Chapitre 8

Fonctions génératrices

Introduction

Les fonctions génératrices forment un lien entre l'analyse mathématique des fonctions à valeurs réelles, et les problèmes portant sur les *séquences*.

Motivation : Utiliser les fonctions génératrices pour résoudre des récurrences linéaire et des problèmes de dénombrement d'ensembles.

Notation : Dans ce chapitre, on dénotera les *séquences* en utilisant les symboles $\langle \ldots \rangle$.

Définition

Définition : La *fonction génératrice ordinaire* correspondant à la séquence infinie $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \rangle$ est la *série formelle*

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Notation :

$$\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

Remarque : Les fonctions génératrices ne seront que très rarement évaluées. Dans ce chapitre, les questions de convergence n'ont donc en général pas d'importance.

Exemples :

- $\langle 0, 0, 0, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 0$
- $\langle 1, 0, 0, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1$
- $\langle 3, 2, 1, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \cdots = 3 + 2x + x^2$

Rappel : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

On a donc :

- $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right) =$
$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) - x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$
- $\langle 1, a, a^2, a^3, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \frac{1}{1-ax}$
- $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

Multiplication par une constante

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors

$$\langle cf_0, cf_1, cf_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow c \cdot F(x).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \langle cf_0, cf_1, cf_2, \ldots \rangle &\longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} cf_n x^n \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = c \cdot F(x) \end{aligned}$$

$\square$

Addition

Propriété : Si

$$\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x) \quad \text{et} \quad \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow G(x),$$

alors $\quad \langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x) + G(x).$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\
&= \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\
&= \quad F(x) + G(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemples

- Multiplication par une constante :

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

En multipliant la fonction génératrice par 2 :

$$\langle 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \ldots = \frac{2}{1 - x^2}$$

- Addition :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & \langle & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1-x} \\ + & \langle & 1, & \text{-}1, & 1, & \text{-}1, & 1, & \text{-}1, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1+x} \\ \hline & \langle & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & \ldots & \rangle & \longleftrightarrow & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \\ & & & & & & & & & & & = \frac{2}{1-x^2} \end{array}$$

Décalage vers la droite

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors

$$\langle \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ zéros}}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow x^k \cdot F(x).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \langle \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k \text{ zéros}}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+k} \\ &= \quad x^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \;=\; x^k F(x) \end{aligned}$$

$\square$

Dérivation

Propriété : Si $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$, alors

$$\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow F'(x).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots \rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1} \\
&= \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\
&= \quad \frac{d}{dx} F(x)
\end{aligned}$$

$\square$

(Dérivation = multiplication par l'index et décalage vers la gauche)

Application

Exercice : Trouver une fonction génératrice pour la séquence $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$.

Réponse : Soit $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a successivement

- $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$
- $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle \longleftrightarrow F'(x)$
- $\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle \longleftrightarrow x \cdot F'(x)$
- $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow (x \cdot F'(x))'$
- $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow x \cdot (x \cdot F'(x))'$.

En développant, on obtient $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow \dfrac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}$.

Produit

Propriété :

Si $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x)$ et $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow B(x)$, alors

$$\langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x) \cdot B(x),$$

où

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

Démonstration : Soient $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, on a

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Coefficients c_n :

	$b_0 x^0$	$b_1 x^1$	$b_2 x^2$	$b_3 x^3$	$\cdots$
$a_0 x^0$	$a_0 b_0 x^0$	$a_0 b_1 x^1$	$a_0 b_2 x^2$	$a_0 b_3 x^3$	$\cdots$
$a_1 x^1$	$a_1 b_0 x^1$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$\cdots$	
$a_2 x^2$	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$\cdots$		
$a_3 x^3$	$a_3 b_0 x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

($\langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$ est appelée la *convolution* des séquences $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ et $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$)

Sommation

Propriété : Si $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x)$, alors

$$\langle s_0, s_1, s_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{A(x)}{1-x} \text{ où } s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \text{ pour } n \geq 0.$$

Démonstration : On a :

$$\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Par la règle du produit, le $n$ième terme de $A(x)/(1-x)$ est donné par :

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

$\square$

Exemple : somme des carrés

Supposons qu'on veuille calculer $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$ (voir chapitre 5).

On sait que (slide 354) :

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}$$

Par la propriété précédente :

$$\langle s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle \longleftrightarrow \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^4}$$

s_n est donc le coefficient de x^n dans $\frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^4}$.

Extraction des coefficients

Propriété (séries de Taylor) : Si $F(x)$ est la fonction génératrice pour la séquence

$$\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle,$$

alors

$$f_0 = F(0), \quad f_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \text{ pour } n \geq 1$$

Démonstration :
Directe en dérivant $F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. $\square$

Exemple :

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-0)^{n+1}} = 1$$

Exemple : somme des carrés

- Calculons le $n$ième terme de
$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4}.$$
- Par les propriétés d'addition et de décalage vers la droite, le coefficient de x^n dans $F(x)$ est donc le coefficient de x^{n-1} dans $\frac{1}{(1-x)^4}$ et le coefficient de x^{n-2} dans $\frac{1}{(1-x)^4}$.
- Soit $G(x) = 1/(1-x)^4$,
$$G^{(n)}(x) = \frac{(n+3)!}{6(1-x)^{n+4}} \Rightarrow \frac{G^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$
- Finalement :
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Résolution de récurrence

Principe général :

- Trouver une fonction génératrice pour la récurrence
- Extraire une formulation analytique du *n*ième coefficient

Illustration sur la séquence de Fibonacci :

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{(pour } n \geq 2\text{)} \end{aligned}$$

Première étape : trouver $F(x)$ tel que

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x)$$

Par définition de $F(x)$:

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4.$$

Par définition des nombres de Fibonacci :

$$\langle f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots \rangle = \langle 0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \ldots \rangle$$

Trouvons une fonction génératrice pour le membre de droite (par la règle d'addition) :

$$\begin{array}{cllllllcl}
 & \langle & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots \rangle & \longleftrightarrow & x \\
 & \langle & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & \ldots \rangle & \longleftrightarrow & xF(x) \\
+ & \langle & 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & \ldots \rangle & \longleftrightarrow & x^2 F(x) \\
\hline
 & \langle & 0, & \underbrace{1 + f_0}_{1}, & f_1 + f_0, & f_2 + f_1, & f_3 + f_2, & \ldots \rangle & \longleftrightarrow & x + xF(x) + x^2 F(x)
\end{array}$$

On a donc :

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x),$$

qui donne :

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Deuxième étape : trouver une formulation analytique pour le coefficient de x^n dans la série de puissance de $\frac{x}{1-x-x^2}$.

Extraction des coefficients

Calculons la décomposition en fractions partielles de $F(x)$:

- Factorisons le dénominateur :

$$(1 - x - x^2) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x),$$

  où $\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\alpha_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

- Trouvons A_1 et A_2 tels que :

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 x}.$$

  En prenant quelques valeurs de x, on obtient :

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ A_2 = \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

En substituant :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right).$$

Puisque

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots,$$

on obtient

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+\alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \ldots) - (1+\alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \ldots)\right)$$

Par identification :

$$f_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Dénombrement à l'aide de fonctions génératrices

Rappel (Binôme de Newton) : $(a+b)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n a^{k-n} b^n$.

Cas particulier : $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n x^n$.

Conclusion : $\langle C_k^0, C_k^1, C_k^2, \ldots, C_k^k, 0, 0, 0, \ldots \rangle \longleftrightarrow (1+x)^k$.

Autrement dit, le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^k$ est le nombre de façons de choisir n élements distincts dans un ensemble de k éléments.

Exemples :

- Le coefficient de x^2 est C_k^2.
- Le coefficient de x^{k+1} est 0.

Convolution

Principe de convolution (version intuitive) : *La fonction génératrice pour le choix d'éléments dans une union d'ensembles disjoints est le produit des fonctions génératrices pour le choix dans chacun de ces ensembles.*

Exemple 1 :

- La fonction génératrice pour le choix d'éléments (sans répétition) dans le singleton $\{a_1\}$ est $1 + x$.
- Il en est de même pour $\{a_2\}$.
- Par le principe de convolution, la fonction génératrice pour le choix d'éléments (sans répétition) dans $\{a_1, a_2\}$ est

$$(1 + x) \cdot (1 + x) = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Exemple 2 : La fonction génératrice pour le choix d'éléments (sans répétition) dans l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ est

$$\underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)}_{k \text{ fois}} = (1+x)^k,$$

ce qui confirme le résultat du transparent 318.

Propriété (Convolution) : Soient

- $A(x)$ la fonction génératrice pour le choix d'éléments dans un ensemble $\mathcal{A}$, et
- $B(x)$ la fonction génératrice pour le choix d'éléments dans un ensemble $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjoints, alors la fonction génératrice pour le choix d'éléments dans l'union $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est $A(x) \cdot B(x)$.

Remarque : Ce qu'on appelle "*choix*" dans le théorème n'est pas bien précisé. La propriété de convolution reste valide pour *beaucoup* d'interprétations de ce choix.

Exemples :

- on peut ou non autoriser les répétitions,
- on peut autoriser les répétitions arbitraires, ou les limiter,
- etc.

Seules restrictions :

- l'ordre dans lequel les éléments sont sélectionnés ne doit pas avoir d'importance ;
- les restrictions sur le choix d'éléments dans les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ doivent être d'application pour le choix d'éléments dans l'ensemble $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Démonstration de la propriété de convolution :

- Soient $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ et
  $$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$
- Par la règle du produit, on a
  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$
- Choisir n éléments de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ revient à choisir j élements de $\mathcal{A}$ (a_j manières de les choisir) et $n - j$ éléments de $\mathcal{B}$ (b_{n-j} manières de les choisir). Comme $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on obtient

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

$\square$

Choix avec répétition

Question : De combien de façons peut-on choisir n éléments (avec répétition) lorsque l'on a k sortes d'éléments disponibles ?

Réponse :

- S'il n'y a qu'une seule sorte d'éléments :
  - une seule façon de choisir 0 élément,
  - une seule façon de choisir 1 élément,
  - une seule façon de choisir 2 élements,
  - etc.

La fonction génératrice est donc

$$\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

- Si on a k sortes d'éléments, on obtient, par la propriété de convolution, la fonction génératrice suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}}_{k \text{ fois}} = \frac{1}{(1-x)^k}$$

- Le nombre cherché est donc le coefficient de x^n dans le développement en série de $\dfrac{1}{(1-x)^k}$.

- Soit $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k}$.
- On obtient
  - $g'(x) = k(1-x)^{-k-1}$
  - $g''(x) = k(k+1)(1-x)^{-k-2}$
  - $g'''(x) = k(k+1)(k+2)(1-x)^{-k-3}$
  - ...
  - $g^{(n)}(x) = k(k+1)\cdots(k+n-1)(1-x)^{-k-n}$
- Le coefficient cherché est donc

$$\begin{aligned} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!} \\ &= C_{k+n-1}^{n}. \end{aligned}$$

Un problème de dénombrement “impossible”

Problème : De combien de manières peut-on composer un panier avec n fruits (pommes, bananes, oranges et fraises) en respectant les contraintes suivantes ?

- Le nombre de pommes doit être pair ;
- Le nombre de bananes doit être un multiple de 5 ;
- Il y a au plus 4 oranges ;
- Il y a au plus 1 fraise.

Exemple : Il existe 7 façons de composer un panier de 6 fruits :

Pommes	6	4	4	2	2	0	0
Bananes	0	0	0	0	0	5	5
Oranges	0	2	1	4	3	1	0
Fraises	0	0	1	0	1	0	1

Réponse :

- Fonction génératrice pour le choix des pommes :

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

- Fonction génératrice pour le choix des bananes :

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{5n} = \frac{1}{1-x^5}.$$

- Fonction génératice pour le choix des oranges :

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

- Fonction génératrice pour le choix des fraises :

$$F(x) = 1 + x.$$

- Par la propriété de convolution, la fonction génératrice pour la composition d'un panier de fruits est

$$\begin{aligned}
& P(x)B(x)O(x)F(x) \\
= \ & \frac{1}{(1-x^2)} \frac{1}{(1-x^5)} \frac{(1-x^5)}{1-x} (1+x) \\
= \ & \frac{1}{(1-x)^2} \\
= \ & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

- Le coefficient de x^n est toujours $n+1$.
- Il y a donc $n+1$ façons de composer un panier de n fruits.