Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 8

Année académique 2011-2012

1. De 1951 à 2008, les plaques d'immatriculation mises en circulation en Belgique (hors plaques spéciales) avaient les formes suivantes [1] :
   - de 1951 à 1961 : 1 lettre, 4 chiffres (dispositions possibles : A.1234, 1.A.234, 12.A.34, 123.A.4, 1234.A) ;
   - de 1962 à 1971 : 2 lettres, 3 chiffres (dispositions possibles : AB.123, 1.AB.23, 12.AB.3, 123.AB) ;
   - de 1971 à 1973 : 1 lettre, 3 chiffres, 1 lettre (A.123.B) ;
   - de 1973 à 2008 : 3 lettres, 3 chiffres (AAA-123).

   (a) Décrivez l'ensemble des plaques possibles en utilisant des unions ($\cup$) et des produits ($\times$), à partir des deux ensembles suivants :
   - $L = \{A, B, \ldots, Z\}$;
   - $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

   (b) Calculez la taille de cet ensemble.

2. Pour chaque situation ci-dessous, décrivez une bijection entre les deux ensembles mentionnés. L'existence d'une telle bijection prouve que les deux ensembles sont de la même taille.

   (a) L'ensemble des séquences de 30 bits avec dix "0" et vingt "1" et les chemins de $(0, 0)$ à $(10, 20)$ consistant en pas vers la droite (on augmente la première coordonnée) et en pas vers le haut (on augmente la seconde coordonnée).

   (b) M. et Mme Danchar ont 13 œufs au chocolats identiques pour leurs enfants, Lucie et Nicolas. Décrivez une bijection entre l'ensemble des manières de répartir ces 13 œufs entre les deux enfants et l'ensemble des séquences de 14 bits avec exactement un "1".

   (c) Le jour de Pâques, M. et Mme Danchar reçoivent un ami de leurs enfants, Benjamin. Décrivez une bijection entre l'ensemble des

1. Source : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Plaque_d'immatriculation_belge`.

répartitions possibles des 13 œufs en chocolat entre les 3 enfants et l'ensemble des séquences de 15 bits avec exactement deux "1".

(d) En réfléchissant, M. et Mme Danchar trouvent que chaque enfant devrait recevoir au moins deux œufs. Décrivez une bijection entre l'ensemble des répartitions possibles des œufs entre les enfants en respectant cette contrainte et l'ensemble des séquences de 9 bits avec exactement deux "1".

(e) Décrivez une bijection entre l'ensemble des séquences de 110 bits avec exactement 10 uns et les solutions naturelles de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \leq 100.$$

(f) Décrivez une bijection entre les solutions de l'inégalité précédente et l'ensemble des séquences $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ telles que

$$0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{10} \leq 100.$$

3. Démontrez les affirmations suivantes utilisant le principe des tiroirs. Pour chaque problème, identifiez les chaussettes, les tiroirs, et la règle qui assigne une chaussette à un tiroir.

   (a) Dans une pièce de 500 personnes, il en existe au moins deux qui ont la même date d'anniversaire.

   (b) Dans tout ensemble de 100 entiers, il en existe au moins deux dont la différence est un mutliple de 37.

   (c) Si on choisit 5 points au hasard dans un carré d'une unité, il y en a au moins deux distants de moins de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (d) Tout graphe (non orienté) de deux sommets ou plus a au moins deux sommets de même degré.

4. Dans un championnat de mathématiques, 80% des participants ont résolu le premier problème, 75% ont résolu le second et 70% le troisième. Démontrez que au moins 25% des participants ont résolu les trois problèmes.