

INFO2050 - Programmation avancée

Répétition 2: Résolutions de récurrences et sommations

Jean-Michel BEGON

03 octobre 2014

Exercice 1

Trouver une solution analytique pour

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)x^{2k}$ (avec $|x| < 1$);

(b) $\sum_{i=x}^y (2i+1)$;

(c) $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{j+2}\right)^i$.

(d) $\sum_{k=0}^n k^2 4^k$ (Suggestion: par perturbation)

Exercice 2

Trouver une solution analytique pour la récurrence suivante:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} T(n-1-p)T(p) \quad \forall n > 0$$

Exercice 3

Trouver une solution analytique pour la récurrence suivante:

$$T(1) = 1$$

$$nT(n) = (n-2)T(n-1) + 2 \quad \forall n > 1$$

Exercice 4

Trouver une solution analytique pour la récurrence suivante:

$$T(1) = 13$$

$$T(n) = 2T(n/8) + 21n \quad \forall n > 1$$

Exercice 5

Soit la récurrence (où $n > 1$ est une puissance de 3)

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = 6T(n/3) + 2n$$

- (a) Sans résoudre la récurrence, montrer que $T(n) \in O(n^2)$.
- (b) Trouver une solution analytique exacte à la récurrence.
- (c) Vérifier que votre solution satisfait à la borne obtenue par le *master theorem*.

Exercice 6

Pour chacun des pseudo-codes suivants, déterminer ce que fait l'algorithme, puis la complexité asymptotique.

```
CODE1(n)
1  if n ≤ 1
2      return n
3  else
4      return CODE1(n - 1) + CODE1(n - 1)
```

```
CODE2(n)
1  if n == 0
2      return ""
3  else
4      tmp = CODE2(n/2)
5      if n%2 == 0
6          return tmp + tmp
7      else
8          return tmp + tmp + "x"
```

```
CODE3(A, k)
1  for i = 1 to A.length
2      if A[i] == k
3          return i
4  return -1
```

Bonus

Bonus 1

Dans le cadre d'une application en *machine learning*, on est amené à extraire des sous-chaînes contiguës d'une chaîne de caractères de référence A de longueur n . Combien y a-t-il de chaînes de longueur k , de longueurs au plus k , de longueurs comprises entre k_1 et k_2 . Combien y a-t-il de chaînes au total ?

Bonus 2

Le premier problème du projet Euler ne nécessite pas l'utilisation de l'ordinateur. Il s'énonce comme suit:

“Si on liste tous les naturels inférieurs à 10 qui sont multiples de 3 ou de 5, on obtient 3, 5, 6 et 9. La somme de ceux-ci est 23. Trouver la somme de tous les multiples de 3 ou de 5 inférieure à 1000.”