Chapitre 2

Inductions

Principe d'induction

Principe d'induction :

Soit $P(n)$ un prédicat. Si

- $P(0)$ est vrai, et si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Variante :

Soit $P(n)$ un prédicat, et soit $k \in \mathbb{N}$. Si

- $P(k)$ est vrai, et si
- pour tout $n \geq k$, $P(n)$ implique $P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq k$.

Un modèle pour les démonstrations par induction

1. Annoncer que la démonstration utilise une induction ;
2. Définir un prédicat approprié $P(n)$;
3. Démontrer que $P(0)$ est vrai ("cas de base") ;
4. Démontrer que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ("cas inductif") ;
5. Invoquer l'induction (cette étape est souvent implicite).

Illustration

Théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration :

La démonstration fonctionne par induction.
Soit $P(n)$ le prédicat qui est vrai si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Cas de base : $P(0)$ est vrai car $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Cas inductif : Supposons que $P(n)$ soit vrai, où n est un nombre naturel quelconque, et démontrons que cette hypothèse implique la validité de $P(n+1)$. On a

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1).$$

Comme $P(n)$ (l'"hypothèse d'induction") est vraie, cette expression est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dès lors, par induction, $P(n)$ est vrai quel que soit le nombre naturel n, et le théorème est démontré. $\square$

Un théorème de divisibilité

Définition : Un nombre entier a *divise* un nombre entier b si b est un multiple de a. Lorsque a divise b, on écrit $a \mid b$.

Exemple : On a $3 \mid (5^3 - 5)$ car $5^3 - 5 = 120$ est un multiple de 3.

On souhaite démontrer par induction que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $3 \mid (n^3 - n)$.

Soit $P(n)$ le prédicat "$3 \mid (n^3 - n)$".

Le cas de base $P(0)$ est immédiat. Pour démontrer le cas inductif, il faut supposer que $3 \mid (n^3 - n)$ et en déduire que $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$.

On a

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n+2n \\ &= (n^3-n)+(3n^2+3n).\end{aligned}$$

Comme 3 divise (n^3-n) par hypothèse d'induction, et que $3n^2+3n$ est un multiple de 3, la somme $(n^3-n)+(3n^2+3n)$ est un multiple de 3.

Réorganisons ce raisonnement dans une démonstration claire.

Théorème : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 \mid (n^3-n)$.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction.
- Soit $P(n)$ la proposition $3 \mid (n^3 - n)$.
- *Cas de base :* $P(0)$ est vrai car $3 \mid (0^3 - 0)$.
- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai, où $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 3 \mid (n^3 - n) &\Rightarrow 3 \mid ((n^3 - n) + 3(n^2 + n)) \\ &\Rightarrow 3 \mid (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \\ &\Rightarrow 3 \mid ((n+1)^3 - (n+1)). \end{aligned}$$

  Première implication : $3(n^2 + n)$ est divisible par 3.
  Autres implications : réécriture de l'expression de droite.
  On a prouvé que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Dès lors, par induction, $P(n)$ est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$, et le théorème et démontré. $\square$

Une démonstration par induction erronée

Faux théorème : Tous les chevaux ont la même couleur.

Démonstration erronée : *(Où est l'erreur ?)*

- La démonstration fonctionne par induction.
- $P(n)$: "pour tout ensemble de n chevaux, tous ces chevaux ont la même couleur".
- *Cas de base :* $P(1)$ est vrai car tous les chevaux dans un ensemble de 1 cheval ont la même couleur.
- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai. Soit un ensemble de $n+1$ chevaux :

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}.$$

Par hypothèse, les n premiers chevaux ont la même couleur. Il en est de même pour les n derniers :

$$\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_n}_{\text{même couleur}}, c_{n+1}.$$

$$c_1, \underbrace{c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}}_{\text{même couleur}}.$$

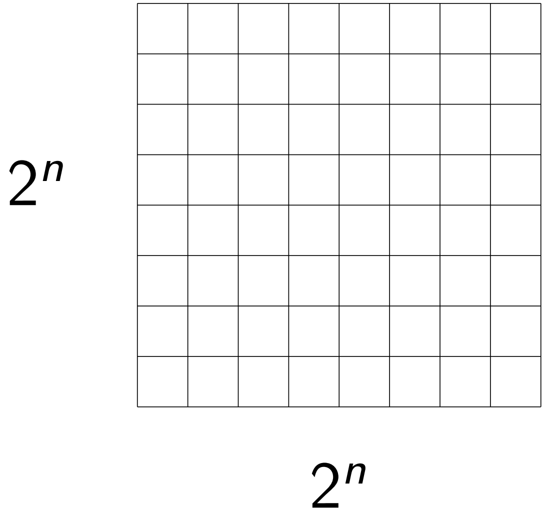
Dès lors, les chevaux $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ ont la même couleur, i.e., $P(n+1)$ est vrai. Donc, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$. Le théorème est un cas particulier de ce résultat : celui où n vaut le nombre total de chevaux dans le monde. $\square$

Dallage

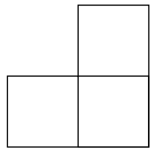
On souhaite créer une terrasse de dimension $2^n \times 2^n$ à la place de la pelouse située au centre du bâtiment B28.

Photo : ©ULg - M. Houet

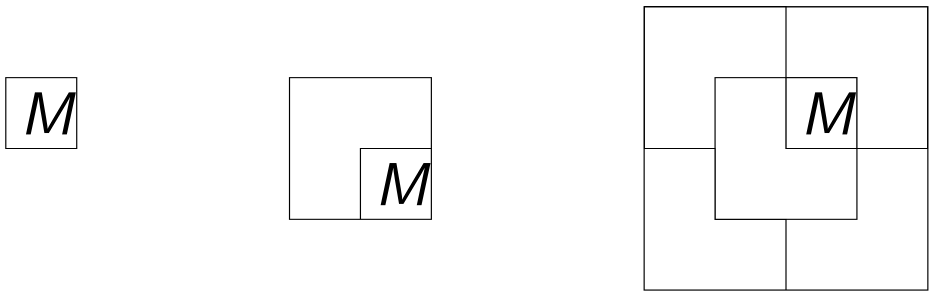


Contraintes :

- Sur un des emplacements situés au centre de la terrasse, on doit ériger une statue de Georges Montefiore (M).
- Tous les autres emplacements doivent être couverts par des dalles en “L”, sans que ces dalles ne se recouvrent.



Remarque : Pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, un dallage existe :



On demande de démontrer qu'un tel dallage existe quelle que soit la valeur $n \in \mathbb{N}$.

Problème : Choisir $P(n) =$ "il existe un dallage d'une terrasse $2^n \times 2^n$ avec M au centre" n'est pas adéquat : un dallage pour une terrasse de dimension $2^n \times 2^n$ ne permet pas de construire facilement un dallage pour une terrasse de dimension $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Solution : Choisir une hypothèse d'induction *plus générale*.

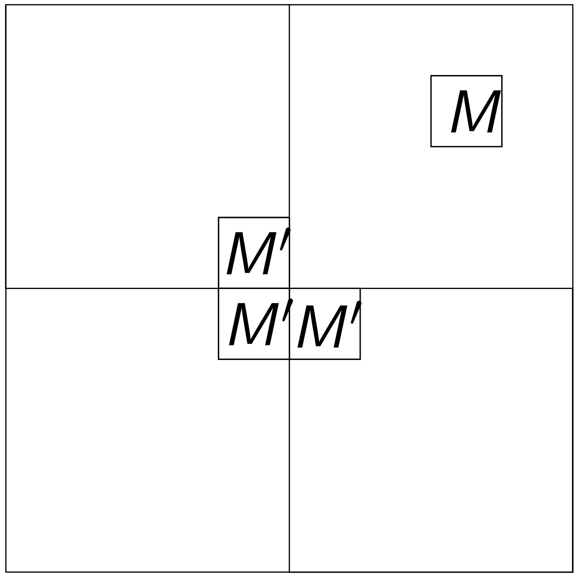
$P(n) =$ "Pour *tout* emplacement de M sur une terrasse de dimension $2^n \times 2^n$, il y a une possibilité de dallage pour le reste de la terrasse."

Théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un dallage d'une terrasse de dimension $2^n \times 2^n$ avec M au centre.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction.
- Soit $P(n) =$ "Pour *tout* emplacement de M sur une terrasse de dimension $2^n \times 2^n$, il y a une possibilité de dallage pour le reste de la terrasse."
- *Cas de base :* $P(0)$ est vrai car M couvre toute la terrasse.
- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai pour un $n \in \mathbb{N}$.
  Soit une terrasse de dimension $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, et supposons que M se trouve sur un quelconque emplacement de celle-ci.

Divisons la terrasse en 4 quadrants, chacun de dimension $2^n \times 2^n$. Un d'entre-eux contient M. Plaçons un M temporaire (M' sur le schéma) sur chacun des 3 emplacements centraux situés dans les 3 autres quadrants.



Par l'hypothèse d'induction, chacun des 4 quadrants admet un dallage. Remplacer les 3 emplacements de M' par une dalle en "L" permet de terminer le travail. Donc $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème en est un cas particulier. $\square$

L'énigme du Taquin (Sam Lloyd, ±1870)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15		14

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	15	11	14

Existe-t-il une séquence de mouvements qui permet d'échanger les pièces 15 et 14 de la configuration de gauche, sans modifier l'emplacement des autres pièces ?

Nous allons établir un invariant du problème, c'est-à dire une propriété qui est toujours vraie, quelle que soit la façon dont les pièces sont déplacées.

- Deux types de mouvements : mouvement de ligne et mouvement de colonne.
- Lemme 1 : Un mouvement de ligne ne modifie pas l'ordre des pièces.
  Démonstration : C'est immédiat. $\square$
- Lemme 2 : Un mouvement de colonne modifie l'ordre relatif d'exactement 3 paires de pièces.

a	b	c	d
e	f		g
h	i	j	k
l	m	n	o

$\longrightarrow$

a	b	c	d
e	f	j	g
h	i		k
l	m	n	o

Démonstration : Faire glisser une pièce vers le bas la déplace après les 3 pièces suivantes. Faire glisser une pièce vers le haut la déplace avant les 3 pièces précédentes. $\square$

- Lemme 3 : Un mouvement de ligne ne modifie jamais la parité du nombre d'inversions. Un mouvement de colonne modifie toujours la parité du nombre d'inversions.

  Démonstration : Par le lemme 1, un mouvement de ligne ne modifie pas l'ordre des pièces. En particulier, il ne modifie pas le nombre d'inversions.

  Par le lemme 2, un mouvement de colonne modifie l'ordre relatif d'exactement 3 paires de pièces. Donc, un nombre pair d'inversions devient impair, et vice-versa. $\square$

- Lemme 4 : Dans toute configuration accessible à partir de la configuration ci-dessous, la parité du nombre d'inversions est différente de la parité du numéro de la ligne contenant la case vide.

ligne 1	1	2	3	4
ligne 2	5	6	7	8
ligne 3	9	10	11	12
ligne 4	13	15	14	

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction.
- Soit $P(n) =$ "Après n mouvements, la parité du nombre d'inversions est différente de la parité du numéro de la ligne contenant la case vide".
- *Cas de base :* $P(0)$ est vrai, car, initialement, le nombre d'inversions vaut 1, tandis que le numéro de la ligne contenant la case vide vaut 4.

- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai pour un $n \in \mathbb{N}$.
  - Si le mouvement $n+1$ est un mouvement de ligne, alors $P(n+1)$ est vrai car, la ligne contenant la case vide n'a pas changé, et par le lemme 3 la parité du nombre d'inversions n'est pas modifiée.
  - Si le mouvement $n+1$ est un mouvement de colonne, alors, par le lemme 3, la parité du nombre total d'inversions a été modifiée. De plus, la parité du numéro de la ligne contenant la case vide a été modifiée également. Donc, $P(n+1)$ est vrai.
- Dès lors, $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

- Théorème : Aucune séquence de mouvements de permet d'obtenir la configuration de droite à partir de la configuration de gauche :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Démonstration : Dans la configuration de droite, le nombre total d'inversions est de 0, tandis que la case vide est dans la ligne 4. Par le lemme 4, cette configuration n'est pas accessible. $\square$

Induction forte

Principe d'induction forte :

Soit $P(n)$ un prédicat. Si

- $P(0)$ est vrai, et si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(0) \land P(1) \land \cdots \land P(n)$ implique $P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Variante :

Soit $P(n)$ un prédicat, et soit $k \in \mathbb{N}$. Si

- $P(k)$ est vrai, et si
- pour tout $n \geq k$, $P(k) \land P(k+1) \land \cdots \land P(n)$ implique $P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq k$.

Remarques :

- Tout théorème qui peut être démontré par induction forte peut aussi être démontré par induction simple.
- Utiliser l'induction forte rend parfois les preuves plus simples.
- Cependant, si $P(n)$ permet de démontrer facilement que $P(n+1)$ est vrai, alors, par soucis de simplicité, il est préférable d'utiliser l'induction simple.

Application : jeu de dépilage

Règles du jeu :

- On commence avec une pile de n boîtes.
- A chaque étape, on divise une pile en deux piles non vides.
- Le jeu s'arrête lorsque l'on obtient n piles, chacune contenant une seule pile.
- Une division où l'on transforme une pile de hauteur $a + b$ en deux piles d'hauteurs a et b permet d'obtenir ab points.

Exemple :

hauteurs des piles										score
10										
5	5									25 points
5	3	2								6
4	3	2	1							4
2	3	2	1	2						4
2	2	2	1	2	1					2
1	2	2	1	2	1	1				1
1	1	2	1	2	1	1	1			1
1	1	1	1	2	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
									score total =	45 points

Est-il possible de trouver une meilleure stratégie ?

Théorème : Toute manière de dépiler n blocs conduit à un score de $n(n-1)/2$ points.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction forte.
- Soit $P(n) =$ "Toute manière de dépiler n blocs conduit à un score de $n(n-1)/2$ points".
- *Cas de base :* $P(1)$ est vrai car une pile de 1 bloc est déjà dépilée. Le score est donc de $0 = 1(1-1)/2$.
- *Cas inductif :* Supposons que $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$ soient vrais, avec $n \geq 1$, et supposons que nous disposions d'une pile de $n+1$ blocs.
  - Premier mouvement : divise la pile initiale en deux piles de tailles k et $n+1-k$, avec $1 \leq k < n+1$.

- On obtient :

$$
\begin{aligned}
\text{s. total} &= \text{score du premier mouvement} \\
&\quad + \text{score du dépliage de } k \text{ blocs} \\
&\quad + \text{score du dépliage de } n+1-k \text{ blocs} \\
&= k(n+1-k) + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n+1-k)(n-k)}{2} \\
&= \frac{2kn + 2k - 2k^2 + k^2 - k + n^2 - kn + n - k - kn + k^2}{2} \\
&= \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}
$$

- La conjonction $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)$ implique donc $P(n+1)$ quel que soit $n \geq 1$.
- Par induction forte, on a donc $P(n)$ pour tout $n \geq 1$. $\square$

Induction structurelle

L'induction ordinaire est basée sur les entiers naturels :

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow P(n)$$

Induction structurelle : induction plus générale basée sur des ensembles/types de données définis de manière récursive

Nombreuses applications en informatique

Définition récursive

Un *type de données récursif* R est défini par :

- des règles de base qui affirment que des éléments appartiennent à R
- des règles inductives de construction de nouveaux éléments de R à partir de ceux déjà construits

Exemples :

- L'ensemble $M \in \{], [\}^*$ des chaînes de crochets appariés :
  - cas de base : $\lambda \in M$ (chaîne vide)
  - constructeur : si $s, t \in M$, alors $[s]t \in M$
- L'ensemble *Aexp* des expressions mathématiques définies sur une seule variable x :
  - cas de base : x et $k, \forall k \in \mathbb{N}$, sont dans *Aexp*
  - constructeurs : si $e, f \in Aexp$, alors $[e + f]$, $[e * f]$, et $-[e]$ sont dans *Aexp*.

Induction structurelle

Principe d'induction structurelle :

Soit P un prédicat défini sur un type de données récursif R. Si

- $P(b)$ est vrai pour chaque élément de base $b \in R$, et
- pour toute règle de construction $c(x_1, \ldots, x_m)$, $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_m)$ implique $P(c(x_1, \ldots, x_m))$ pour tout x_1, $x_2, \ldots, x_m \in R$,

alors $P(r)$ est vrai pour tout $r \in R$.

Illustration 1

Théorème : toute chaîne dans M a un nombre égal de crochets droits et gauches.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction structurelle
- Soit $P(s) = (\#_{[}(s) = \#_{]}(s))$.
- *Cas de base :* $P(\lambda)$ est vrai car $\#_{[}(\lambda) = \#_{]}(\lambda) = 0$
- *Cas inductif :* Supposons que $P(s)$ et $P(t)$ soient vrais et montrons que $P([s]t)$ est vrai :

$$\begin{aligned} \#_{[}([s]t) &= \#_{[}(r) + \#_{[}(s) + 1 \\ &= \#_{]}(r) + \#_{]}(s) + 1 \\ &= \#_{]}([s]t) \end{aligned}$$

- Par induction structurelle, on a donc $P(s)$ pour tout $s \in M$. $\square$

Illustration 2

Soit F, un ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, tel que :

- $Id_{\mathbb{R}}(::= x)$, les fonctions constantes, et $\sin(x)$ sont dans F *(règles de base)*
- Si $f, g \in F$, alors :
  - $f + g$,$f.g$,e^f, (the constant e)
  - the inverse, $f^{(-1)}$, of f, and
  - $f \circ g$

  sont dans F.

  (règles inductives)

Exemples : $-x$ $(= (-1)x)$, $\sqrt{x}$ $(= (x^2)^{(-1)})$, $\cos(x)$ $(= 1 - (\sin(x).\sin(x))^{1/2}$

Théorème : Si $f \in F$, alors $f' \in F$
(F est fermé par rapport à la dérivée)

L'induction structurelle généralise l'induction simple

L'ensemble $\mathbb{N}$ peut être défini récursivement par :

- $0 \in \mathbb{N}$ *(règle de base)*
- si $n \in N$, alors le successeur, $n + 1$, de n est dans $\mathbb{N}$ *(règle inductive)*