

Chapitre 5

Théorie des graphes

Plan

1. Définitions
2. Connexité
3. Arbres et forêts
4. Distance et diamètre
5. Coloriage de graphes
6. Graphes bipartis et appariement
7. Réseaux de communication

Sources : MCS,ad chapitres 10 et 11.

Introduction

Définition : Un *graphe* est une paire $G = (V, E)$ où

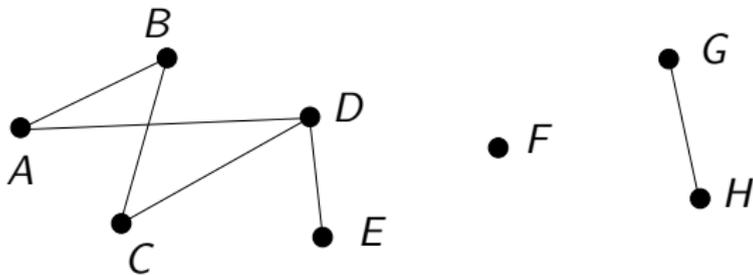
- ▶ V est un ensemble fini mais non vide de *sommets*,
- ▶ E est un ensemble d'*arêtes*, chacune d'entre-elles étant un ensemble de deux sommets.

Remarques : Les sommets sont parfois appelés des *nœuds* et les arêtes des *arcs*.

Exemple :

▶ $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

▶ $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{G, H\}\}$

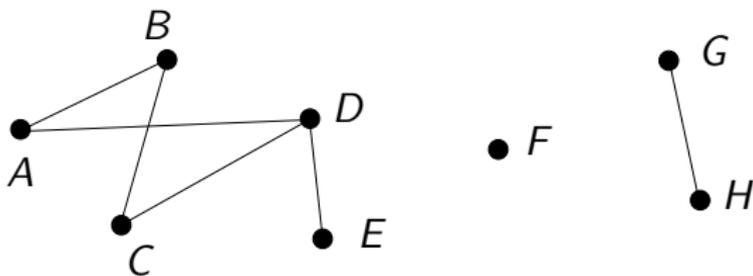


Notation : L'arête $\{A, B\} = \{B, A\}$ pourra être dénotée par $A-B$ ou par $B-A$.

Définitions : Dans un graphe $G = (V, E)$,

- ▶ deux sommets $A, B \in V$ sont *adjacents* s'ils sont reliés par une arête, i.e, si $A-B \in E$;
- ▶ une arête $A-B$ est *incidente* aux sommets A et B ;
- ▶ le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Exemple :



- ▶ A et B sont adjacents ;
- ▶ l'arête $B—C$ est incidente à B et à C ;
- ▶ le degré de A est 2 ;
- ▶ le degré de D est 3 ;
- ▶ le degré de F est 0 ;
- ▶ le degré de G est 1.

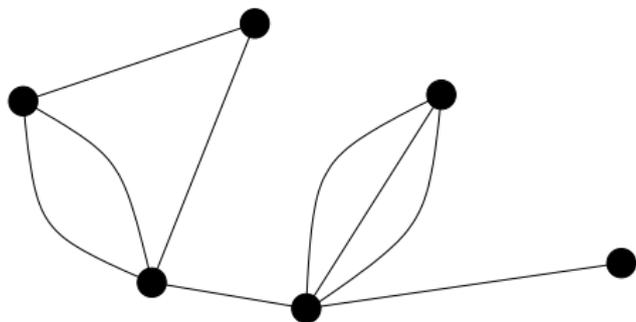
Sous-graphes

Définition : Soit un graphe $G = (V, E)$. Le graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* de G si les conditions suivantes sont réunies :

- ▶ $V' \subseteq V$ et $V' \neq \emptyset$;
- ▶ $E' \subseteq E$;
- ▶ les sommets composant les arêtes de E' doivent appartenir à V' .

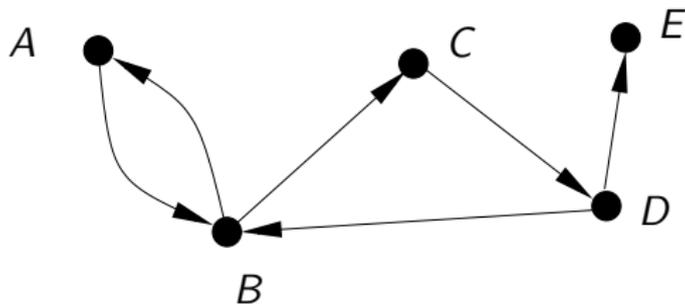
Extensions des graphes

Multigraphes : Une paire de sommets peut être connectée par *plus d'une arête*.



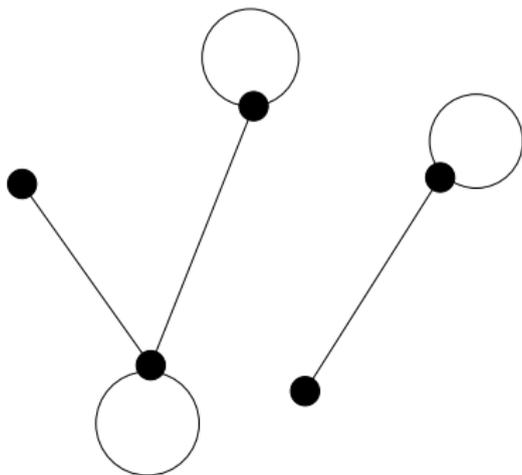
Graphes dirigés :

- ▶ Les arêtes sont des paires *ordonnées* de sommets.
- ▶ Une arête partant du sommet A et allant au sommet B est dénotée $A \longrightarrow B$.
- ▶ Le *degré intérieur* d'un sommet est le nombre d'arêtes arrivant à ce sommet.
- ▶ Le *degré extérieur* d'un sommet est le nombre d'arêtes sortant de ce sommet.



Le degré intérieur de D est 1 ; son degré extérieur est 2.

Boucles : On peut autoriser qu'un graphe contienne des boucles, c'est-à-dire qu'une arête ait pour extrémités le même sommet.



Notes :

- ▶ Des combinaisons sont possibles.
- ▶ Sauf lorsque cela sera spécifié expressément, un graphe sera toujours “simple” :
 - ▶ arêtes non dirigées,
 - ▶ pas de boucles,
 - ▶ au plus une arête entre deux sommets.

Applications

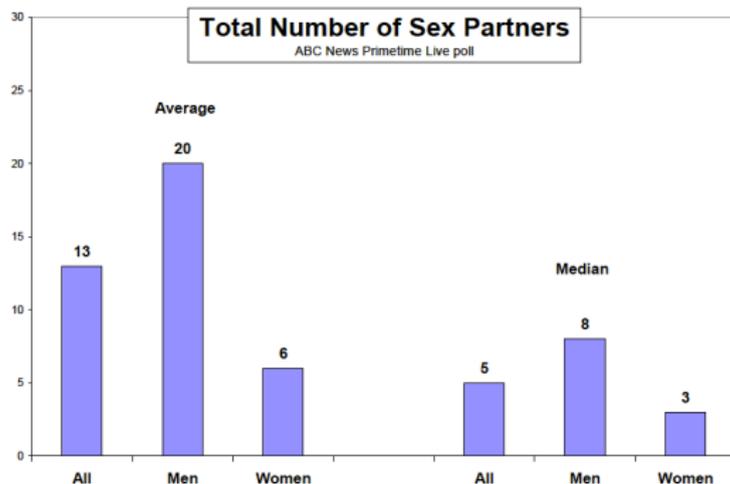
Les graphes peuvent être utilisés pour modéliser une grande variété de problèmes.

Exemples :

- ▶ cartes routières,
- ▶ connexions aériennes,
- ▶ WWW,
- ▶ réseaux sociaux,
- ▶ structures de données,
- ▶ etc.

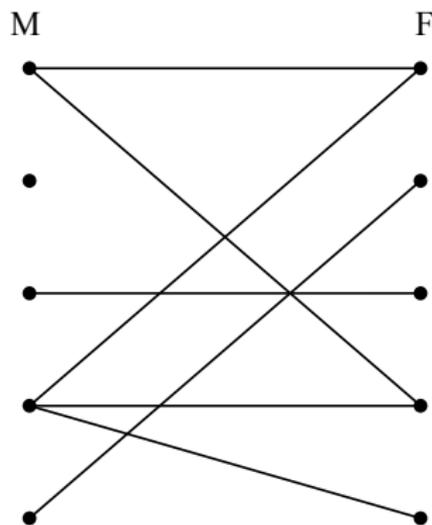
Un étude sur les comportements sexuels aux USA

- ▶ Une étude de la chaîne américaine ABC News a mené au résultat suivant :



- ▶ Ces résultats vous paraissent-ils sérieux ?

Le graphe des relations



- ▶ $G = (V, E)$ où V est divisé en deux sous-ensembles, les hommes M et les femmes F . Il y a une arête entre un homme et une femme s'ils ont eu une relation.
- ▶ Le graphe résultant est *biparti* (voir plus loin).

- ▶ Toute arête a exactement une extrémité dans M et une extrémité dans F . On a donc :

$$\sum_{x \in M} \deg(x) = \sum_{x \in F} \deg(x) = |E|$$

- ▶ En divisant les deux membres par $|M| \cdot |F|$, on obtient :

$$\frac{\sum_{x \in M} \deg(x)}{|M|} \cdot \frac{1}{|F|} = \frac{\sum_{x \in F} \deg(x)}{|F|} \cdot \frac{1}{|M|}$$

- ▶ qui donne directement :

$$\text{Avg. deg in } M = \frac{|F|}{|M|} \cdot \text{Avg. deg in } F$$

- ▶ Le rapport entre les degrés moyens ne dépend donc que du rapport entre les nombres d'hommes et de femmes dans la population
- ▶ D'après l'étude, on aurait :

$$20 = \frac{|F|}{|M|} \cdot 6,$$

c'est-à-dire 3 fois plus de femmes que d'hommes dans la population, ce qui est impossible.

Lemme des “poignées de main”

Lemme : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

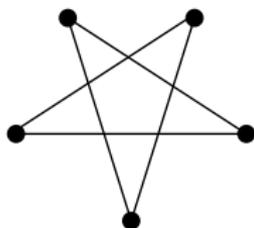
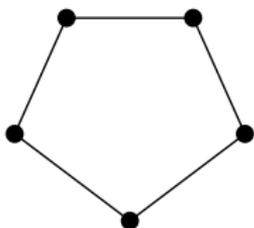
$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|$$

Démonstration : Chaque arête ajoute deux à la somme des degrés, un pour chacun de ses extrémités. □

Conséquences :

- ▶ Tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.
- ▶ Exemple : il n'existe pas de graphe avec trois sommets de degrés respectivement 2, 2, et 1.

Isomorphisme



Définition : Un *isomorphisme* entre des graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est une bijection $f : V_G \rightarrow V_H$ telle que :

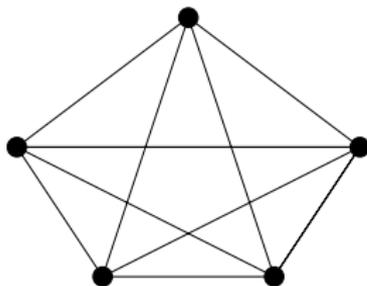
$$u-v \in E_G \text{ si et seulement si } f(u)-f(v) \in E_H$$

Deux graphes sont *isomorphes* quand il y a un isomorphisme entre eux.

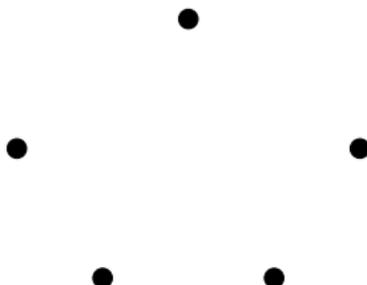
Des graphes isomorphes partagent la plupart de leurs propriétés : nombre de sommets, arêtes, patterns de degrés de sommets, etc.

Quelques graphes particuliers

- ▶ K_n , le **graphe complet** contenant n sommets :

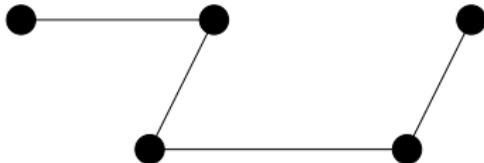


- ▶ Le **graphe vide** contenant n sommets :



- Un *chemin* est un graphe $G = (V, E)$ où
- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
 - $E = \{v_1-v_2, v_2-v_3, \dots, v_{n-1}-v_n\}$,
 - $n \geq 1$,
 - les sommets v_1, v_2, \dots, v_n sont tous distincts,
 - les sommets v_1 et v_n sont appelés les *extrémités* du chemin.

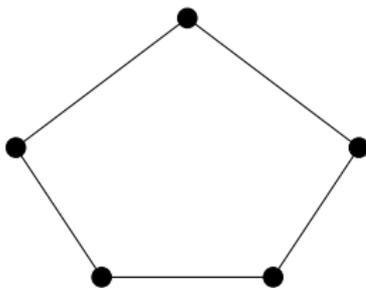
La *longueur* d'un chemin contenant n sommets est $n - 1$.



Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $u, v \in V$. On dit qu'il *existe un chemin de u à v dans G* s'il existe un sous-graphe de G qui est un chemin à extrémités u et v .

- ▶ Un *cycle* est un graphe $G = (V, E)$ où
 - ▶ $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
 - ▶ $E = \{v_1-v_2, v_2-v_3, \dots, v_{n-1}-v_n, v_n-v_1\}$,
 - ▶ $n \geq 3$,
 - ▶ les sommets v_1, v_2, \dots, v_n sont tous distincts.

La *longueur* d'un cycle contenant n sommets est n .



Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cycle dans G est un sous-graphe de G qui est isomorphe à un cycle pour une longueur $n \geq 3$.

Parcours

Définition : Un *parcours* d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence de sommets et d'arêtes de la forme suivante :

$$v_0 \text{ --- } v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{n-1} \text{ --- } v_n$$

où $v_i \text{ --- } v_{i+1} \in E$ pour $i = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

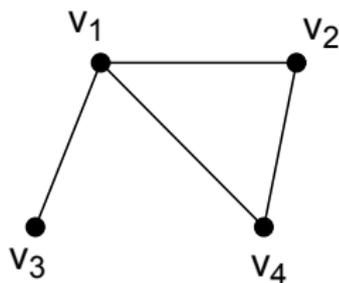
Si $v_0 = v_n$, alors le parcours est dit *fermé*. La longueur du parcours est égale au nombre d'arêtes n .

Remarques :

- ▶ Aussi appelé une *promenade*.
- ▶ Il existe un parcours entre deux sommets si et seulement si il existe un chemin entre ces sommets.
- ▶ **Théorème :** Le plus court parcours entre deux sommets est un chemin.

Matrices d'adjacence

- ▶ Un graphe $G = (V, E)$ avec pour sommets $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ peut être représenté par une matrice d'adjacence de taille $n \times n$. L'élément (i, j) de cette matrice vaut 1 si $v_i - v_j \in E$, 0 sinon.
- ▶ Par exemple :



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème : Soit G un graphe dirigé (potentiellement avec des boucles) avec pour sommets v_1, v_2, \dots, v_n et M sa matrice d'adjacence. $(M^k)_{ij}$ est égal au nombre de parcours de longueur k de v_i à v_j .

Démonstration :

- ▶ La démonstration fonctionne par induction sur k .
- ▶ Soit $P(k) = "(M^k)_{ij}$ est égal au nombre de parcours de longueur k de v_i à $v_j"$.
- ▶ *Cas de base* ($k = 1$) : Par définition de la matrice d'adjacence, $(M^1)_{ij} = M_{i,j} = 1$ s'il y a un chemin de longueur 1 entre v_i et v_j , 0 sinon.
- ▶ *Cas inductif* :
 - ▶ Supposons $P(k)$ vrai pour un $k \geq 1$.
 - ▶ Tout parcours de longueur $k + 1$ entre v_i et v_j est constitué d'un chemin de longueur k de v_i à un certain sommet v_m suivi d'une arête $v_m \rightarrow v_j$.

- ▶ Le nombre de parcours de longueur $k + 1$ entre v_i et v_j est donc égal à :

$$(M^k)_{i1}M_{1j} + (M^k)_{i2}M_{2j} + \dots + (M^k)_{in}M_{nj},$$

qui est précisément la valeur de $(M^{k+1})_{ij}$.

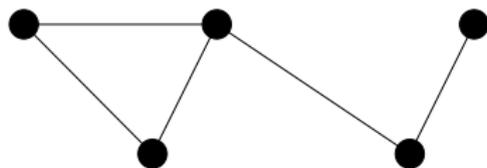
- ▶ Par induction, $P(k)$ est vrai pour $k \geq 1$. □

Application : La longueur du plus court chemin entre deux sommets v_i et v_j est la plus petite valeur de k tel que $M_{ij}^k \neq 0$.

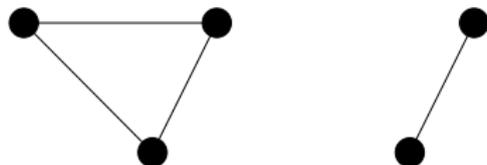
Graphes connexes

Définition : Un graphe $G = (V, E)$ est *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe un chemin à extrémités u et v dans G .

Exemple de graphe connexe :



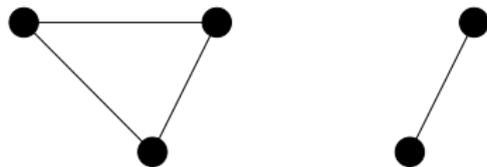
Exemple de graphe non connexe :



Composantes connexes

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe maximal, c'est-à-dire un sous-graphe connexe tel que l'ajout de tout sommet supplémentaire rend le sous-graphe non connexe.

Exemple :



Ce graphe contient 2 composantes connexes.

Théorème : Tout graphe $G = (V, E)$ contient au moins $|V| - |E|$ composantes connexes.

Démonstration :

- ▶ La démonstration fonctionne par induction sur le nombre d'arêtes.
- ▶ Soit $P(n) =$ "Tout graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = n$ contient au moins $|V| - n$ composantes connexes".
- ▶ *Cas de base :* Dans un graphe sans arête, tout sommet est une composante connexe. Il y en a donc exactement $|V|$.
- ▶ *Cas inductif :*
 - ▶ Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, tout graphe contenant n arêtes possède au moins $|V| - n$ composantes connexes.
 - ▶ Soit $G = (V, E)$ un graphe contenant $n + 1$ arêtes.

- ▶ **Enlevons** une arête arbitraire $u-v$ de G .
 - ▶ Soit G' le sous-graphe résultant.
 - ▶ Par hypothèse d'induction, G' possède au moins $|V| - n$ composantes connexes.
 - ▶ **Ajoutons** l'arête $u-v$ pour réobtenir le graphe G .
 - ▶ Si u et v étaient dans la même composante connexe de G' , alors G a le même nombre de composantes connexes que G' .
 - ▶ Sinon, les composantes connexes dans lesquelles se trouvaient u et v dans G' se voient fusionnées, tandis que les autres composantes connexes restent inchangées. G a donc au moins $|V| - n - 1 = |V| - (n + 1)$ composantes connexes.
- ▶ Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Corollaire : Tout graphe connexe contenant n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Remarques à propos de la démonstration :

- ▶ L'induction sur le nombre d'arêtes ou sur le nombre de nœuds marchent souvent (mais pas toujours !) pour faire une démonstration sur des graphes
- ▶ On est parti d'un graphe de $k + 1$ arêtes, on a retiré une arête arbitraire qu'on a ensuite remise dans le graphe.
- ▶ Cette approche est à préférer à une approche consistant à partir d'un graphe de k arêtes et à lui ajouter une arête supplémentaire (*Voir problème 11.30 de MCS*)

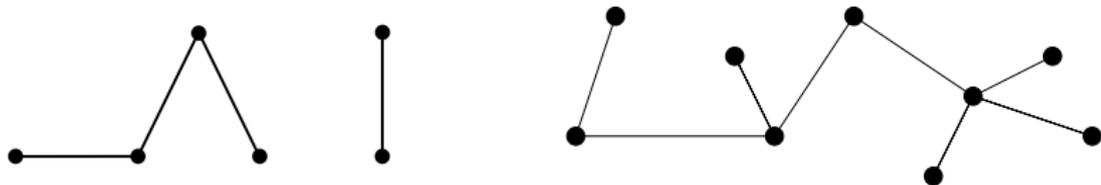
Arbres et forêts

Définition : Un graphe est *acyclique* si chacun de ses sous-graphes n'est pas un cycle.

Définition : Un graphe acyclique est appelé une *forêt*. Un graphe acyclique connexe est appelé un *arbre*.

Toute composante connexe d'une forêt est un arbre.

Exemple :



Définition : Dans un arbre, une *feuille* est un sommet de degré 1. (Dans l'exemple de droite, il y a 5 feuilles.)

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre. Entre chaque paire de sommets, il y a un chemin unique.

Démonstration :

Existence : Le graphe étant connexe, il y a au moins un chemin entre chaque paire de sommets.

Unicité :

- ▶ Par l'absurde, supposons qu'il existe deux chemins différents entre les sommets u et v .
- ▶ En commençant par u , soit x le premier sommet à partir duquel les chemins divergent, et soit y le sommet suivant qu'ils partagent.



- ▶ Il existe deux chemins entre x et y sans arête commune. Ils définissent un cycle.
- ▶ C'est une contradiction car les arbres sont acycliques. □

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre.

1. Tout sous-graphe connexe de T est un arbre.
2. Ajouter une arête crée un cycle.
3. Retirer une arête rend le graphe non connexe.

Démonstration :

1. Un cycle d'un sous-graphe est cycle du graphe complet. Donc, un sous-graphe d'un graphe acyclique est acyclique. S'il est connexe, c'est un arbre par définition.
2. Une arête supplémentaire $u-v$ entre le chemin unique à extrémités u et v crée un cycle.
3.
 - ▶ Supposons que l'on retire une arête $u-v$.
 - ▶ Le chemin unique entre u et v devait être $u-v$.
 - ▶ Il n'existe donc plus de chemin entre u et v .
 - ▶ Par conséquent, le graphe est devenu non connexe. □

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre contenant au moins 2 sommets. T contient au moins 2 feuilles.

Démonstration :

- ▶ Soit v_1, \dots, v_m la séquence de sommets d'un plus long chemin dans T .
- ▶ T contient au moins 2 sommets et est connexe. Donc, T contient au moins une arête.
- ▶ Il ne peut pas y avoir d'arête v_1-v_i , pour $2 < i \leq m$, sinon la séquence v_1, \dots, v_i formerait un cycle.
- ▶ Il ne peut pas y avoir d'arête $u-v_1$ où u n'est pas dans le chemin, sinon on pourrait allonger ce chemin.
- ▶ Seule arête incidente à v_1 : v_1-v_2 . v_1 est donc une feuille.
- ▶ Un argument symétrique permet de montrer que v_m est une deuxième feuille. □

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre. On a $|V| = |E| + 1$.

Démonstration :

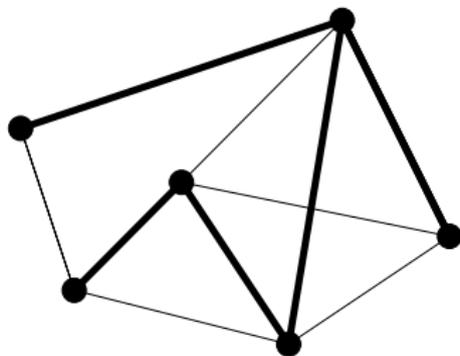
- ▶ La démonstration fonctionne par induction sur $|V|$.
- ▶ *Cas de base :* Si $|V| = 1$, on a $|E| + 1 = 0 + 1 = 1$.
- ▶ *Cas inductif :*
 - ▶ Supposons que le théorème soit vrai pour tout arbre contenant n sommets.
 - ▶ Soit $T = (V, E)$ un arbre contenant $n + 1$ sommets.
 - ▶ Soit v une feuille quelconque (elle existe car T contient au moins 1 arête, donc 2 sommets).
 - ▶ Soit $T' = (V', E')$ l'arbre obtenu en retirant v et son arête incidente.
 - ▶ On a $|V'| = |E'| + 1$.
 - ▶ En réinsérant v et son arête incidente, on obtient $|V| = |E| + 1$. □

Lemme : Un graphe $G = (V, E)$ est un arbre si et seulement si G est une forêt et $|V| = |E| + 1$.

Arbres couvrants

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un arbre $T = (V', E')$ est un *arbre couvrant* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

Exemple :



Théorème : Tout graphe connexe $G = (V, E)$ contient un arbre couvrant.

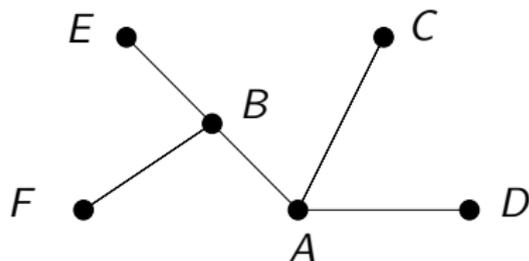
Démonstration :

- ▶ Par l'absurde, supposons que tout sous-graphe connexe $T = (V, E')$ de G soit nécessairement cyclique.
- ▶ Soit $T = (V, E')$ un de ces sous-graphes qui possède le plus petit nombre possible d'arêtes.
- ▶ T admet un cycle : $v_0 \text{---} v_1, v_1 \text{---} v_2, \dots, v_n \text{---} v_0$.
- ▶ Supposons que l'on retire l'arête $v_n \text{---} v_0$. Soit x, y une paire de sommets quelconque.
 - ▶ Si x et y étaient connectés par un parcours ne contenant pas $v_n \text{---} v_0$, ils le restent.
 - ▶ Sinon, ils restent connectés par un parcours contenant le reste du cycle.
- ▶ Contradiction : T avait le plus petit nombre possible d'arêtes.
- ▶ Donc, T est acyclique. □

Arbres particuliers

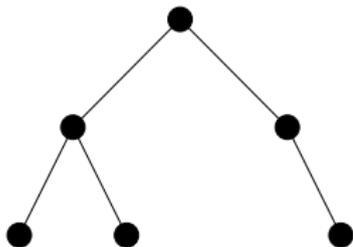
▶ **Arbre avec racine :**

- ▶ Un *arbre avec racine* est un arbre dans lequel un sommet est identifié comme étant la *racine*.
- ▶ Soit $u-v$ une arête d'un arbre avec racine telle que u est plus proche de la racine que v . Le sommet u est le *père* de v , et le sommet v est le *fil*s de u .
- ▶ **Exemple :**



Si A est la racine, alors E et F sont les fils de B , et A est le père de B , de C et de D .

- ▶ Un *arbre binaire* est un arbre avec racine dans lequel tout sommet a au plus 2 fils.



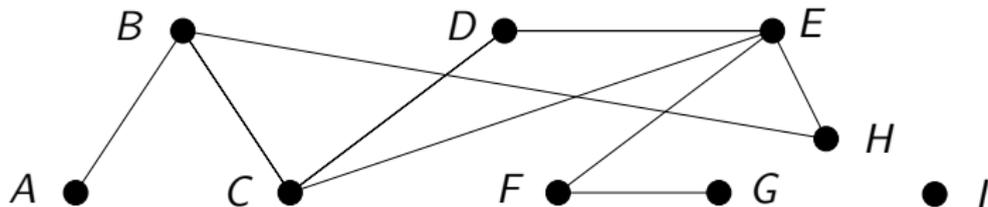
- ▶ Un arbre binaire est *ordonné* si les fils d'un sommet sont distingués : on les appelle *fils à gauche* et *fils à droite*.

Distance et diamètre

Définition :

- ▶ La *distance* entre deux sommets d'un graphe est la longueur du plus court chemin entre eux.
- ▶ Si un tel chemin n'existe pas, la distance entre les deux sommets est dite "infinie".

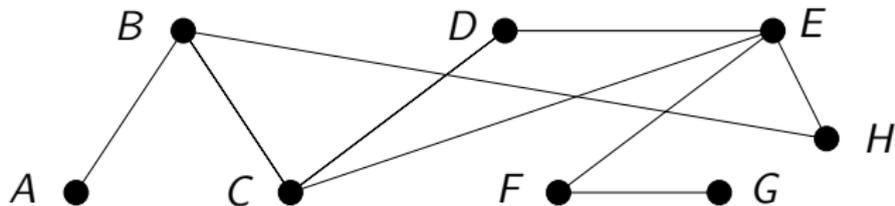
Exemple :



- ▶ la distance entre G et C est 3,
- ▶ la distance entre A et lui-même est 0,
- ▶ la distance entre I et n'importe quel autre sommet est infinie.

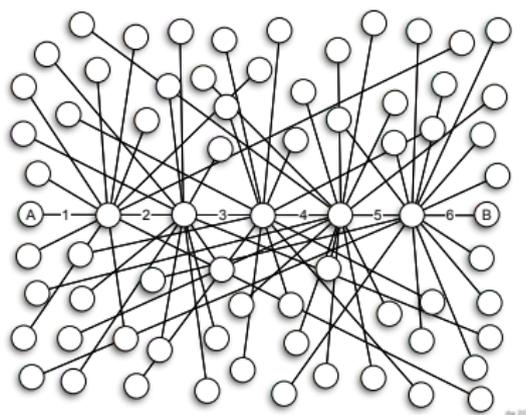
Définition : Le *diamètre* d'un graphe est la distance entre les deux sommets les plus éloignés.

Exemple :



- ▶ Les sommets qui sont les plus distants sont A et G.
- ▶ Leur distance est de 5.
- ▶ Le graphe a donc un diamètre de 5.

Six degrés de séparation



(wikipedia)

- ▶ Théorie selon laquelle deux personnes quelconques sur la planète peuvent être reliées au travers d'une chaîne d'au plus 6 relations.
- ▶ Ou de manière équivalente, le diamètre du réseau social global est au plus 6.
- ▶ Le distance moyenne a été mesuré à 6.5 (sur base de msn, facebook, etc.).

Théorème : Soit v un sommet arbitraire d'un graphe G . Si tout sommet est distant de v d'une distance au plus égale à d , alors le diamètre de G est borné par $2d$.

Démonstration :

- ▶ Soient x et y deux sommets quelconques de G .
- ▶ Il existe un chemin π_1 de longueur au plus égale à d entre x et v .
- ▶ Il existe un chemin π_2 de longueur au plus égale à d entre v et y .
- ▶ Soit z le sommet qui se trouve à la fois sur π_1 et sur π_2 , et qui est le plus proche possible de x . (Un tel z existe toujours car, au pire, il pourrait être v .)
- ▶ On obtient un chemin entre x et y de longueur au plus égale à $2d$ en joignant le segment de x et z à celui entre z et y . □

Illustration :

