Examen Final – Introduction à la Théorie de l'Informatique

INFO0006-1
31 Mai 2010

Nom :______________________________

Lisez les consignes avant de commencer l'examen :

– Commencez par inscrire vos nom, prénom et matricule en haut de chaque page. Vous pouvez détacher les feuilles d'examen si vous le souhaitez.

– !!!!Show all work, clearly and in order, if you want to get full credit. Si la manière dont vous arrivez à la solution n'est pas claire, vous risquez de perdre des points (même si la solution finale est correcte).

– Justifiez vos réponses de manière algébrique quand cela est possible afin d'obtenir un maximum de points.

– Entourez ou identifiez clairement vos réponses finales.

– Soyez brefs, concis et précis. Les propositions incorrectes ou hors-sujet vous feront perdre des points.

– Vous avez le droit d'utiliser 5 pages de notes recto-verso soit 10 faces au total. L'examen se déroule à livre fermé (hormis les 5 pages citées ci-dessus).

– Vous ne devez communiquer avec personne excepté les examinateurs pendant l'examen. Toute personne surprise à tricher recevra une note de 0/20 pour l'examen et s'expose à des sanctions.

– Cet examen comporte 6 problèmes (plus un bonus) pour un total de 100 points (plus 10 points bonus). Vérifiez que vous avez bien les 6 (+1) problèmes sur vos feuilles d'énoncé !

– Sauf indications contraires, tous les graphes sont simples (non mutligraphes) et non-orientés. Ils ne contiennent donc aucune boucle (arêtes dont les deux extrémités arrivent au même sommet) et ont au plus une arête joignant les deux même sommets.

– Bonne chance !

Nom :______________________________

Problème 1 (15 points) :
Un étudiant peut passer une heure à regarder des vidéos sur YouTube, deux heures à étudier pour un examen ou deux heures à travailler sur un projet.
Soit f_n le nombre de plannings possibles de n heures. L'ordre des tâches à de l'importance car l'étudiant se fatigue au cours de la journée.
Par exemple, $f_0 = 1$ (il n'y a qu'un planning de 0 heure : ()). $f_1 = 1$ car il n'y a qu'un planning d'une heure possible : (vidéos). $f_2 = 3$ (les planning possibles sont (vidéos, vidéos), (étude), et (projet)). De la même manière, $f_3 = 5$ (les 5 planning possibles sont (vidéos, vidéos, vidéos), (vidéos, étude), (vidéos, projet), (étude, vidéos) et (projet, vidéos)).

(a) (5 points) Exprimez f_n en utilisant une relation de récurrence et un nombre suffisant de cas de base.

(b) (10 points) Trouvez une expression réduite pour f_n en résolvant la récurrence sans utiliser les fonction génératrices.

Nom :______________________________

Problème 2 (40 points) :

(a) (15 points) *Soit $G = (V, E)$, un graphe connexe, et e, une arête dans E ; e est un pont si et seulement si la suppression de e rend le graphe G non-connexe.*
Soit $G = (V, E)$, un graphe connexe, et soit $e \in E$. Montrez que e est un pont si et seulement si aucun cycle de G ne contient e.

Nom :______________________________

(b) (10 points) Soit r, un entier positif et impair, et soit G = (V, E), un graphe tel que chaque sommet est exactement de degré r. Montrez que r divise $|E|$.

(c) (15 points) Soit un graphe de 9 sommets tel que chaque sommet est de degré 5 ou 6. Prouvez que au moins 5 sommets sont de degré 6 ou au moins 6 sommets sont de degré 5.

Problème 3 (10 points) : Supposons que nous devons choisir des fruits à l'épicerie selon les règles suivantes :

1. Seules les pommes, les bananes, les oranges et les pêches sont en vente.
2. Le nombre de pommes doit être pair.
3. Le nombre de bananes ne doit *pas* être supérieur à deux.
4. Le nombre d'oranges doit être un multiple de 3.
5. Le nombre de pêches doit être impair.

Donner une expression réduite du nombre de façon de choisir 0, 1, 2, 3, ... fruits en respectant ces règles et en utilisant les fonctions génératrices.

Problème 4 (15 points) :

(a) (5 points) Prenons un sac opaque qui contient exactement une pièce en bois. Cette pièce a une probabilité de $1/2$ d'être noire et de $1/2$ d'être blanche. Ajoutons une pièce blanche dans le sac et puis sélectionnons une pièce au hasard (chaque pièce a une chance égale d'être choisie). La pièce sortie est blanche. Quelle est la probabilité que la pièce qui reste dans le sac soit également blanche ?

(b) (10 points) Soit une ville où se trouvent 2 bars : A et B. Deux politiciens (X et Y) de partis politiques différents décident d'aller boire ce soir ; chacun choisit indépendant un bar et y va. Le politicien X n'a pas de préfèrence particulière, la probabilité qu'il choisisse le bar A (ou B) est donc égale à 0.5. Le politicien Y préfère le bar B. Il a donc une probabilité de 1/3 de choisir le bar A et une probabilité de 2/3 de choisir le bar B.

Si les deux politiciens se retrouvent dans le même bar, ils vont se battre et ont autant de chance l'un que l'autre de remporter la victoire (il y aura exactement un vainqueur). Si ils choisissent des bars différents, il n'y aura pas de combat. Dans le cas où il y a un combat, le vainqueur volera le chapeau du perdant et gardera le sien. (Si il n'y a pas de combat, les deux politiciens garderont leur chapeaux respectifs.)

Sachant que X a toujours sont chapeau à la fin de la nuit, quelle est la probabilité qu'il soit allé dans le bar A ?

Problème 5 (10 points) : Aline, Béatrice, Cécile, Delphine, Emilie, Fabienne et Géraldine veulent s'asseoir autour d'une table ronde.
Considérez que deux arrangements sont les mêmes si ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par rotation. (p.ex. (Aline, Béatrice, Cécile, Delphine, Emilie, Fabienne, Géraldine) est le même arrangement que (Béatrice, Cécile, Delphine, Emilie, Fabienne, Géraldine, Aline).)

De plus, Aline et Béatrice ne peuvent pas s'asseoir l'une à coté de l'autre et, si Cécile est assise à coté de Delphine, Delphine doit être assise à gauche de Cécile.

Combien y a t'il d'arrangements qui respectent ces conditions ?

Problème 6 (10 points) : Montrez qu'en prenant n'importe quel ensemble de 21 nombres naturels, non nécessairement distincts, il est possible d'en choisir 5 dont la somme est divisible par 5. Notez que l'ensemble des nombre naturels est $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Problème 7* (Pour un bonus de 10 points) : Montrez que pour n'importe quel ensemble de *17* nombres naturels, non nécessairement distincts, il est possible d'en choisir 5 dont la somme est divisible par 5.