Variables aléatoires continues

Rappels

Variables aléatoires

Une V.A. continue X admet la fonction f comme *distribution de probabilité* si, pour tout sous-intervalle $[a, b]$ de l'espace,

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$$

En pratique, on se contente de vérifier que
- $f(x) \geqslant 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Dans le cas continu, on appelle *espérance mathématique* de X le nombre $E[X]$ défini par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On définit l'*écart-type* $\sigma = \sqrt{V[X]}$.

Loi continue uniforme

Une variable aléatoire X suit une *distribution continue uniforme* sur un intervalle $[a, b]$ si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim U(a, b)$.
Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi normale

Une variable aléatoire X suit une *loi normale* de paramètres μ et σ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

On note $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$E[X] = \mu \quad \text{et} \quad V[X] = \sigma^2$$

On a que $f(\mu - x) = f(\mu + x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $f(x)$ est donc symétrique par rapport à la droite $x = \mu$.

Il s'avère qu'il n'est pas possible d'évaluer les valeurs de $F(x)$ analytiquement et il faut donc recourir à des méthodes numériques. Dans la pratique, on utilise des tables de probabilités. Cependant, comme il n'était pas envisageable d'établir des tables de probabilités pour toutes les valeurs possibles de μ et σ, seules celles relatives à $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ sont disponibles. Cette variable aléatoire privilégiée, habituellement notée $Z \sim N(0, 1)$, est communément appelée la distribution normale standard.

On a la propriété que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sa version centrée et réduite, on a, au vu de propriété précédente, que $Z \sim N(0, 1)$.

Loi exponentielle

Une variable aléatoire X suit une *distribution exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim Exp(\lambda)$.
Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

La loi exponentielle définit la durée de vie d'un phénomène d'espèrance $\frac{1}{\lambda}$. Il s'agit d'une version continue de la loi géométrique.

Exercices

1. On choisit au hasard un point sur un segment de longueur L. Quelle est la probabilité que le rapport entre le plus court et le plus long des deux segments ainsi déterminés soit inférieur à 1/3 ?
2. Soit $V \sim U(0,1)$. Calculer la fonction de répartition de $W = \frac{-1}{\lambda} log(V)$ et sa densité. De quelle loi s'agit-il ?
3. Soit X une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F. On définit la variable Y par $Y = F(X)$.
   Montrez que Y est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,1]$.
   Utilisez ceci pour montrer comment on peut générer des nombres aléatoires provenant d'une loi exponentielle de paramètre λ.
4. On considère que le volume de remplissage effectif d'une bouteille par une machine d'embouteillage suit une loi normale d'espèrance égale à 252cm^3 et d'écart-type égal à 2cm^3.
   a) Quelle est la probabilité que le volume de remplissage d'une bouteille soit inférieur à 250cm^3 ?
   b) Quelle valeur faudrait-il donner à l'espérance pour que cette probabilité soit réduite à 5% ?
5. La longueur des pièces produites par une machine de type A varie selon une loi normale avec espérance 8mm et variance 4mm, et la longueur de celles produites par une machine de type B varie selon une loi normale avec espérance 7,5mm et variance 1mm.
   a) Si vous voulez produire des pièces de longueurs 8 +/- 1mm, quel type de machine choisiriez-vous ?
   b) Si la moyenne des longueurs produites par la machine A reste 8mm, quelle doit être sa variance pour qu'elle ait la même performance que la machine B ?
6. On suppose que la taille en centimètres, d'un Pygmée âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 6$.
   a) Quel est le pourcentage de Pygmées de 25 ans ayant une taille supérieure à 150cm ?
   b) Parmi les Pygmées mesurant plus de 145cm, quel pourcentage dépasse 150cm ?
7. On suppose que la taille, en centimètres, d'un homme âgé de 30 ans est une variable aléatoire normale de paramètre $\mu = 175$ et $\sigma^2 = 36$.
   a) Quel pourcentage d'hommes de 30 ans ayant une taille supérieure à 185cm ?

b) Parmi les hommes mesurant plus de 180cm, quel pourcentage dépasse 192cm ?

8. Un entrepreneur doit estimer le temps nécessaire à l'exécution d'un travail. Les incertitudes dues au marché du travail, à l'approvisionnement en matériaux, aux mauvaises conditions atmosphériques, par exemple, constituent une inconnue. Néanmoins, il affirme qu'il a une probabilité de 10% de réaliser le travail en plus de 190 jours et une probabilité de 5% que le travail soit terminé en moins de 50 jours. Soit X la variable aléatoire, supposée normale, désignant le nombre de jours nécessaires à l'exécution du travail.

   a) Donner l'espérance et la variance de X.

   b) Que vaut la probabilité que la durée du travail dépasse 200 jours ?

9. Le samedi soir, la police fait un alcootest à tous les conducteurs qui passent par une route principale. Quelle est la proportion d'automobilistes recevant une amende (taux d'alcool $> 0,08\%$) si l'on suppose que le taux d'alcool chez les automobilistes est distribué selon une loi normale d'espérance $\mu = 0,07\%$ et d'écart-type $\sigma = 0,01\%$? En plus de l'amende, les conducteurs ayant plus de $0,09\%$ ont un retrait de permis. Parmi les automobilistes réprimandés quelle est la proportion de retraits de permis ?

10. Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le $290^{\text{ème}}$ et le $240^{\text{ème}}$ jour précédant l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance ou moins de 240 jours avant ?

11. Sur une route principale où la vitesse est limitée à 80km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobilistes pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale avec une moyenne de 72km/h et un écart-type de 8km/h.

    a) Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse ?

    b) Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 30km/h implique un retrait de permis, quelle est la proportion des conducteurs qui vont se faire retirer le permis parmi ceux qui vont avoir une amende ?

12. Il est courant d'admettre qu'un examen est bien construit (dans le sens qu'il permet de construire une fourchette serrée et fiable pour la note

du candidat) si la répartition des scores obtenus par les participants se rapproche de la densité d'une variable normale. L'enseignant utilise alors les scores pour évaluer les paramètres μ et σ^2 puis assigne souvent des notes selon le principe suivant : ceux dont le score est supérieur à $\mu+\sigma$ reçoivent la note A ; ceux dont le score est compris entre μ et $\mu+\sigma$ reçoivent la note B ; ceux dont le score est entre $\mu-\sigma$ et μ reçoivent C ; tandis que ceux qui tombent entre $\mu-2\sigma$ et $\mu-\sigma$ reçoivent la note D. En dessous de $\mu-2\sigma$ la note est F. Il s'agit d'une espèce d'évaluation "à échelle mobile" basée sur des divisions fixes de la courbe de répartition. Calculez les probabilités des différentes notes.

13. Une usine fabrique en grand nombre des billes dont le diamètre suit une loi normale de moyenne 100mm et d'écart-type 2mm.
    a) Quelle est la probabilité pour une bille quelconque d'avoir un diamètre compris entre 95 et 105mm ?
    b) Trouvez l'intervalle centré autour de l'espérance du diamètre qui contient 82% de la production.
    c) Un premier contrôle permet de répartir la population en 2 lots :
       - L1 : ensemble des billes de diamètre dans l'intervalle $]95; 105]$
       - L2 : ensemble des billes restantes

       Quelle est la probabilité qu'une bille ait son diamètre compris entre 95 et 102
       i. quand elle appartient à L1 ?
       ii. quand elle appartient à L2 ?
14. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre plus de 10 minutes ? Et entre 10 et 20 minutes ?
15. Le nombre d'années de fonctionnement d'un appareil de télévision est une variable aléatoire exponentielle de taux $\lambda = \frac{1}{4}$. Calculez l'espérance mathématique de la durée de fonctionnement. Si vous achetez un téléviseur d'occasion, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore après 4 ans ?
16. En sachant que j'attends l'ascenseur dans un immeuble depuis 3 minutes, j'aimerais déterminer la probabilité que je doive attendre encore au moins 2 minutes.
    a) Formaliser la question à l'aide d'une loi exponentielle avec espérance 2 minutes et calculer la probabilité demandée.
    b) Comparer cette probabilité avec la probabilité non conditionelle d'attendre 2 minutes l'arrivée de l'ascenseur et interpréter ce résultat.

17. La durée de vie X en années d'une télévision suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{8}$.
    a) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
    b) Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ? Conclusion.
    c) Quelle est la durée de vie moyenne d'une télévision ? Et la variance de cette durée de vie ?
18. Les pièces d'une voiture sont souvent copiées et vendues comme pièces originales. On veut remplacer certaines pièces d'une voiture. Avec probabilité 1/4, on achète une pièce piratée et avec probabilité 3/4 on achète une pièce originale. La durée de vie est une variable aléatoire exponentielle avec espérance 2 pour une pièce piratée et avec espérance 5 pour une pièce originale. Appelons T la durée de vie de la pièce que l'on achète. Supposons que la pièce ait survécu jusqu'au temps t après son installation. Quelle est la probabilité $\pi(t)$ que cette pièce soit piratée ? Trouver la limite de $\pi(t)$ lorsque $t \mapsto \infty$.
19. Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale les paramétres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?
20. Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées. Soit X la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm" ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
21. Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :
    - 56% ont un taux inférieur à 165cg ;
    - 34% ont un taux compris entre 165cg et 180cg ;
    - 10% ont un taux supérieur à 180cg.

    Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182cg ?