Chapitre 5

Sommations et comportements asymptotiques

Introduction

Supposons

- que nous ayons la possibilité de placer de l'argent à un intérêt annuel de 6 %,
- que nous gagnions à la loterie, et
- que nous ne comptons dépenser les gains que dans 20 ans.

Recevoir 1.000.000 euros en une seule fois est plus avantageux que de recevoir 50.000 euros par an pendant 20 ans.

Question : Qu'en est-il si nous pouvons choisir entre recevoir 50.000 euros par an pendant 20 ans, et recevoir 500.000 euros de suite ?

Supposons que nous placions 1 euro aujourd'hui à un taux d'intérêt annuel de p %.

- Dans un an, nous aurons $1 + p$ euros,
- dans deux ans $(1 + p)^2$ euros, et ainsi de suite.

Donc,

- la valeur actuelle d'un euro qui sera payé dans un an n'est que de $\dfrac{1}{1+p}$ euros,
- la valeur actuelle d'un euro qui sera payé dans deux ans n'est que de $\dfrac{1}{(1+p)^2}$ euros, et ainsi de suite.

Calculons les valeurs actuelles des paiements de m euros au début de chacune des n prochaines années :

Paiements	Valeurs actuelles (euros)
m euros payés aujourd'hui	m
m euros payés dans un an	$m/(1+p)$
m euros payés dans deux ans	$m/(1+p)^2$
$\vdots$	$\vdots$
m euros payés dans $n-1$ ans	$m/((1+p)^{n-1})$
Valeur actuelle totale	$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{m}{(1+p)^{k-1}}$

Solutions analytiques

Définition : Une *solution analytique* est une expression mathématique qui peut être évaluée à l'aide d'un nombre constant d'opérations de base (addition, multiplication, exponentiation, etc.).

Question : Comment trouver une solution analytique pour

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} \frac{m}{(1+p)^{k-1}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m}{(1+p)^{j}} \\ &= m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+p} \right)^{j} \ ? \end{aligned}$$

Séries géométriques

Théorème : Pour tous $n \geq 0$ et $z \neq 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & 1 & + & z & + & z^2 & + & \dots & + & z^n & & \\ zS & = & & & z & + & z^2 & + & \dots & + & z^n & + & z^{n+1} \end{array}$$

On a $S - zS = 1 - z^{n+1}$, et donc $S = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. $\square$

Retour au problème introductif

On obtient

$$\begin{aligned} V &= m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+p} \right)^j \\ &= m. \frac{1 - \left(\frac{1}{1+p} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{1+p} \right)}. \end{aligned}$$

Avec $m = 50.000$, $n = 20$ et $p = 0,06$, on obtient

$$V \approx 607.906 \text{ euros.}$$

Il est donc plus intéressant de recevoir 50.000 euros par an pendant 20 ans.

Sommes infinies

Définition : $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} z_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z_i.$

Théorème : Si $|z| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}.$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} z^i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z^i \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\
&= \frac{1}{1-z}.
\end{aligned}$$

$\square$

Question : A un taux de 6%, est-il plus intéressant de recevoir 50.000 euros par an à vie, ou 1.000.000 euros de suite ?

Réponse : On a

$$\begin{aligned} V &= m\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+p}\right)^j \\ &= m.\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)} \\ &= m.\frac{1+p}{p}. \end{aligned}$$

En substituant m et p par 50.000 et 0.06, on obtient

$$V \approx 883.333 \text{ euros.}$$

Il est donc plus intéressant de recevoir 1.000.000 euros de suite.

Variantes des séries géométriques

Théorème : Pour tous $n \geq 0$ et $z \neq 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} iz^i = \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{(1-z)^2}.$$

Démonstration : On a

$$\sum_{i=0}^{n} iz^i = z \cdot \sum_{i=0}^{n} iz^{i-1} = z \cdot \left(\frac{d}{dz} \sum_{i=0}^{n} z^i \right) = z \cdot \left(\frac{d}{dz} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right).$$

En développant, on obtient

$$
\begin{aligned}
& z \cdot \left(\frac{d}{dz} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \\
= \quad & z \cdot \left(\frac{-(n+1)z^n(1-z) - (-1)(1 - z^{n+1})}{(1-z)^2} \right) \\
= \quad & z \cdot \left(\frac{-(n+1)z^n + (n+1)z^{n+1} + 1 - z^{n+1}}{(1-z)^2} \right) \\
= \quad & z \cdot \left(\frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \right) \\
= \quad & \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{(1-z)^2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Corollaire : Si $|z| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} iz^i = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} iz^i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} iz^i \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{z}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Autre variante : En intégrant les deux côtés de $\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$ (de 0 à x), on peut obtenir :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x).$$

Somme de puissances

Théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

Démonstration : Par induction sur n. □

Comment trouver l'expression analytique ?

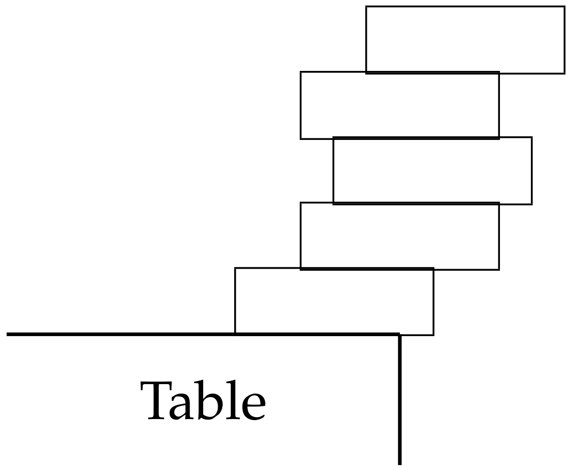
- Supposer que la somme est un polynôme de degré 3 (car somme$\sim$intégration)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

- Identifier les constantes a, b, c, d à partir de quelques valeurs de la somme
- Prouver sa validité par induction

Empilage de blocs

De combien au maximum peut dépasser une série de n blocs identiques empilés au bord d'une table ?



Soient deux objets de masses respectives m_1 et m_2 et dont les centres de masse sont aux positions x_1 et x_2. Le centre de masse du système constitué des deux objets se trouve à la position :

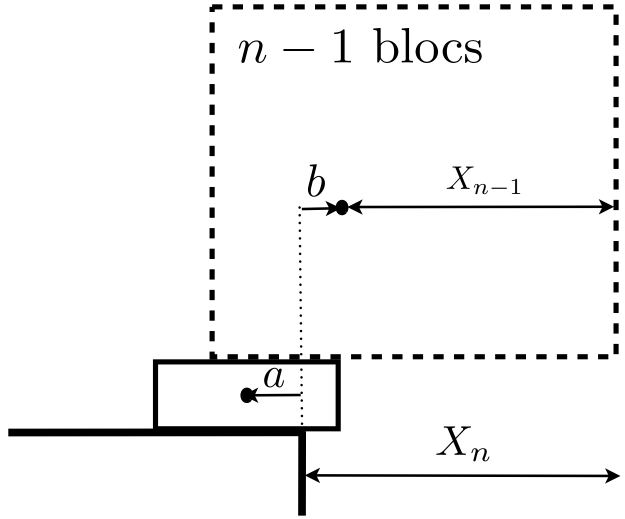
$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Théorème : Le plus grand dépassement possible d'une pile de n blocs ($n \geq 1$) est :

$$X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur n le nombre de blocs
- Soit $P(n) =$ "le plus grand dépassement possible d'une pile de n blocs ($n \geq 1$) est $1/2 + 1/4 + \ldots + 1/(2n)$".
- *Cas de base ($n = 1$) :* Avec un seul bloc, le dépassement maximum est $X_1 = 1/2$ et donc $P(1)$ est vrai.
- *Cas inductif :*
  - Supposons $P(n-1)$ vrai pour un $n \geq 2$ pour démontrer que $P(n)$ est vrai.
  - Une pile de n blocs peut être vue comme une pile de $n - 1$ blocs posée sur un bloc.



- Pour avoir un dépassement maximal, on a nécessairement que :
  1. les $n-1$ blocs supérieurs ont un dépassement maximal noté X_{n-1},
  2. Le centre de masse des n blocs se trouve juste au dessus du bord de la table,
  3. Le centre de masse des $n-1$ blocs supérieurs se trouve juste au dessus du bord droit du bloc inférieur

  (sinon, on pourrait obtenir un dépassement supérieur en changeant la disposition du système)

- Soient a la position du centre de masse du bloc inférieur et b la position du centre de masse des $n-1$ blocs, relatives au bord de la table.
- Par 2, on a $a.1 + b.(n-1) = 0$. Par 3, on a $b = a + 1/2$. En combinant les deux, on obtient $b = 1/(2n)$.
- Finalement :

$$X_n \quad = \quad X_{n-1} + b = X_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

en exploitant le fait que $P(n)$ est vrai.

- Par induction, $P(n-1)$ est vrai pour tout $n \geq 1$. $\square$

Exemple : Avec 4 blocs, on a

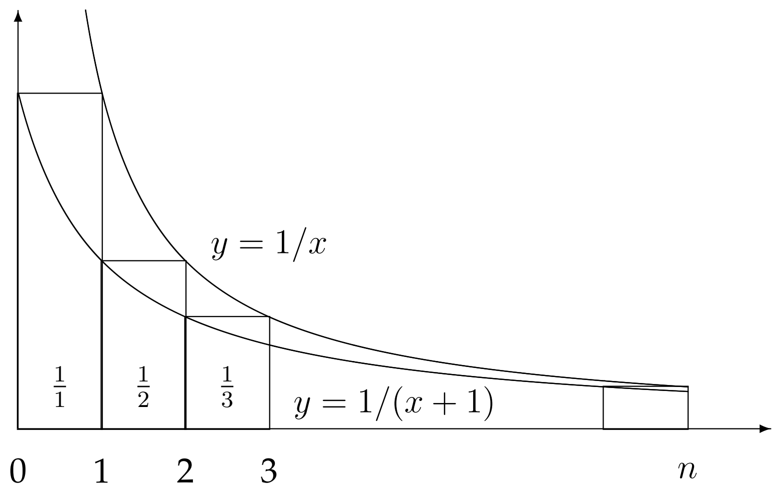
$$X_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 25/24 > 1.$$

Il est donc possible de placer un bloc entier en dehors de la table.

Série harmonique

Définition : $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est une *série harmonique*. H_n est le n-ème nombre harmonique.

La série harmonique n'a pas de solution analytique. Des bornes inférieures et supérieures peuvent cependant être déterminées par intégration.



$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx &\leq H_n \leq & 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \\ [\ln(x+1)]_0^n &\leq H_n \leq & 1 + [\ln x]_1^n \\ \ln(n+1) &\leq H_n \leq & 1 + \ln(n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_n \sim \ln n$$

Définition : Soient deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On écrit $f(x) \sim g(x)$ ssi $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)/g(x) = 1$ (f et g sont *asymptotiquement équivalents*).

Remarque sur les produits

Les mêmes techniques peuvent être utilisées pour calculer des produits en utilisant le logarithme :

$$\prod f(n) = \exp\left(\ln\left(\prod f(n)\right)\right) = exp\left(\sum \ln f(n)\right).$$

Permet de borner $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$:

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{(n+1)}}{e^n}$$

Stirling's formula :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Notation asymptotique

Définition : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On écrit $f(x) = O(g(x))$ s'il existe des constantes x_0 et $c > 0$ telles que $|f(x)| \leq c.g(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

Propriété : On a $5x + 100 = O(x)$.

Démonstration : On doit trouver des constantes x_0 et $c > 0$ telles que $|5x + 100| \leq cx$ pour tout $x \geq x_0$. Soient $c = 10$ et $x_0 = 20$. On a

$$|5x + 100| \leq 5x + 5x = 10x$$

pour tout $x \geq 20$. $\square$

Propriété : On a $x = O(x^2)$.

Démonstration : On doit trouver des constantes x_0 et $c > 0$ telles que $|x| \leq c \cdot x^2$ pour tout $x \geq x_0$. Soient $c = 1$ et $x_0 = 1$. On a

$$|x| \leq 1 \cdot x^2$$

pour tout $x \geq 1$. $\square$

Propriété : On a $x^2 \neq O(x)$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons qu'il existe des constantes x_0 et $c > 0$ telles que

$$|x^2| \leq c \cdot x$$

pour tout $x \geq x_0$. On doit donc avoir

$$x \leq c$$

pour tout $x \geq x_0$, ce qui est impossible à satisfaire pour $x = \max(x_0, c+1)$. $\square$

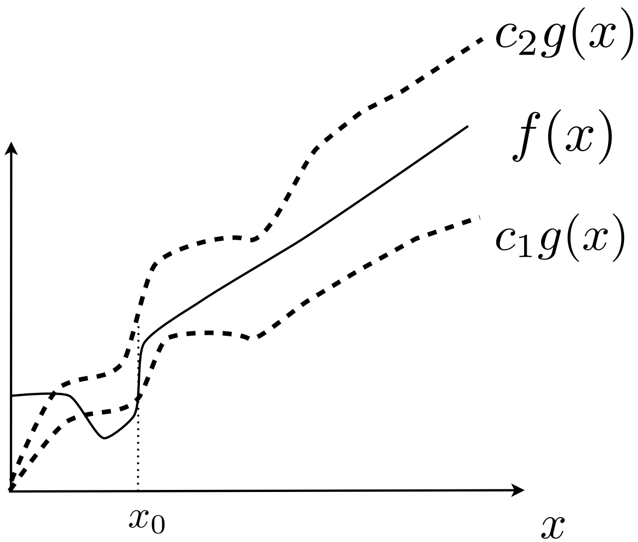
Notations Ω, Θ

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions :

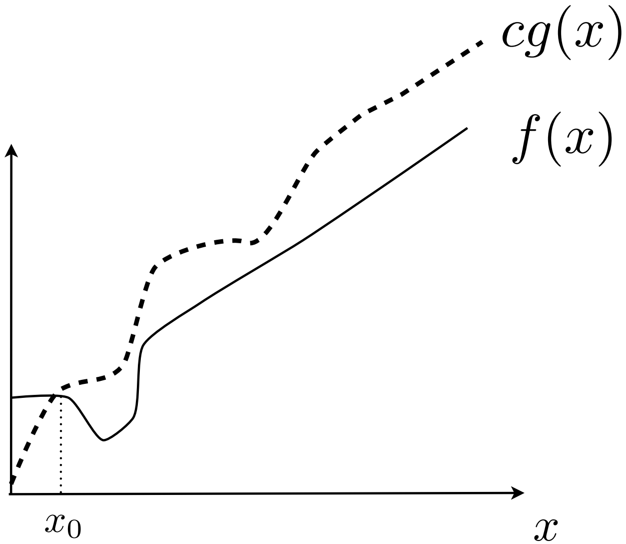
- $f(x) = \Omega(g(x))$ s'il existe des constantes x_0 et $c > 0$ telles que $f(x) \geq c.g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq x_0$.
  (*borne inférieure*)
- $f(x) = \Theta(g(x))$ s'il existe des constantes x_0, c_1 et $c_2 > 0$ telles que $0 \leq c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ pour tout $x \geq x_0$.
  (*équivalence asymptotiquement à un facteur près*)

Propriétés :

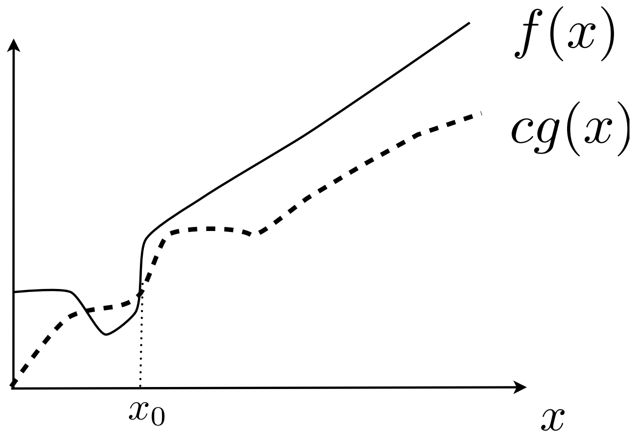
- $f(x) = \Omega(g(x)) \Leftrightarrow g(x) = O(f(x))$
- $f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = O(g(x))$ et $f(x) = \Omega(g(x))$
- $f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = \Omega(f(x))$



$f(x) = \Theta(g(x))$



$f(x) = O(g(x))$



$f(x) = \Omega(g(x))$

Remarques

- Dans beaucoup de textes, on retrouve la notation O alors que Θ serait plus approprié.
- "$O(g) = f$" n'a pas de sens
(Sinon $2n = O(n) \Rightarrow 1 = 2$)
- Parfois, on écrit $f \in O(g)$ à la place de $f = O(g)$ où $O(g)$ désigne alors l'ensemble des fonctions f telles que $f = O(g)$.
- Une équation du type :

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$$

signifie qu'il existe une fonction $f(n) = \Theta(n)$ telle que :

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n).$$