

Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 3

Année académique 2011-2012

1. Dans le raisonnement suivant, où se trouve l'erreur ?

Faux théorème. Soit $G = (V, E)$, avec $|V| \geq 3$, un graphe dont tous les sommets sont au moins de degré 2. Le graphe G contient un cycle de longueur 3.

Fausse démonstration. La démonstration fonctionne par induction sur le nombre de sommets.

Cas de base : Si $|V| = 3$, le théorème est vrai. En effet, n'importe quel graphe avec 3 sommets de degrés supérieurs ou égaux à 2 est nécessairement un cycle de longueur 3.

Cas inductif : Soit G un graphe de n sommets pour lequel le théorème est vrai. On construit un nouveau graphe G' en ajoutant à G un nouveau sommet et au moins 2 arêtes incidentes à ce sommet. Puisque G contient un cycle de longueur 3, G' contient aussi un cycle de longueur 3.

Par induction, le théorème est vrai pour tout graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 3. \square

2. Soit G un graphe dont tous les sommets sont au moins de degré d . Démontrez que G contient un chemin de longueur d .

3. Soit G un graphe. Démontrez que

(a) si tous les sommets de G sont de degré 2, alors G contient un cycle.

(b) si G est non connexe, alors son complément est connexe.

Remarque : le complément d'un graphe (V, E) est le graphe

$$(V, \{\{x, y\} \mid x, y \in V \wedge x \neq y\} \setminus E).$$