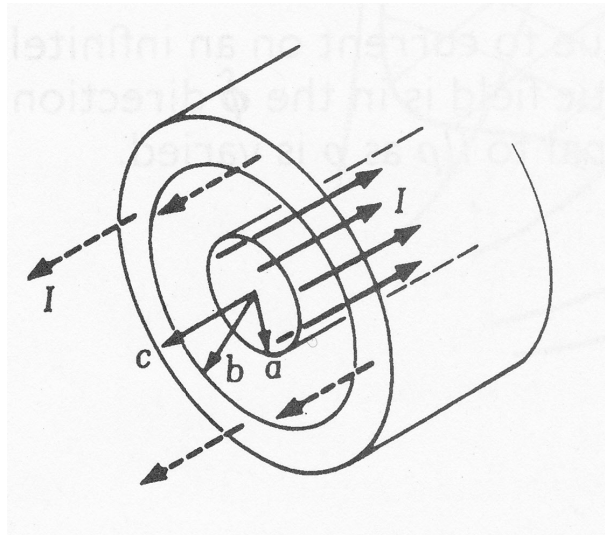


FIGURE 12 – exercice 3.5

Déterminez l'expression du champ magnétique produit dans les différentes régions du câble, ainsi que son inductance unitaire.

Exercice 3.6 (Inductance d'une ligne bifilaire)

On considère une ligne bifilaire, c'est-à-dire une ligne constituée de deux conducteurs cylindriques parallèles de rayon a , séparés d'une distance d et parcourus par des courants continus égaux et opposés (figure 13).

Déterminez l'inductance unitaire de la ligne.

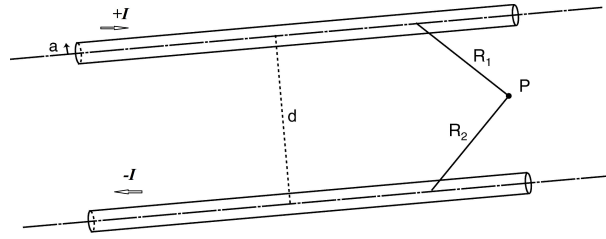


FIGURE 13 – exercice 3.6

4 Champs variables - régime quasi-statique et circuits localisés

Exercice 4.1 (Réacteur chimique à électrodes sphériques)

Un réacteur chimique est constitué de deux électrodes sphériques concentriques de rayons respectifs $a = 1$ cm et $b = 3$ cm. Le réacteur est rempli d'un liquide de permittivité relative $\epsilon_r = 78$ et de conductivité $\sigma = 3$ S/m. En régime, le réacteur est parcouru par un courant continu.

Déterminez la résistance électrique de ce réacteur.

Exercice 4.2 (Condensateur cylindrique et courant de déplacement)

Un condensateur cylindrique, constitué de deux cylindres de rayons respectifs a et b , de longueur ℓ et rempli d'un matériau diélectrique de permittivité relative ϵ_r , est alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude de crête V_0 .

1. Déterminez l'expression du courant de déplacement à travers toute surface cylindrique de rayon $a < r < b$.
2. Montrez que le résultat est indépendant du choix du rayon r .
3. Montrez que ce courant est égal au courant de conduction existant dans le fil conducteur alimentant le condensateur.

On suppose être en régime de fonctionnement quasi-statique.

Exercice 4.3 (Blindage électrique)

Un écran métallique est placé entre les deux plateaux d'un condensateur à air, comme illustré à la figure 14.

Le système est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale (amplitude de tension V_0 , fréquence f). Au moment du montage et avant la mise en service du générateur, l'écran est non-chargé. La surface des plateaux est égale à S .

Déterminez :

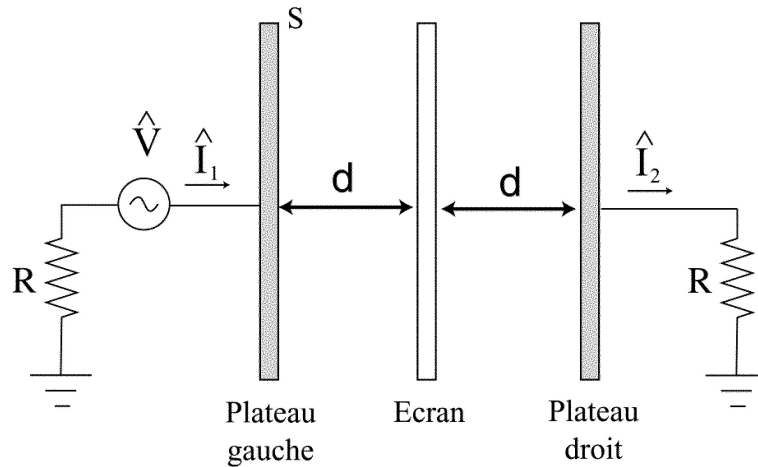


FIGURE 14 – exercice 4.3

1. les courants \hat{I}_1 et \hat{I}_2 ,
2. l'allure des lignes de champ électrique,
3. la distribution des charges sur l'écran,

dans chacun des deux cas suivants :

1. l'écran est à un potentiel flottant (il est isolé galvaniquement des autres éléments du système),
2. l'écran est relié à la masse.

Exercice 4.4 (Condensateur avec pertes)

Déterminez la conductance d'un condensateur plan au mica aux fréquences $f_1 = 50$ Hz et $f_2 = 1$ GHz. Les caractéristiques du condensateur sont les suivantes :

Surface des plateaux	: $S = 10 \text{ cm}^2$
Séparation des plateaux	: $d = 0.1 \text{ cm}$
Conductivité du mica	: $\sigma = 10^{-15} \text{ S/m}$
Propriétés diélectriques à $f = 50$ Hz	: $\varepsilon' = 6 \varepsilon_0$ et pertes diélectriques négligeables
Propriétés diélectriques à $f = 1$ GHz	: $\varepsilon' = 6 \varepsilon_0$ et $\varepsilon''_{tot} = 1.6 \cdot 10^{-3} \varepsilon_0$.

Exercice 4.5 (Force électromotrice parasite induite par une ligne bifilaire)

Deux lignes de transmission bifilaires (conducteurs de rayon a séparés d'une distance $d \gg a$) sont placées dans les configurations illustrées à la figure 15. Dans le cas où la ligne 1 est seule alimentée et parcourue par un courant alternatif d'amplitude maximale $I = 5$ A et de fréquence $f = 6$ kHz.

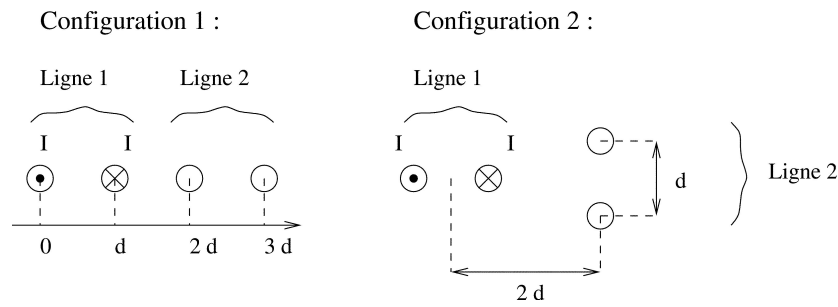


FIGURE 15 – exercice 3.1

1. Tracez les lignes de l'induction magnétique générée par la ligne 1.
2. Pour la configuration 1, calculez l'amplitude de la force électromotrice induite par la ligne 1 sur une unité de longueur de la ligne 2.
3. Pour la configuration 2, déterminez par un argument de symétrie si la force électromotrice induite dans la ligne 2 est supérieure, égale, ou inférieure au résultat du point 2.

Exercice 4.6 (Pertes d'un bobinage : variation en fonction de la fréquence)

On considère un bobinage à noyau ferromagnétique. Comment varient les pertes suivantes en fonction de la fréquence ?

1. Les pertes par hystérésis.
2. Les pertes dues aux courants de Foucault.

Dans chaque cas, on exprimera la puissance dissipée P sous la forme $P \propto f^n$, où n est la puissance algébrique correspondante.

5 Ondes

Exercice 5.1 (Puissance solaire reçue par Mercure)

La puissance du rayonnement solaire frappant la surface de Mercure vaut approximativement $S = 0.87 \text{ W/cm}^2$.

1. En supposant que les ondes électromagnétiques sont émises par le soleil de façon isotrope, estimez la puissance totale rayonnée par le soleil.
2. En assimilant le rayonnement à la surface de mercure à une onde plane, estimez la valeur efficace du champ électrique produit par ce rayonnement.

Donnée : distance Mercure - Soleil, $d = 60 \text{ Gm}$.

Exercice 5.2 (Absorption d'une onde plane par une plaque de cuivre)

Une onde plane de fréquence $f = 1 \text{ GHz}$ se propage dans l'air et frappe une plaque de cuivre, à incidence normale (figure 16).

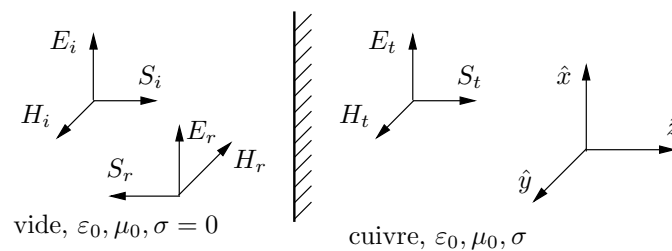


FIGURE 16 – exercice 5.2

Sachant que la valeur de crête du champ électrique de l'onde incidente vaut $E_0 = 1 \text{ V/m}$ et que la conductivité électrique du cuivre vaut $\sigma = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, déterminez la valeur moyenne de la puissance absorbée par unité de surface par le cuivre.

Exercice 5.3 (Théorème de Poynting appliqué à un bloc conducteur)

On considère un bloc de cuivre semi-infini s'étendant dans l'espace $z > 0$, comme illustré à la figure 17, et une onde plane incidente venant frapper le bloc à incidence normale (figure 17).

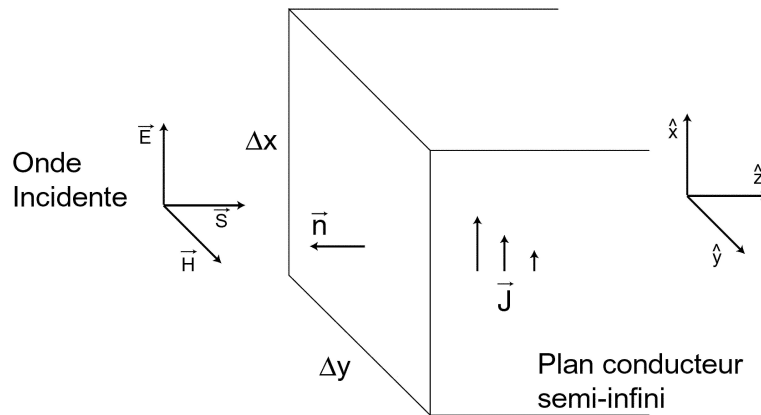


FIGURE 17 – exercice 5.3

Etablissez l'expression de la puissance dissipée dans le bloc de cuivre à partir du vecteur de Poynting de l'onde transmise dans le bloc. Exprimez ensuite cette puissance en fonction de l'amplitude du champ magnétique à la surface du bloc et vérifiez que le résultat obtenu est identique à celui établi au cours par intégration directe de la puissance dissipée par effet Joule.

6 Lignes de transmission en régime harmonique

Exercice 6.1 (Paramètres unitaires d'une ligne téléphonique)

Une ligne téléphonique de type bifilaire, représentée à la figure 18, est constituée de deux conducteurs cylindriques de rayon $a = 0.2$ mm placés parallèlement l'un à l'autre à une distance $d = 0.6$ mm. Les fils sont isolés électriquement par un plastique ($\epsilon_r = 2$). Les fils sont en cuivre ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$).

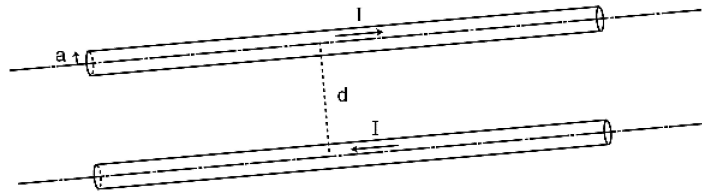


FIGURE 18 – exercice 6.1

A la fréquence de travail $f = 1$ kHz, on a mesuré les quatre paramètres unitaires suivants : $R = 100$ Ω /km, $C = 0.051$ μ F/km, $L = 0.6$ mH/km et $G \approx 0$ S/m.

1. Cette ligne travaille-t-elle en régime de haute ou de basse fréquence ?
2. Travaille-t-elle en régime de faibles pertes ?
3. Déterminez l'impédance caractéristique, l'atténuation linéaire et la vitesse de phase.

Exercice 6.2 (Paramètres unitaires d'une ligne microbande)

La ligne microbande (*microstrip* en anglais) de la figure 19 est constituée d'un substrat isolant et diélectrique, métallisé sur ses deux faces avec de l'aluminium. La face supérieure véhicule un courant allant du générateur à la charge, le retour s'effectuant par la face inférieure.

Déterminez les quatre paramètres unitaires C , L , R et G , l'impédance caractéristique Z_0 et le coefficient d'atténuation de cette ligne.

Données :

Fréquence de travail : $f = 18$ GHz.

Aluminium : $\sigma = 3.72 \cdot 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$.

Diélectrique : SiO_2 , σ et pertes diélectriques négligeables, $\epsilon_r = 3.8$ et $\mu_r = 1$.

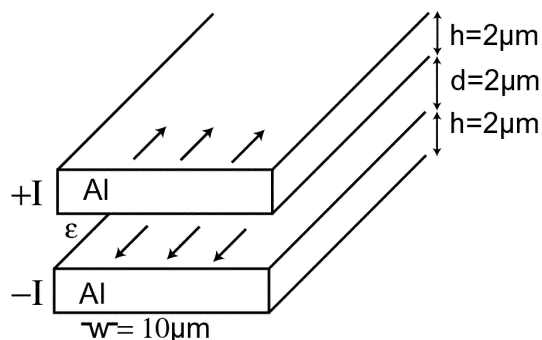


FIGURE 19 – exercice 6.2

Exercice 6.3 (Paramètres unitaires d'un câble coaxial)

Un câble coaxial, représenté à la figure 20, présente les paramètres suivants :

Paramètres géométriques : $a = 1 \text{ mm}$, $b = 1 \text{ cm}$ et $d = 1 \text{ mm}$.

Conducteurs : cuivre, $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$.

Diélectrique : polystyrène, $\sigma = 10^{-16} \text{ S/m}$, $\mu = \mu_0$, et $\varepsilon' = 2.5\varepsilon_0$,

$\varepsilon''_{pol}/\varepsilon' = 10^{-5}$ à $f = 1 \text{ kHz}$; $\varepsilon''_{pol}/\varepsilon' = 2 \cdot 10^{-4}$ à $f = 1 \text{ GHz}$

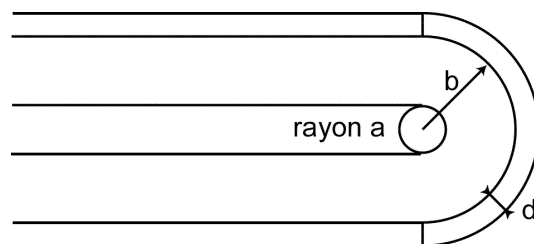


FIGURE 20 – exercice 6.3

On demande de déterminer les paramètres unitaires C , L , R et G , l'impédance caractéristique Z_0 et le coefficient d'atténuation de ce câble, aux deux fréquences $f = 1 \text{ kHz}$ et $f = 1 \text{ GHz}$.

Interprétez les différences observées.

Exercice 6.4 (Allure de l'amplitude de tension le long d'une ligne)

Une ligne de transmission idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 75 \Omega$ et de longueur $\ell = 0.6\lambda$ est terminée sur une charge d'impédance $Z_L = 100 + j150 \Omega$.

1. Déterminez le taux d'ondes stationnaires S et la position des maxima et minima de la tension le long de la ligne.
2. Esquissez l'allure de $|\hat{V}(z)|$.

3. Déterminez l'impédance vue au droit de l'emplacement $z = -0.4\lambda$, l'impédance d'entrée de la ligne ainsi que les impédances Z_{\min} et Z_{\max} vues au droit des minima et maxima de tension.

Exercice 6.5 (Mesure d'une impédance en hautes fréquences)

Une ligne idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$ alimente une impédance de charge Z_L , que l'on cherche à déterminer. La mesure de la tension le long de la ligne fournit un taux d'ondes stationnaires $S = 3$. Le premier minimum de tension est également localisé à une distance $z_{\min} = 0.33 \lambda$ de la charge. Déterminez la valeur de l'impédance de charge Z_L .

Exercice 6.6 (Ligne idéale quart d'onde)

On considère un tronçon de ligne idéale d'impédance caractéristique Z_0 et d'une longueur ℓ égale au quart de la longueur d'onde du signal transmis. Pour chacune des situations suivantes :

1. ligne laissée ouverte à son extrémité ;
2. ligne court-circuitée ;
3. ligne terminée sur une résistance de charge $R_1 < Z_0$;
4. ligne terminée sur une résistance de charge $R_2 > Z_0$;

déterminez :

- le coefficient de réflexion et le taux d'ondes stationnaires ;
- l'expression et l'allure du module de la tension et du courant le long de la ligne ;
- l'impédance vue de l'entrée de la ligne.

Exercice 6.7 (Adaptation par tronçon de ligne quart d'onde)

Une ligne de longueur $\ell_1 = 10$ m et d'impédance caractéristique $Z_{01} = 300 \Omega$ doit être connectée à une deuxième ligne, d'impédance caractéristique $Z_{02} = 150 \Omega$, de longueur $\ell_2 = 20$ m, et terminée sur une charge $Z_L = 150 \Omega$.

Les lignes sont constituées de câbles coaxiaux remplis avec un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 2.25$ et sont considérées sans perte. La fréquence de travail est $f = 50$ MHz.

1. Si les deux lignes sont connectées directement (figure 21), déterminez le taux d'ondes stationnaires dans le tronçon de longueur ℓ_1 .

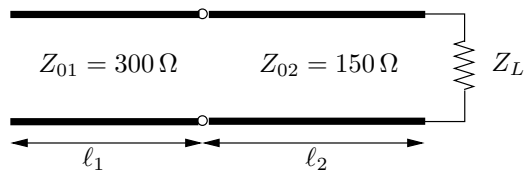


FIGURE 21 – exercice 6.7

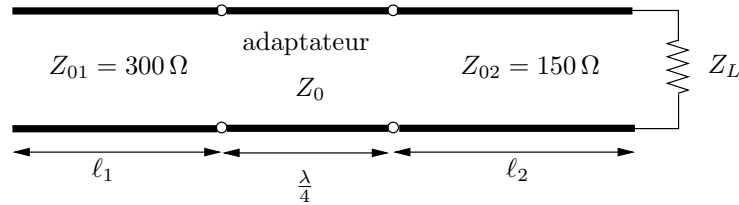


FIGURE 22 – exercice 6.7

2. On souhaite à présent connecter les deux lignes par l'intermédiaire d'un *adaptateur quart d'onde*, constitué d'un câble coaxial rempli avec le même diélectrique (figure 22).
 - (a) Déterminez la longueur ℓ et l'impédance caractéristique Z_0 du tronçon intermédiaire permettant de réaliser l'adaptation à la première ligne.
 - (b) Déterminez le coefficient de réflexion au droit de l'entrée de la deuxième ligne (impédance caractéristique Z_{02}) et au droit de l'entrée de l'adaptateur. En déduire le taux d'ondes stationnaires dans le tronçon de longueur ℓ_1 et celui dans l'adaptateur.

Exercice 6.8 (Adaptation d'un réseau d'antennes par ajout d'un "stub")

Un réseau d'antennes est constitué de la mise en parallèle d'un ensemble de 10 antennes identiques, chacune alimentée par une ligne idéale comme indiqué à la figure 23. Chaque antenne est adaptée à sa ligne d'alimentation de sorte que l'impédance caractéristique de chaque ligne d'alimentation Z_0 est égale à l'impédance de l'antenne $Z_L = 50 \Omega$. On désire réaliser l'adaptation de ce réseau d'antennes à sa ligne d'alimentation principale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$. A cette fin, on place en parallèle sur la ligne d'alimentation principale, à une distance ℓ_1 du réseau d'antennes, un stub en court-circuit de même impédance caractéristique Z_0 et de longueur ℓ_2 .

Déterminez les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2 qui réalisent l'adaptation. Pour ces valeurs, que vaut le taux d'ondes stationnaires (i) dans la ligne au droit du réseau d'antennes, (ii) dans le stub au droit du court-circuit ?

Données :

Fréquence de travail : $f = 1 \text{ GHz}$.

Constantes caractéristiques des lignes : $\varepsilon_r = 2.3$ et $\mu_r = 1$.

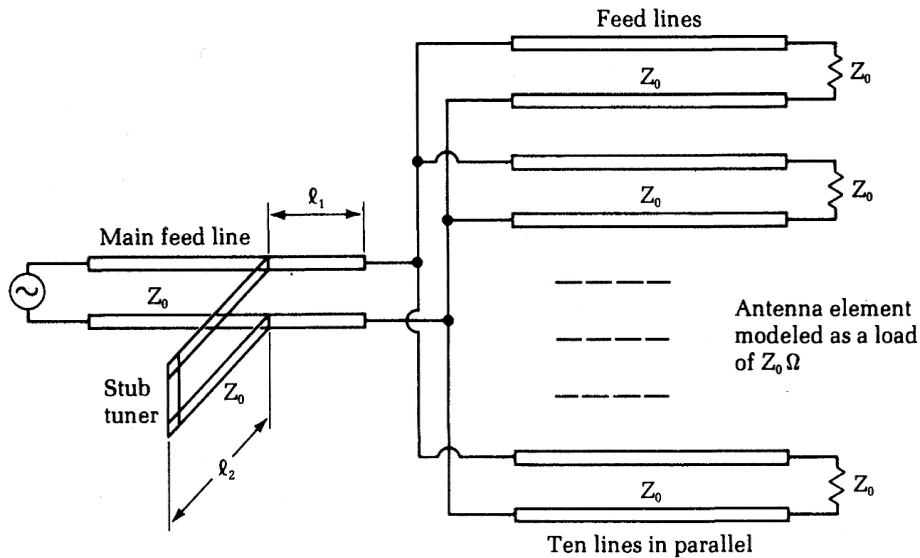


FIGURE 23 – exercice 6.8

Exercice 6.9 (Bilan de puissance dans une ligne quart d'onde)

Un générateur de tension efficace $V_g = 15 \text{ V}$ et d'impédance interne $Z_g = 75 \Omega$ alimente une charge d'impédance $Z_L = 60 \Omega$ par l'intermédiaire d'une ligne de transmission idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 75 \Omega$ et de longueur $\ell = \lambda/4$ (figure 24).

1. Que vaut l'impédance d'entrée $Z_{\text{in}}(-\ell)$?
2. Que vaut la puissance délivrée à la ligne ?
3. Quelle est la tension développée aux bornes de la charge, en $z = 0$?
4. Quelle est la puissance dissipée par la charge ?
5. Esquissez l'allure de $|\hat{V}(z)|$ pour $-\ell < z < 0$.

Exercice 6.10 (Propagation d'un mode TEM dans un câble coaxial)

Un câble coaxial est caractérisé par les paramètres suivants :

rayon intérieur	: $a = 1.2 \text{ mm}$
rayon extérieur	: $b = 3.25 \text{ mm}$
épaisseur du conducteur extérieur	: $d = 2 \text{ mm}$
propriétés diélectriques à $f = 100 \text{ MHz}$: $\varepsilon_r' = 1.3$ et $\varepsilon_r'' \approx 0$
conducteurs considérés parfaits.	

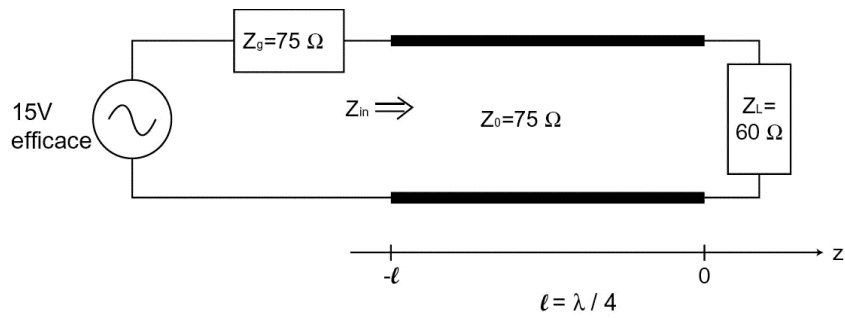


FIGURE 24 – exercice 6.9

Le câble est alimenté par un signal sinusoïdal d'amplitude de crête $V_0 = 500 \text{ V}$ et de fréquence $f = 100 \text{ MHz}$. Ce signal se propage sous la forme d'un mode TEM, onde progressive uniquement (pas de réflexion au bout de la ligne).

1. Esquisser l'allure des lignes de champ de \vec{E} et \vec{H} dans une section transverse du câble.
2. Déterminer les expressions des phaseurs des champs $\hat{\vec{E}}$ et $\hat{\vec{H}}$ en fonction de V_0 et des paramètres du câble. Travailler en coordonnées cylindriques.
3. Déterminer l'expression et la valeur numérique de la puissance moyenne transportée par le signal, (i), en utilisant le vecteur de Poynting, (ii), en utilisant la théorie des lignes de transmission (pour rappel, $Z_0 = (\eta/2\pi)\ln[b/a]$).

7 Lignes de transmission en régime transitoire

Exercice 7.1 (Propagation d'une impulsion carrée dans une ligne idéale)

Une ligne idéale d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$, de longueur $\ell = 2$ m et de vitesse de phase $v_p = 10^8$ m/s est terminée sur une résistance de charge $R_L = 20 \Omega$, et est alimentée par un générateur de résistance interne $R_g = 30 \Omega$. Ce générateur délivre un signal sous forme d'impulsions carrées de durée $\Delta = 1$ ns et de tension $V_0 = 1$ V, comme illustré à la figure 25.

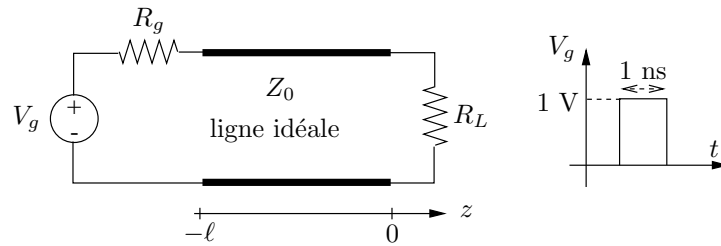


FIGURE 25 – exercice 7.1

1. Tracez l'allure de la tension et du courant en fonction du temps, au droit de $z = 0$ et $z = -\ell/2$. On se limitera aux deux premières impulsions reçues à ces positions ;
2. Calculez la fraction de l'énergie fournie au générateur qui est dissipée dans la charge R_L .

Exercice 7.2 (Propagation d'un échelon de tension dans une ligne idéale)

La ligne idéale de la figure 26 a pour paramètres $Z_0 = 50 \Omega$, $\ell = 2$ m et $v_p = 2 \cdot 10^8$ m/s.

Elle est terminée sur une résistance de charge $R_L = Z_0/2$, et alimentée par un générateur de résistance interne $R_g = Z_0/2$. Ce générateur délivre un signal échelon d'amplitude 1 V.

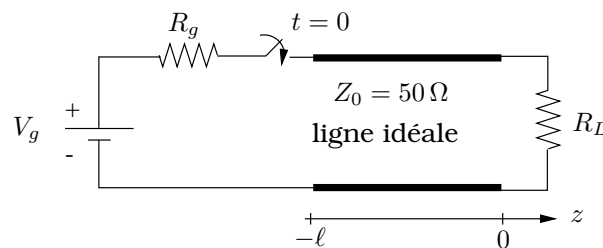


FIGURE 26 – exercice 7.2

Esquissez l'allure de la tension en $z = -\ell$ en fonction du temps durant les 50 premières millisecondes après l'établissement de l'échelon de tension.

Exercice 7.3 (Charge d'un condensateur en régime transitoire)

Un générateur alimente un condensateur de capacité C par l'intermédiaire d'une ligne de transmission idéale (figure 27). En supposant que l'interrupteur est fermé en $t = 0$ et que le condensateur est initialement non chargé, déterminez l'allure de la tension $V(z, t)$ le long de la ligne.

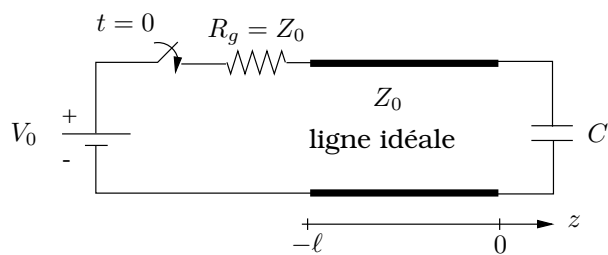


FIGURE 27 – exercice 7.3

PARTIE 2

Exercices complémentaires

1 Electrostatique

Exercice EC. 1.1

Charge uniformément distribuée sur un plan conducteur d'extension infinie

Soit une plaque conductrice supposée d'extension infinie sur laquelle des charges positives ont été déposées en densité $\rho_s \text{ C/m}^2$, comme illustré sur la figure 28. La plaque est parallèle aux axes \hat{y} et \hat{z} et est placée en $x = 0$; la densité de charge ρ_s est uniforme. Déterminez l'expression du champ électrique

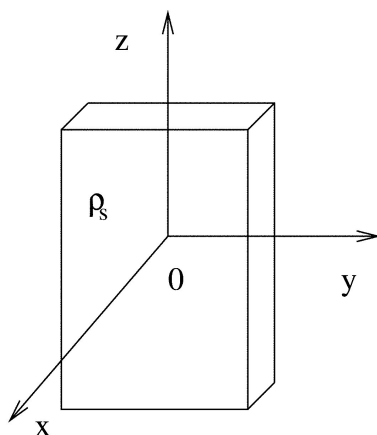


FIGURE 28 – exercice EC.1.2 : charge uniformément répartie sur un plan d'extension infinie

le long de l'axe \hat{x} pour des valeurs de x positives et négatives :

1. par intégration directe (il est suggéré de décomposer la plaque en lignes uniformément chargées et de se servir du résultat des répétitions) ;
2. par le théorème de Gauss.

Solution :

1. Par intégration directe

- Décomposez la plaque en lignes élémentaires parallèle à l'axe z et de largeur Δy comme indiqué à la figure 29. La densité de charges linéaire portée par chaque ligne est donnée par $\rho_s \Delta y$

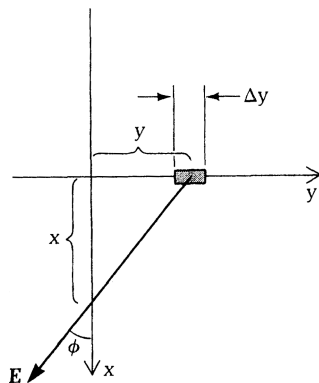


FIGURE 29 – exercice EC.1.2 : ligne élémentaire parallèle à l'axe z

- Le champ électrique élémentaire créé au point $(x, 0, 0)$, $x > 0$ par une ligne chargée est donné par (voir exercice 2.2)

$$\Delta \vec{E} = \frac{\rho_s \Delta y}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{x\hat{x} - y\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

- Le champ total est obtenu par intégration

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left(\hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \hat{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right)$$

- La seconde intégrale est nulle (fonction impaire). La première intégrale s'obtient en effectuant le changement de variable $y = x \tan \phi$
- On trouve $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x}$
- De façon similaire on trouve pour $x < 0$, $\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x}$
- Un résultat identique peut être obtenu en décomposant la plaque en lignes élémentaires parallèles à l'axe y .

2. Par application du théorème de Gauss

- Utilisez la symétrie : le champ électrique est dirigé selon \hat{x} pour les x positifs, selon $-\hat{x}$ pour les x négatifs et ne dépend que de la variable x
- Choisir comme volume de Gauss un parallélépipède d'épaisseur d selon x , englobant la plaque, et de base A dans des plans parallèles au plan $y - z$.
- L'intégrale $\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sur la surface de Gauss donne $2\epsilon_0 A E_x$.
- La charge totale incluse dans le volume est égale à $\rho_s A$.
- Finalement $E_x = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$.

Exercice EC. 1.2

Théorème de Gauss appliqué à une sphère uniformément chargée

Une sphère de rayon b et centrée à l'origine est uniformément chargée, avec une charge de densité ρ C/m³.

Déterminez l'expression du champ électrique à une distance r du centre de la sphère, dans le cas $r > b$ et dans le cas $r < b$. On supposera que la sphère et le milieu environnant ont une permittivité électrique ϵ_0 .

Solution :

- Utilisez la symétrie : le champ électrique est radial et ne dépend que de la variable r .
- Choisir comme volume de Gauss une sphère centrée à l'origine et de rayon r .
- L'intégrale $\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sur la surface de la sphère de Gauss donne $4\pi\epsilon_0 r^2 E_r$.
- Si $r > b$, l'intégrale de volume $\int_V \rho dV$ est égale au volume **total** de la sphère, $4\pi b^3/3$, multiplié par ρ .
- Si $r < b$, l'intégrale de volume $\int_V \rho dV$ est égale au volume de la sphère de Gauss, $4\pi r^3/3$, multiplié par ρ .
- En égalant l'intégrale de surface à l'intégrale de volume, on trouve donc que $E_r = \rho b^3/(3\epsilon_0 r^2)$ si $r > b$ et $E_r = r\rho/(3\epsilon_0)$ si $r < b$. Le champ augmente donc comme r à l'intérieur de la sphère et décroît comme $1/r^2$ à l'extérieur. On vérifiera que les deux expressions sont égales en $r = b$.

Exercice EC. 1.3

Charge linéaire placée dans un coin conducteur

Un conducteur uniformément chargé (densité de charge linéaire ρ_ℓ C/m) est placé dans le coin formé par deux plans conducteurs, comme illustré à la figure 30. Le conducteur chargé est placé parallèlement à l'axe des y ; les plans sont au potentiel de zéro volt.

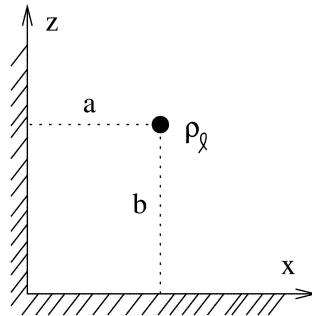


FIGURE 30 – exercice EC.1.3 : charge linéaire dans un coin conducteur

Calculez le potentiel $V(x, y, z)$ en tout point tel que $x > 0$ et $z > 0$.

Suggestion : vous aurez besoin de *trois* charges images, deux aux positions évidentes, la troisième pour compléter la symétrie.

Solution :

Une seule ligne image de densité linéaire $-\rho_\ell$ placée en $(x, z) = (-a, b)$ annule le potentiel le long du plan $x = 0$. De même, une seule ligne image de densité linéaire $-\rho_\ell$ placée en $(x, z) = (a, -b)$ annule le potentiel le long du plan $z = 0$. Naïvement, on pourrait penser que la solution du problème posé consiste alors à placer deux lignes images de densité linéaire $-\rho_\ell$, une en $(x, z) = (-a, b)$ et l'autre en $(x, z) = (a, -b)$. Les conditions aux limites ne sont cependant pas satisfaites sur les deux plans. En effet, avec les deux lignes images, le potentiel en un point P s'écrit

$$V(P) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_1}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_2}\right) + \text{Constante}$$

Le long du plan $x = 0$, on a $R = R_1$; les deux premiers termes s'annulent et il reste $V(P_{\text{plan } x=0}) = -(\rho_\ell/2\pi\epsilon) \ln(1/R_{2\in\text{plan}}) + \text{Constante}$, avec $R_{2\in\text{plan}} = \sqrt{a^2 + (z+b)^2}$. Aucune constante ne permettrait d'annuler ce résultat en tout point du plan (pour toutes valeurs de z). Le potentiel de la deuxième ligne image doit être compensé par une troisième ligne, image de la deuxième ligne par réflexion sur le plan $x = 0$. Cette ligne est placée en $(x, z) = (-a, -b)$ et porte une charge linéique ρ_ℓ (figure 31).

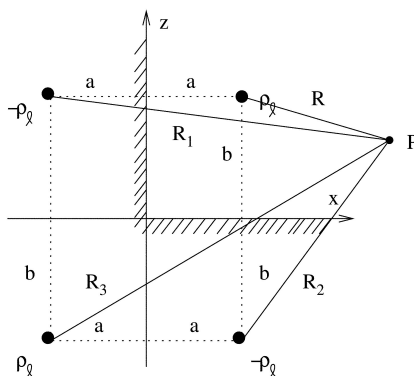


FIGURE 31 – exercice EC.1.3 : charges images

L'expression du potentiel électrique devient

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_1}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_3}\right) \\ &= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_1 R_2}{R R_3}\right) \\ &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{((x+a)^2 + (z-b)^2)((x-a)^2 + (z+b)^2)}{((x-a)^2 + (z-b)^2)((x+a)^2 + (z+b)^2)}\right) \end{aligned}$$

avec $P = (x, y, z)$. On vérifie aisément que $V(P) = 0$ pour tout point P situé sur les plans $x = 0$ ou $z = 0$.

Exercice EC. 1.4

Charge linéaire à l'intérieur d'un cylindre conducteur

Un conducteur uniformément chargé de charge linéaire ρ_ℓ est placé à l'intérieur d'un cylindre conducteur de rayon a , comme à la figure 32. Notez que le conducteur est excentré : il est parallèle à l'axe du cylindre, mais il est placé à une distance b de celui-ci. Le cylindre est au potentiel de zéro volt.

Déterminez l'expression du potentiel tout point à l'intérieur du cylindre.

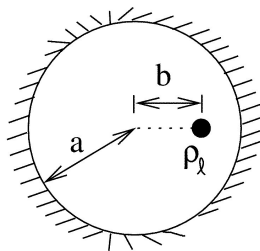


FIGURE 32 – exercice EC.1.4 : charge linéaire à l'intérieur d'un cylindre

Suggestion : ce problème est le complémentaire de celui de la ligne chargée placée parallèlement et à l'extérieur d'un cylindre conducteur. Réfléchissez aux équipotentiels obtenues dans ce problème.

Solution :

Deux lignes parallèles portant des charges linéaires opposées, $\pm\rho_\ell$, ont pour équipotentielles des cylindres circonscrits aux lignes et excentrés par rapport à celles-ci. La solution de ce problème consiste donc à positionner une ligne image de densité $-\rho_\ell$ à une distance d du centre du conducteur cylindrique (figure 33) de façon à ce qu'une des équipotentielles du système électrique composé de la ligne et de son image épouse la forme du cylindre. On trouve facilement que d satisfait

$$db = a^2.$$

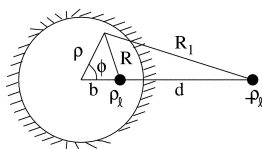


FIGURE 33 – exercice EC.1.4 : charges images

Le potentiel en tout point P intérieur du cylindre s'écrit alors

$$V(P) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{1}{R_1}\right) + \text{Constante}$$

avec $R = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \phi}$ et $R_1 = \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \phi}$

La constante est choisie de façon à annuler le potentiel sur le cylindre. Tous calculs faits, on a

$$V(P) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_1 b}{R a}\right)$$

Exercice EC. 1.5

Capacité d'une ligne bifilaire au-dessus d'un plan conducteur

Une ligne bifilaire est placée au-dessus d'un plan conducteur (potentiel égal à 0 volt) comme illustré à la figure 34.

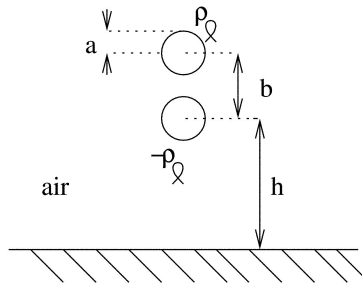


FIGURE 34 – exercice EC.1.5 : ligne bifilaire au-dessus d'un plan conducteur

Les fils de la paire sont séparés de $b = 50$ cm, le rayon des fils vaut $a = 1$ mm et la ligne est située à une hauteur $h = 6$ m.

A l'aide de la méthode des images, déterminez

1. l'expression du potentiel électrique en tout point P au-dessus du plan, en fonction des distances entre ce point et chacun des deux fils, ainsi qu'en fonction des paramètres de la ligne ;
2. la capacité unitaire de la ligne.

On supposera que les fils portent des charges linéaires opposées $\pm\rho_\ell$ et on supposera $a \ll b, h$.

Solution :

Placer deux lignes images en dessous du plan à la verticale de la ligne : la première porte une densité linéaire ρ_ℓ et est placée à une distance h en dessous du plan, la seconde porte une charge $-\rho_\ell$ et est placée à une distance $h + b$ en dessous du plan. On assigne le numéro 1 au fil portant la charge ρ_ℓ , 2 au fil portant la charge $-\rho_\ell$, 1' au fil image portant la charge $-\rho_\ell$, et 2' au fil image portant la charge ρ_ℓ . Sous l'approximation $a \ll b, h$, le potentiel en un point P s'écrit comme la somme des potentiels $(\pm\rho_\ell/2\pi\varepsilon_0) \ln(1/R)$ dus aux lignes individuelles. On obtient

$$V(P) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{R_{P2}R_{P1'}}{R_{P1}R_{P2'}} \right) + V_0$$

où R_{P_i} désigne la distance du point P au fil i et V_0 est une constante.

Le plan est au potentiel zéro et donc $V_0 = 0$. La capacité unitaire a pour expression

$$C = \frac{\rho_\ell}{V(P_{\text{sur fil 1}}) - V(P_{\text{sur fil 2}})} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \left(\frac{b^2}{a^2} \frac{4h(b+h)}{(b+2h)^2} \right)}$$

Avec les valeurs numériques données, $C = 4,5$ pF/m. Notez que l'effet du plan conducteur est ici très faible, le facteur correctif $4h(b+h)/(b+2h)^2$ étant très proche de 1.

Exercice EC. 1.6

Câble coaxial avec un diélectrique composite

On considère un câble coaxial constitué de deux conducteurs cylindriques en cuivre. L'espace séparant ces conducteurs est partiellement rempli par un matériau diélectrique sur un angle α , comme représenté à la figure 35.

Déterminez la valeur de l'angle α permettant d'obtenir une capacité unitaire supérieure d'un facteur 1.5 à la capacité unitaire que l'on obtiendrait avec un câble de dimensions identiques, mais ne comportant pas de matériau diélectrique (câble "à air").

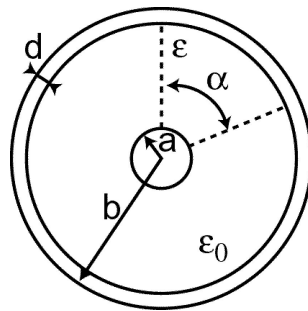


FIGURE 35 – exercice EC.1.6 : câble coaxial à 2 diélectriques

Données :

Diélectrique : $\epsilon_r = 2.2$

Conducteur intérieur : section $S = 0.9 \text{ mm}^2$.

Rayon extérieur du câble : $b = 6 \text{ mm}$.

Epaisseur du conducteur extérieur : $d = 5 \text{ mm}$.

Suggestion : on supposera que le champ électrique \vec{E} est radial dans tout l'espace compris entre les deux conducteurs.

Solution :

On suppose le champ électrique radial (les variations de \vec{E} aux alentours des interfaces diélectrique/air sont négligées).

En conséquence, le potentiel V ne dépend que de la coordonnée r . La solution de l'équation de Laplace est identique à celle obtenue à l'exercice 2.4 pour le câble coaxial à air :

$$V = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b-d}} \cdot \ln \frac{r}{b-d}$$

Le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\frac{V_0}{\ln \frac{a}{b-d}} \cdot \frac{1}{r}\hat{r}$$

On remarque que le champ électrique est continu au passage des interfaces air/diélectrique (continuité de la composante tangentielle de \vec{E}).

La densité de charge linéaire portée par les deux conducteurs se déduit du théorème de Gauss : surface de Gauss = cylindre de rayon r et de longueur de 1 m.

$$\begin{aligned} \rho_\ell &= \int_S \epsilon(\theta)\vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_0^\alpha \epsilon E r d\theta + \int_\alpha^{2\pi} \epsilon_0 E r d\theta \\ &= \frac{V_0}{\ln \frac{b-d}{a}} (\alpha\epsilon + (2\pi - \alpha)\epsilon_0) \end{aligned}$$

Il faut tenir compte de la présence du diélectrique sur une portion d'angle α .

La capacité unitaire du câble en présence du diélectrique vaut :

$$C_{die} = \frac{\alpha\epsilon + (2\pi - \alpha)\epsilon_0}{\ln \frac{b-d}{a}}$$

La capacité unitaire du câble en l'absence du diélectrique vaut :

$$C_{air} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b-d}{a}}$$

Il faut $C_{die} = 1.5C_{air}$ ce qui donne $\alpha = 0.83\pi$. On a :

$$C_{air} = 87.5 \text{ pF/m} \quad \text{et} \quad C_{die} = 131.3 \text{ pF/m}.$$

Exercice EC. 1.7

Claquage d'un condensateur diélectrique

Un condensateur à air, constitué de deux plateaux parallèles distants de $d = 1$ cm, peut soutenir une différence de potentiel de 29 kV. Lorsqu'une lame de verre ($\varepsilon_r = 6,5$) d'épaisseur $d_2 = 0,20$ cm est déposée sur le plateau inférieur, le condensateur soumis à la même différence de potentiel "claque". Sachant que la rigidité électrique de l'air vaut 30 kV/cm, et que celle du verre est égale à 290 kV/cm, expliquer la cause du claquage.

Pour rappel : la rigidité diélectrique (ou champ de rupture) est la valeur maximale de l'intensité du champ électrique que le diélectrique peut supporter. Au delà de cette valeur, des ionisations locales apportent des porteurs de charges supplémentaires et il y peut se former des arcs électriques (rupture du diélectrique).

Solution :

En présence de la lame, l'intensité du champ électrique *dans l'air* vaut $E_1 = 34,9$ kV/cm et est supérieure à la valeur du champ de rupture.

2 Magnétostatique

Exercice EC. 2.1

Application de la loi de Biot-Savart

1. Un fil conducteur de longueur infinie est parcouru par un courant continu I et forme un angle droit comme illustré sur la figure 36. A l'aide de la loi de Biot-Savart, déterminez l'expression de l'induction magnétique au point P.

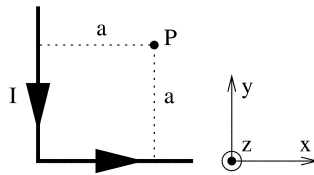


FIGURE 36 – exercice EC.2.1 : conducteur en angle droit

2. Un ruban conducteur de longueur infinie et de largeur w est parcouru par un courant continu I de densité uniforme. Le ruban forme un angle droit comme illustré sur la figure 37. A l'aide du résultat obtenu au point (a), déterminez l'expression de l'induction magnétique au point P.

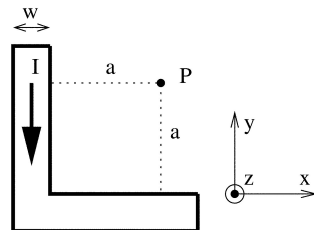


FIGURE 37 – exercice EC.2.1 : ruban en angle droit

Solution :

1. Appliquer

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Contribution du tronçon parallèle à l'axe x : $d\vec{\ell} = \hat{x}dx$, $\vec{r}' = \hat{x}x$, $\vec{r} = \hat{x}a + \hat{y}a$. On obtient

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty dx \hat{x} \times \frac{(a-x)\hat{x} + a\hat{y}}{\sqrt{(a-x)^2 + a^2}^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{z}$$

Le tronçon parallèle à l'axe y apporte une contribution identique. L'induction magnétique totale a pour expression

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{z}$$

2. Appliquer le principe de superposition : décomposer la bande de largeur w en une somme de conducteurs linéaires traversés par un courant I/w (courant par unité de largeur). Si u est la distance entre l'un de ces conducteurs et le point P, on a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_a^{a+w} du \frac{\mu_0 I}{2\pi w u} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(\frac{a+w}{a}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{z}$$

Exercice EC. 2.2

Champ d'induction produit par un solénoïde

On considère un solénoïde à air de rayon a et de longueur ℓ placé le long de l'axe \hat{z} entre $z = -\ell/2$ et $z = \ell/2$. Le solénoïde comporte N spires parcourues par un courant continu I .

1. Déterminez le champ d'induction magnétique produit le long de l'axe \hat{z} . Utilisez le principe de superposition et le résultat obtenu pour la boucle de courant circulaire.
2. Recherchez numériquement la longueur sur laquelle le champ d'induction varie de moins de 10 % de sa valeur en $z = 0$, dans les deux cas suivants : (i) $a = \ell/10$, (ii) $a = \ell/2$. Interprétez physiquement les résultats obtenus.

On supposera que $N \gg 1S$ et on exprimera le résultat en fonction de $n = N/\ell$, le nombre de spires par unité de longueur.

Solution :

On travaille en coordonnées cylindriques, le repère est placé au centre du solénoïde. Utilisez la loi de Biot-Savart et le principe de superposition : pour une spire placée en z' , on obtient

$$\vec{B}_{1z'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

où $d\vec{\ell} = a d\theta \hat{\theta}$ est un vecteur tangent à un élément de spire de longueur $a d\theta$, $\vec{r} = z \hat{z}$ est un point le long de l'axe, et $\vec{r}' = a\hat{r} + z'\hat{z}$ repère un point sur la spire. On a

$$\vec{B}_{1z'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta a \hat{\theta} \times \frac{(z - z')\hat{z} - a\hat{r}}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}^3} \hat{z}$$

Pour N spires, on obtient, par superposition, avec $n = \frac{N}{\ell}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' n \vec{B}_{1z'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + \ell/2}{\sqrt{(z + \ell/2)^2 + a^2}} - \frac{z - \ell/2}{\sqrt{(z - \ell/2)^2 + a^2}} \right)$$

L'induction diminue à 90 % de sa valeur en $z = 0$ pour $z = \pm 0.38 \ell$ dans le cas où $a = \ell/10$ et pour $z = \pm 0.26 \ell$ dans le cas où $a = \ell/2$. Les longueurs demandées valent donc $\Delta z = 0.76 \ell$ pour $a = \ell/10$ et $\Delta z = 0.52 \ell$ pour $a = \ell/2$. Physiquement, quand le rapport a/ℓ augmente, les lignes de champ s'écartent plus rapidement de l'axe \hat{z} en s'approchant des extrémités $z = \pm \ell/2$. Par conséquent, l'intensité du champ d'induction diminue plus rapidement pour les plus grands rapports a/ℓ . Un solénoïde long produit donc un champ d'induction plus uniforme qu'un solénoïde court.

3 Champs variables - régime quasi-statique et circuits localisés

Exercice EC. 3.1

Force électromotrice induite

Une boucle rectangulaire conductrice, de largeur $w = 10$ cm et de hauteur $h = 20$ cm, est située parallèlement à une distance $d = 5$ cm d'un conducteur rectiligne supposé infiniment long et parcouru par un courant sinusoïdal i_1 à la fréquence de 3 kHz (voir figure 38). L'ensemble est placé dans l'air.

On mesure à l'aide d'un ampèremètre l'amplitude efficace du courant induit dans la boucle et on relève $I_{2eff} = 300$ mA. La boucle conductrice présente une impédance totale de module égal à 0.01Ω .

Calculez l'amplitude de crête du courant i_1 .

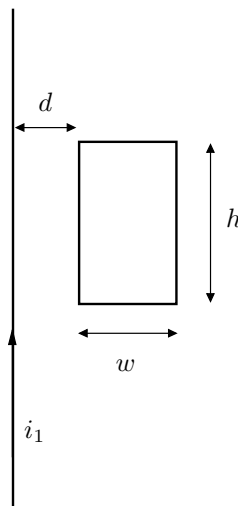


FIGURE 38 – exercice EC.3.1 : courant induite dans une boucle conductrice

Solution :

1. Flux d'induction magnétique créé par le courant i_1 à travers la boucle conductrice :

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \int_d^{d+w} \frac{h}{r} dr = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} h \ln \frac{d+w}{d}$$

2. F.e.m induite :

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{d+w}{d} \frac{di_1}{dt}$$

3. Valeur efficace de l'amplitude de la f.e.m

$$V_{eff} = \mu_0 f h \ln \frac{d+w}{d} I_{1eff} = |Z| I_{2eff} = 3 \text{ mV}$$

On déduit :

$$I_{1eff} = 3.62 \text{ A} \quad \text{et} \quad I_1 = \sqrt{2} I_{1eff} = 5.12 \text{ A}$$

4 Ondes

Exercice EC. 4.1

Réflexion d'une onde plane à incidence normale

Une onde plane se propageant dans l'air est normalement incidente sur un milieu diélectrique caractérisé par $\epsilon_{r2} = 18.5$, $\sigma_2 = 0$ et μ_{r2} , dont la valeur est inconnue (figure 39). L'amplitude de crête du champ électrique incident est égale à $E_{\text{inc}} = 1$ V/m.

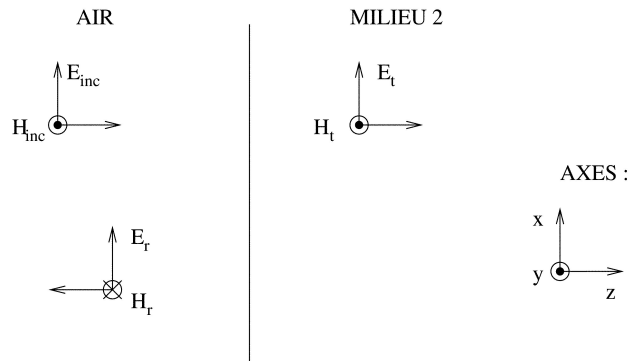


FIGURE 39 – exercice EC.4.1 : réflexion d'une onde plane

1. Déterminez les expressions des impédances d'onde dans chaque milieu.
2. Déterminez les conditions aux limites applicables aux composantes tangentielles des champs \vec{E} et \vec{H} .
3. En déduire μ_{r2} , sachant que la mesure du champ magnétique de l'onde réfléchie donne

$$\vec{H}_r = -1,41 \times 10^{-3} \hat{y} \text{ A/m.}$$

4. Déterminez la densité de puissance moyenne transportée par l'onde incidente et par l'onde réfléchie.

Solution :

1. $Z_{\text{air}} = 377 \Omega$, $Z_{\text{diel.}} = 87.7\sqrt{\mu_{r2}}$.
2. $E_i + E_r = E_t$, $H_i - H_r = H_t$, $H_{i,r} = E_{i,r}/Z_{\text{air}}$ et $H_t = E_t/Z_{\text{diel.}}$.
3. $\mu_{r2} = 199$.
4. $P_{\text{inc}} = 1.33 \text{ mW/m}^2$, $P_r = 0.37 \text{ mW/m}^2$

5 Lignes de transmission en régime harmonique

Exercice EC. 5.1

Paramètres unitaires d'une ligne bifilaire

Une ligne bifilaire est constituée de deux fils conducteurs en cuivre ($\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1$) de rayon $a = 2 \text{ mm}$, séparés d'une distance $d = 30.5 \text{ cm}$. Le diélectrique séparant les deux fils est de l'air ($\sigma \rightarrow 0$, $\epsilon' = \epsilon_0$) (figure 40).

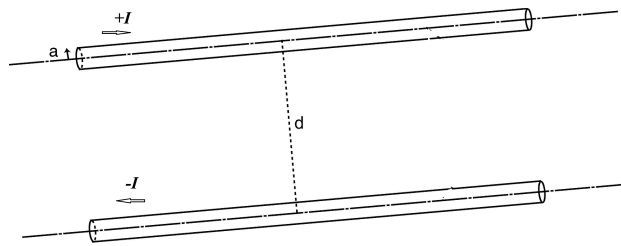


FIGURE 40 – exercice EC.5.1 : paramètres d'une ligne bifilaire

Pour rappel, la capacité et l'inductance par unité de longueur d'une ligne bifilaire ont pour expressions

$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\ln[d/a]}, \quad L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

1. Que peut-on dire de la conductance unitaire G ?
2. Déterminez la résistance unitaire aux fréquences $f = 0 \text{ Hz}$ et $f = 1 \text{ MHz}$.
3. Sommes-nous dans le régime de faibles pertes à $f = 1 \text{ MHz}$?
4. Déterminez l'impédance caractéristique de la ligne.
5. Déterminez le coefficient d'atténuation.
6. Si la ligne est plongée dans un diélectrique dont la permittivité relative à $f = 1 \text{ MHz}$ est égale à $\epsilon_r = 80(1 - j10^{-3})$, que vaut G ? Vous pouvez déduire l'expression de G directement à partir de celle de C .

Attention, à l'examen, il est possible qu'une question demande de déterminer l'expression de G en partant de principes élémentaires.

Solution :

1. $G = 0$

2. $R(0 \text{ Hz}) = 2.74 \text{ m}\Omega/\text{m}$, $R(1 \text{ MHz}) = 41.52 \text{ m}\Omega/\text{m}$.

3. Oui.

4. $Z_0 \simeq 603 \Omega$.

5. $\alpha \simeq 33.16 \cdot 10^{-6} \text{ Np/m}$.

6. $G = (\pi\omega\varepsilon'')/(\ln(d/a)) = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ S/m}$.

Exercice EC. 5.2

Ligne terminée sur une impédance complexe

La ligne, supposée idéale, représentée à la figure 41, alimente une charge Z_L constituée par la mise en série d'une résistance $R_L = 50 \Omega$ et d'un condensateur de capacité C_L .

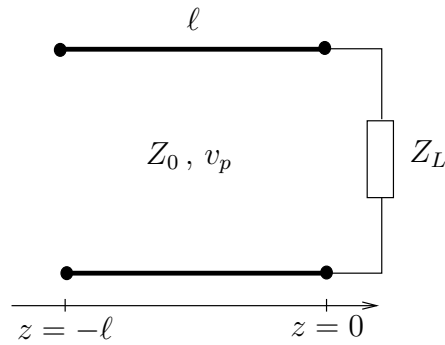


FIGURE 41 – exercice EC.5.2 : ligne idéale fermée sur une impédance complexe

Les paramètres de la ligne sont les suivants :

impédance caractéristique : $Z_0 = 50 \Omega$, vitesse de phase : $v_p = 2 \cdot 10^8$ m/s
longueur : $\ell = 60$ cm, fréquence de travail : $f = 500$ MHz

1. Déterminez la valeur de la capacité C_L telle que le taux d'ondes stationnaires le long de la ligne soit égal à 3.
2. Déterminez dans ce cas l'emplacement du premier maximum et du premier minimum de la tension et du courant.
3. Tracez l'allure du module de la tension $|\hat{V}(z)|$ le long de la ligne.
4. Déterminez l'impédance Z_{in} vue de l'entrée de la ligne.

Solution :

1. Pour obtenir un taux d'ondes stationnaires $S = 3$ il faut :

$$|\rho| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{R_L + jX_L - Z_0}{R_L + jX_L + Z_0} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|X_L|}{\sqrt{10^4 + |X_L|^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow |X_L| = 57.735 \Omega$$

On déduit la valeur de la capacité C_L :

$$\omega C_L = \frac{1}{57.735} \Rightarrow C_L = 5.5 \text{ pF.}$$

2. On a $Z_L = 50 - j57.735 \Rightarrow \rho = 0.5e^{-j1.05}$, le premier minimum du module de la tension se trouve en :

$$-z_{\min} = \frac{\theta_\rho}{4\pi} \lambda + \frac{\lambda}{4} = 6.6 \text{ cm}$$

En ce point le courant est maximum. Le premier maximum du module de la tension se trouve en : $-z_{\max} = -z_{\min} + \frac{\lambda}{4} = 16.6 \text{ cm}$. En ce point le courant est minimum.

3. Allure de l'amplitude de la tension $|\hat{V}(z)|$: sur la longueur de la ligne, on rencontre un maximum du module de la tension aux points

$$-z_{\max} = 16.6, 36.6, 56.6 \text{ cm}$$

et un minimum aux points :

$$-z_{\min} = 6.6, 26.6, 46.6 \text{ cm}$$

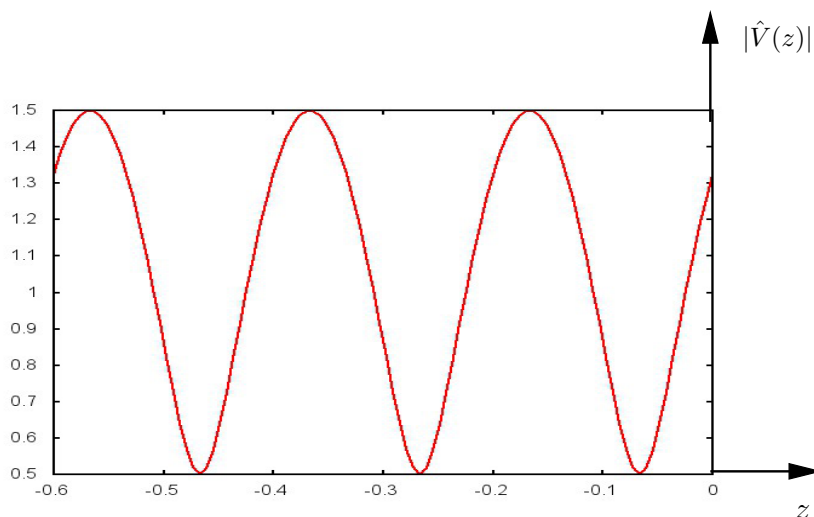


FIGURE 42 – exercice EC.5.2 : allure de l'amplitude de la tension

4. On remarque que la longueur de la ligne est un multiple de $\frac{\lambda}{2} = 20 \text{ cm}$ et dès lors l'impédance d'entrée est égale à l'impédance de charge : $Z_{in} = Z_L$.

Exercice EC. 5.3

Adaptateur quart d'onde

On considère deux lignes de transmission, supposées idéales, de type câble coaxial à air :

- ligne 1 : rayon du conducteur intérieur $a = 1$ cm, rayon du conducteur extérieur $b = 2.3$ cm
- ligne 2 : rayon du conducteur intérieur $a = 1.5$ cm, rayon du conducteur extérieur $b = 2.3$ cm

On souhaite réaliser l'adaptation entre ces deux lignes à la fréquence de 100 MHz par l'intermédiaire d'un adaptateur quart d'onde.

L'adaptateur est constitué d'un câble coaxial. L'adaptation peut être réalisée par l'un des deux moyens suivants :

1. utiliser un câble de même rayon extérieur et de même diélectrique mais de rayon intérieur différent ;
2. utiliser un câble de même rayons extérieur et intérieur qu'une des deux lignes mais de diélectrique différent.

Déterminez dans chaque cas les paramètres d'intérêt du câble adaptateur (rayons des conducteurs, caractéristique du diélectrique).

Rappel : paramètres unitaires L et C d'un câble coaxial :

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

Solution :

Pour réaliser l'adaptation, il faut que l'impédance caractéristique du câble soit donnée par :

$$Z_0 = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}$$

- impédance caractéristique de la première ligne :

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln \frac{b}{a} = 50 \Omega$$

- impédance caractéristique de la deuxième ligne :

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln \frac{b}{a} = 25.6 \Omega$$

- impédance caractéristique de l'adaptateur :

$$Z_0 = \sqrt{Z_{01}Z_{02}} = 35.8 \Omega$$

Solution 1 : rayon du conducteur intérieur

$$a = b \exp\left(-2\pi Z_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right) = 1.27 \text{ cm}$$

Solution 2 : l'impédance caractéristique Z_0 est inversement proportionnelle à la racine carrée de la permittivité relative du diélectrique ; à rayons constants, une plus grande permittivité conduit à une impédance caractéristique plus petite. Dès lors, il faut conserver les dimensions de la ligne 1 afin d'obtenir un câble d'impédance caractéristique comprise entre Z_{01} et Z_{02} . On déduit :

$$a = 1 \text{ cm}, b = 2.3 \text{ cm}, \varepsilon_r = \left(\frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi Z_0}\right)^2 \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = 1.95$$

Exercice EC. 5.4

Adaptation d'une impédance complexe par un quart d'onde

On désire réaliser l'adaptation d'une charge $Z_L = 100 + j20 \Omega$ à une ligne de transmission (supposée idéale) d'impédance caractéristique $Z_{01} = 75 \Omega$. Pour cela, on connecte en aval de la charge, un tronçon de ligne en court-circuit de longueur ℓ et de même impédance caractéristique et en amont de la charge un adaptateur quart d'onde comme indiqué à la figure ??.

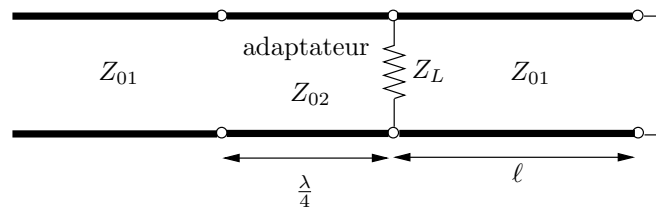


FIGURE 43 – exercice EC.5.4 : adaptation d'une impédance complexe par un quart d'onde

Déterminez les valeurs de la longueur ℓ du stub court-circuité et de l'impédance caractéristique Z_{02} de l'adaptateur quart d'onde qui permettent de réaliser l'adaptation.

Fréquence de travail : 200 MHz, lignes = câbles coaxiaux à air.

Solution :

1. Il faut que l'admittance résultant de la mise en parallèle de l'impédance de charge Z_L et du stub court-circuité soit purement réelle afin de permettre ensuite une adaptation classique avec le quart d'onde. Cette admittance est donnée par :

$$Y_{eq} = Y_{cc} + Y_L = -jY_{01} \cotg \beta \ell + \frac{100 - j20}{10400}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \text{Im}(Y_{eq}) &= -Y_{01} \cotg \beta \ell - \frac{20}{10400} = 0 \\ \cotg \beta \ell &= -0.1442 \quad \Rightarrow \quad \beta \ell = 1.714 \quad \Rightarrow \quad \ell = 0.273\lambda = 41 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. L'adaptateur quart d'onde est ainsi terminé sur une impédance

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 104 \Omega$$

L'adaptation à la ligne est réalisée si

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{eq} Z_{01}} = 88.3 \Omega$$

Exercice EC. 5.5

Adaptation par stub ouvert

Une ligne de transmission, supposée idéale, est alimentée par un générateur sinusoïdal d'impédance interne $Z_g = 10 \Omega$ délivrant une tension de crête $V_g = 30 \text{ V}$ à la fréquence $f = 500 \text{ MHz}$. Les paramètres de la ligne sont les suivants :

impédance caractéristique : $Z_0 = 50 \Omega$,

vitesse de phase : $v_p = 2.4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

longueur : $\ell = 1 \text{ m}$

La ligne alimente une charge d'impédance $Z_L = 100 \Omega$. Cette charge est adaptée à la ligne par l'insertion d'un stub ouvert à son extrémité ainsi que représenté à la figure 44. Le stub présente une impédance caractéristique $Z'_0 = 75 \Omega$, une vitesse de phase $v_p = 2.4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, une longueur $\ell_2 = 17.8 \text{ cm}$ et est inséré à une distance $\ell_1 = 7.3 \text{ cm}$ de la charge.

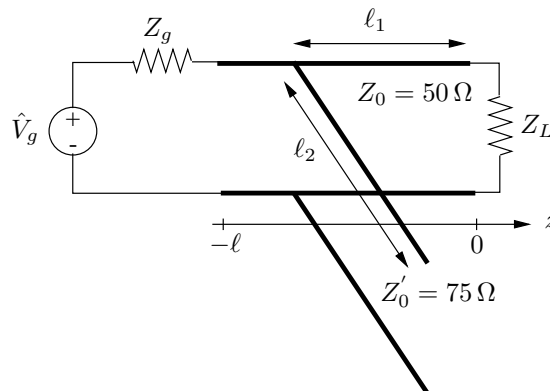


FIGURE 44 – exercice EC.5.5 : adaptation par stub ouvert

1. Vérifiez que ce montage permet effectivement de réaliser l'adaptation.
2. Pour chacun des trois tronçons :
 - tronçon 1 : ligne Z_0 , $-\ell_1 \leq z \leq 0$
 - tronçon 2 : ligne Z_0 , $-\ell \leq z \leq -\ell_1$
 - tronçon 3 : stub Z'_0 , $-\ell_2 \leq z' \leq 0$
 - (a) déterminez la valeur du taux d'ondes stationnaires ;
 - (b) tracez l'allure du module de la tension $|\hat{V}(z)|$ le long du tronçon.
3. Calculez la puissance fournie à l'impédance de charge Z_L .

Solution :

1. Vérification de l'adaptation

- Longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = 48 \text{ cm}$$

- Admittance du tronçon de ligne terminé sur la charge Z_L , vue au droit de la connexion avec le stub :

$$\beta\ell_1 = \frac{2\pi \times 0.073}{0.48}, \quad Y_{in}(-\ell_1) = Y_0 \frac{Z_0 + jZ_L \text{tg}\beta\ell_1}{Z_L + jZ_0 \text{tg}\beta\ell_1} = 0.02 + j0.0141 \text{ S}$$

- Admittance d'entrée du stub ouvert :

$$Y_{in}(\ell_2) = jY_0' \text{tg}\beta\ell_2 = -j0.0141 \text{ S}$$

- La mise en parallèle des deux admittances donne :

$$Y_{eq} = Y_{in}(\ell_1) + Y_{in}(\ell_2) = 0.02 = Y_0$$

et l'adaptation est vérifiée

2. Taux d'ondes stationnaires et allure de $|\hat{V}(z)|$

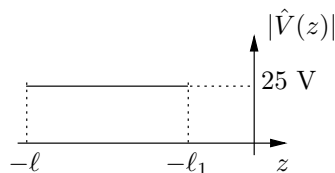
- tronçon 2 : ligne Z_0 , $-\ell \leq z \leq -\ell_1$

La ligne est adaptée et à l'entrée de la ligne, on a

$$Z_{in} = Z_0, \quad \hat{V}(-\ell) = \hat{V}_g \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} = 25 \text{ V}$$

Le module de la tension est constant.

$$\rho = 0, \quad S = 1, \quad |\hat{V}(z)| = 25 \text{ V}$$



- tronçon 1 : ligne Z_0 , $-\ell_1 \leq z \leq 0$

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1}{3}, \quad S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 2$$

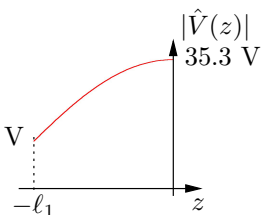
$$|\hat{V}(z)| = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cos 2\beta z}$$

De $\hat{V}(-\ell_1) = 25 \text{ V}$ on tire :

$$25 = |\hat{V}_+| \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cos 2\beta\ell_1} \Rightarrow |\hat{V}_+| = 26.5 \text{ V}$$

$$\hat{V}(0) = |\hat{V}_+|(1 + |\rho|) = 35.3 \text{ V}$$

maximum de la tension en $z = 0$, $\ell_1 < \frac{\lambda}{4}$



- tronçon 3 : stub Z'_0 , $-\ell_2 \leq z' \leq 0$
Ligne ouverte

$$\rho = 1, \quad S = \infty$$

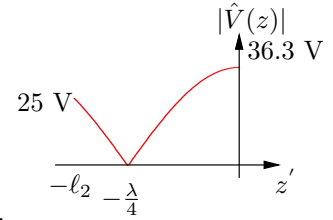
Ondes purement stationnaires.

$$|\hat{V}(z')| = |\hat{V}'_+| \sqrt{1 + 1 + 2 \cos 2\beta z'} = 2|\hat{V}'_+| |\cos(\beta z')|$$

A la connexion avec la ligne, on a

$$\hat{V}(-\ell_2) = 25 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad |\hat{V}'_+| = 18.2 \text{ V}$$

maximum de tension en $z'_{max} = 0$, $V_{max} = 2|\hat{V}'_+|$, minimum de tension en $z'_{min} = -\frac{\lambda}{4}$, $V_{min} = 0$, $\ell_2 = 0.3708\lambda$.



3. Puissance fournie à l'impédance de charge Z_L .

$$\begin{aligned} P_L &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \frac{|\hat{V}(0)|^2}{Z_L^*}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \frac{|\hat{V}(-\ell)|^2}{Z_0^*}\right) \quad (\text{ligne idéale}) \\ &= 6.25 \text{ W} \end{aligned}$$

6 Lignes de transmission en régime transitoire

Exercice EC. 6.1

Transitoires dans une ligne ouverte

Une ligne de transmission d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$ est terminée par un circuit ouvert et est initialement non-chargée (figure ??). En $t = 0$, elle est connectée à un générateur de tension continue $V_g = 20 \text{ V}$ dont la résistance interne est égale à $R_g = 150 \Omega$. Le temps de parcours le long de la ligne est égal à $t_d = \ell/v = 1 \text{ ms}$.

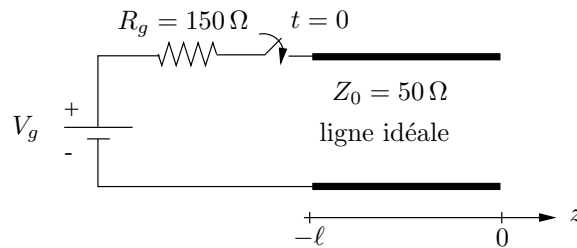


FIGURE 45 – exercice EC.6.1 : propagation d'une impulsion dans une ligne ouverte

1. Déterminer, au moyen d'un diagramme temporel, la tension d'entrée $V(-l)$ et la tension de sortie $V(0)$ pour $t \in [0 \text{ ms}, 5 \text{ ms}]$.
2. Quelle est la valeur de la tension en $z = 0$ pour $t \rightarrow \infty$?

Solution :

1. Tension $V(-l)$: pour $0 < t < 2 \text{ ms}$, on a $V(-l) = 5 \text{ V}$;
pour $2 \text{ ms} < t < 4 \text{ ms}$, on a $V(-l) = 12.5 \text{ V}$;
pour $4 \text{ ms} < t < 5 \text{ ms}$, on a $V(-l) = 16.25 \text{ V}$.

Tension $V(0)$: pour $0 < t < 1 \text{ ms}$, on a $V(0) = 0 \text{ V}$;
pour $1 \text{ ms} < t < 3 \text{ ms}$, on a $V(0) = 10 \text{ V}$;
pour $3 \text{ ms} < t < 5 \text{ ms}$, on a $V(0) = 15 \text{ V}$.

2. En $t \rightarrow \infty$, on a $V(0) = 20 \text{ V}$, qui est la valeur du régime continu établi.

Exercice EC. 6.2

Défaut résistif sur une ligne

Une ligne d'impédance caractéristique $Z_0 = 50 \Omega$ comporte un défaut en $z = -\ell_1 = -50 \text{ cm}$ que l'on représente comme une résistance localisée $R = 10 \Omega$ (figure 46). Si le générateur envoie une impulsion $V_0 = 1 \text{ V}$ dans cette ligne, quelle est la tension de l'impulsion qui revient au générateur ? Après combien de temps cette impulsion revient-elle au générateur ? On suppose la charge et le générateur adaptés, $R_g = R_L = Z_0$; la vitesse de propagation vaut $v = 10^8 \text{ m/s}$ et la longueur de la ligne est égale à $\ell = 2 \text{ m}$.

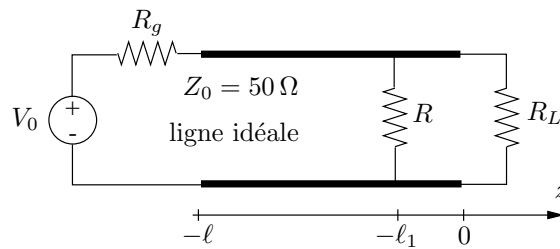


FIGURE 46 – exercice EC.6.2 : défaut résistif et propagation d'une impulsion

Solution :

Une impulsion $V_0 = 1 \text{ V}$ se traduit par une onde incidente de tension $V_+ = V_0/2 = 0.5 \text{ V}$.

Arrivée en $z = -\ell_1$, l'impulsion V_+ "voit" une impédance constituée de la mise en parallèle de la résistance R et de l'impédance caractéristique Z_0 du tronçon de longueur ℓ_1 . L'impédance de charge effective vaut donc

$$R \parallel Z_0 = 8.33 \Omega ,$$

ce qui donne un coefficient de réflexion

$$\rho = (8.33 - 50)/(8.33 + 50) = -0.71$$

La réflexion en $z = -\ell_1$ de l'onde V_+ donne une impulsion de tension $V_- = \rho V_+ = -0.36 \text{ V}$.

Cette impulsion parvient au générateur en $t = 2(\ell - \ell_1)/v = 30 \text{ ns}$ (si elle a été initialement émise en $t = 0$) où elle ne subit aucune réflexion (générateur adapté).