Plan

Résolution de récurrences

Principe général (pour toute récurrence)

- Trouver une fonction génératrice $F(x)$ pour la séquence définie par le récurrence (en multipliant la récurrence par x^n et en sommant sur $\sum_{n=0}^{\infty}$)
- Extraire une formulation analytique pour $[x^n]F(x)$.

Illustration sur la séquence de Fibonacci :

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0 \\
f_1 &= 1 \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad (\text{pour } n \geq 2)
\end{aligned}
$$

Première étape : trouver $F(x)$ tel que

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \rangle \longleftrightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Soit la récurrence

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ (pour } n \geq 2)$$

En multipliant gauche et droite par x^n et en sommant sur n :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0 - x f_1 = x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0 - x f_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0 + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\
\Leftrightarrow \quad & F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x) \\
\Leftrightarrow \quad & F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

Deuxième étape : trouver une formulation analytique pour le coefficient de x^n dans la série de puissance de $\frac{x}{1-x-x^2}$.

Extraction des coefficients

Calculons la décomposition en fractions partielles de $F(x)$:

- Factorisons le dénominateur :

$$(1 - x - x^2) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x),$$

  où $\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\alpha_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

- Trouvons A_1 et A_2 tels que :

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 x}.$$

  En prenant quelques valeurs de x, on obtient :

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}},\ A_2 = \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

En substituant :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right).$$

Puisque

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots,$$

on obtient

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \ldots) - (1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \ldots)\right)$$

Par identification :

$$[x^n]F(x) = f_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Récurrences linéaires (homogènes, à coefficients constants)

Propriété : Soit une récurrence linéaire homogène de la forme générale $u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k}$ (pour $n \geq k$) et soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ la fonction génératrice associée à la séquence $\langle u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots \rangle$. On a

$$G(x) = \frac{U(x)}{V(x)},$$

où

$$\begin{array}{rcl} U(x) & = & P_{k-1}(x) - a_1 x P_{k-2}(x) - \ldots - a_{k-1} x^{k-1} P_0(x) \\ V(x) & = & 1 - a_1 x - a_2 x - \ldots - a_k x^k \\ P_i(x) & = & u_0 + u_1 x + \ldots + u_i x^i \ (i = 0, \ldots, k-1). \end{array}$$

NB :

- $V(\frac{1}{x}) = 0$ est l'équation caractéristique (voir transp. 377).
- $V(x)$ est indépendant des conditions initiales (pas $U(x)$).

Démonstration : En multipliant la récurrence par x^n, pour $n \geq k$:

$$\begin{aligned} u_n x^n &= a_1 u_{n-1} x^n + a_2 u_{n-2} x^n + \ldots + a_k u_{n-k} x^n \\ &= a_1 x u_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 u_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_k x^k u_{n-k} x^{n-k} \end{aligned}$$

En sommant sur $n \geq k$:

$$\begin{aligned} u_n x^n &= a_1 x \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} x^{n-k} \\ &= (a_1 x) \sum_{n=k-1}^{\infty} u_n x^n + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \end{aligned}$$

En posant $P_i(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_i x^i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} G(x) - P_{k-1}(x) &= a_1 x (G(x) - P_{k-2}(x)) + \ldots \\ &+ a_{k-1} x^{k-1} (G(x) - P_0(x)) + a_k x^k G(x). \end{aligned}$$

D'où on tire (*vérifier*) :

$$G(x) = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

□

Nombres de Catalan

Théorème : Soit la récurrence (transp. 347) :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} \text{ pour } n > 0. \end{aligned}$$

On a $b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

Démonstration : Soit $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ la fonction génératrice correspondant à la séquence $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle$. Par définition de b_n, on a :

$$\begin{aligned} B(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-k-1} \right) x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-k-1} \right) x^{n-1} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \right) x^n \text{ (car } b_0 = 1\text{)} \\ &= 1 + xB(x)^2 \text{ (par définition du produit).} \end{aligned}$$

$B(x)$ est donc solution de $xB^2(x) - B(x) + 1 = 0$, ce qui donne :

$$B(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } B(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Puisqu'on doit avoir $B(0) = b_0 = 1$, seule la première solution est acceptable. En utilisant la formule de Newton généralisée (transp. 415), on obtient

$$1-(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{1/2}(-4x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} C^n_{1/2}(-4x)^n,$$

et donc en divisant par $2x$:

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{2} C^n_{1/2}(-4)^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n)(-4)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots 5\cdots(2n-1)\cdot 2^N}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots 5\cdots(2n-1)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n} \\
&= \frac{1}{n+1} C^n_{2n}
\end{aligned}$$

Plan

Dénombrements

Beaucoup de problèmes de dénombrements peuvent être modélisés par des récurrences.

Les fonctions génératrices permettent de résoudre des récurrences et donc indirectement des problèmes de dénombrement.

Dans la suite du cours, on va voir comment utiliser des fonctions génératrices pour modéliser *plus directement* des problèmes de dénombrements.

Classes combinatoires

Problème général de dénombrement : Soit un ensemble $\mathcal{A}$ d'objets (au sens très large) et une fonction $|a|$ qui mesure la "taille" d'un élément de $\mathcal{A}$. On cherche à calculer a_n, le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de taille n.

Solution :

- On définit la séquence $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ et la fonction génératrice correspondante $A(x)$ qui est telle que :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{|a|}.$$

- On dérive une solution analytique pour $A(x)$. Deux approches :
  - On exploite une définition récursive des éléments de $\mathcal{A}$
  - On construit $\mathcal{A}$ à partir d'ensembles dont les fonctions génératrices sont connues
- On déduit a_n de $A(x)$ (par ex. en utilisant Taylor)

Application 1 : chaîne de caractères

On cherche à déterminer le nombre de séquences de N bits qui contiennent exactement k 1, que nous noterons $b_{N,k}$. Soit $\mathcal{B}_N$ l'ensemble des séquences de bits de longueur N et définissons la "taille" $|b|$ d'un élément $b \in \mathcal{B}_N$ par le nombre de 1 dans b.
Soit la fonction génératrice $B_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{N,k} x^k$. Etant donné qu'une séquence de N bits ($N > 1$) commence soit par 0, soit par 1, on a :

$$\begin{aligned} B_N(x) &= \sum_{b \in \mathcal{B}_N} x^{|b|} \\ &= \sum_{b \in \mathcal{B}_{N-1}} x^{|b|} + \sum_{b \in \mathcal{B}_{N-1}} x^{1+|b|} \\ &= (1+x) B_{N-1}(x) \end{aligned}$$

Puisque $B_1(x) = 1 + x$, on a :

$$B_N(x) = (1+x)^N,$$

dont on déduit (voir transp. 415) :

$$b_{N,k} = C_N^k$$

Application 2 : nombre d'arbres binaires

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des arbres binaires et soit $|B|$ le nombre de nœuds d'un arbre $B \in \mathcal{B}$.

Etant donné la définition récursive d'un arbre binaire, on a :

$$\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^b = \sum_{B \in \mathcal{B}} x^{|B|} && (1)\\
&= 1 + \sum_{B_L \in \mathcal{B}} \sum_{B_G \in \mathcal{B}} x^{|B_R|+|B_L|+1} && (2)\\
&= 1 + xB(x)^2 && (3)
\end{aligned}$$

(où le 1 provient de l'existence d'un seul arbre vide).

On en déduit donc (voir transp. 425) :

$$b_n = \frac{1}{N+1} C_{2N}^{N}$$

Opérations entre ensembles

Certaines opérations sur les ensembles peuvent se transposer à des opérations sur les fonctions génératrices.

Définition Soit deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

- $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ désigne la réunion disjointe de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (si un élément appartient aux deux ensembles, il sera copié deux fois dans $\mathcal{A} + \mathcal{B}$)
- $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ désigne le produit cartésien de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire l'ensemble des paires (a, b) où $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$)
- $\text{seq}(A) = \epsilon + \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \ldots$ est l'ensemble des séquences d'éléments de A (où ϵ représente la séquence de longueur 0).

Théorème : Soit $A(x)$ et $B(x)$ les fonctions génératrices énumérant les éléments de taille n dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement. On a :

1. $A(x) + B(x)$ est la fonction génératrice pour $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
2. $A(x) \cdot B(x)$ est la fonction génératrice pour $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$
3. $\frac{1}{1-A(x)}$ est la fonction génératrice pour $\text{seq}(\mathcal{A})$.

Démonstration :

1. Soit a_n et b_n le nombre d'éléments de taille n dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement, $a_n + b_n$ est le nombre d'éléments de taille n dans $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.
2. Le nombre d'objets de taille n dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est donné par :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

qui est le terme général de $A(x) \cdot B(x)$. On a aussi :

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x^{|\alpha| + |\beta|} = A(x) \cdot B(x).$$

3. De $\text{seq}(\mathcal{A}) = \epsilon + \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \ldots$, on en déduit que la fonction génératrice de $\text{seq}(\mathcal{A})$ est :

$$1 + A(x) + A(x)^2 + A(x)^3 + \ldots = \frac{1}{1 - A(x)}$$

$\square$

Applications

- Etant donné la définition d'un arbre binaire, l'ensemble des arbres binaires $\mathcal{B}$ peut se définir comme suit :

  $$\mathcal{B} = \{\emptyset\} + \{\mathbf{branch}(\emptyset, \emptyset)\} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$$

  La fonction génératrice de $\{\emptyset\}$ étant 1 et celle de $\{\mathbf{branch}(\emptyset, \emptyset)\}$ étant x, on obtient :

  $$B(x) = 1 + xB(x)^2$$

- Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des chaînes binaires. On a $\mathcal{B} = \mathrm{seq}(\{0, 1\})$. Puisque la fonction génératrice de $\{0, 1\}$ est $2x$, on a :

  $$B(x) = \frac{1}{1 - 2x},$$

  dont on déduit :

  $$b_n = [x^n]B(x) = 2^n,$$

  où b_n est le nombre de chaînes de bits de longueur n.

  Note : on a aussi $\mathcal{B} = \epsilon + \{0, 1\} \times \mathcal{B}$, où ϵ est la chaîne de longueur 0.

Applications : choix avec répétition

Question : De combien de façons peut-on choisir n éléments (avec répétition) lorsque l'on a k sortes d'éléments disponibles ?

Solution :

- Soit $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des ensembles d'éléments de la $i$ème sorte :

  $$\mathcal{A}_i = \{\epsilon, \{s_i\}, \{s_i, s_i\}, \{s_i, s_i, s_i\}, \ldots\}.$$

  La fonction génératrice correspondante est

  $$A_i(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

- Une ensemble d'éléments choisis parmi k sortes avec répétitions est un tuple pris dans l'ensemble :

  $$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_k$$

- On en déduit que le nombre recherché est le coefficient de x^n de la fonction génératrice : $A(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$

- Soit $A(x) = \dfrac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k}$.
- On obtient
  - $A'(x) = k(1-x)^{-k-1}$
  - $A''(x) = k(k+1)(1-x)^{-k-2}$
  - $A'''(x) = k(k+1)(k+2)(1-x)^{-k-3}$
  - $\dots$
  - $A^{(n)}(x) = k(k+1)\cdots(k+n-1)(1-x)^{-k-n}$
- Le coefficient cherché est donc

$$\begin{aligned}\frac{A^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!} \\ &= C_{k+n-1}^{n}.\end{aligned}$$

Applications : comptage difficile

Problème : De combien de manières peut-on composer un panier avec n fruits (pommes, bananes, oranges et fraises) en respectant les contraintes suivantes ?

- Le nombre de pommes doit être pair ;
- Le nombre de bananes doit être un multiple de 5 ;
- Il y a au plus 4 oranges ;
- Il y a au plus 1 fraise.

Exemple : Il existe 7 façons de composer un panier de 6 fruits :

Pommes	6	4	4	2	2	0	0
Bananes	0	0	0	0	0	5	5
Oranges	0	2	1	4	3	1	0
Fraises	0	0	1	0	1	0	1

Ce type de problème est difficile à résoudre sans les fonctions génératrices.

Réponse :

- Fonction génératrice pour le choix des pommes :

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

- Fonction génératrice pour le choix des bananes :

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{5n} = \frac{1}{1-x^5}.$$

- Fonction génératice pour le choix des oranges :

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

- Fonction génératrice pour le choix des fraises :

$$F(x) = 1 + x.$$

- Par la propriété de convolution, la fonction génératrice pour la composition d'un panier de fruits est

$$\begin{aligned} & P(x)B(x)O(x)F(x) \\ = \ & \frac{1}{(1-x^2)}\frac{1}{(1-x^5)}\frac{(1-x^5)}{1-x}(1+x) \\ = \ & \frac{1}{(1-x)^2} \\ = \ & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

- Le coefficient de x^n est toujours $n+1$.
- Il y a donc $n+1$ façons de composer un panier de n fruits.

Résumé

Les fonctions génératrices constituent un outil très puissant pour résoudre des récurrences et des problèmes de dénombrement

Elles sont particulièrement utiles pour calculer la complexité en moyenne d'algorithmes, qui nécessite de calculer le coût moyen sur toutes les structures d'un certain type de taille n (arbres, graphes, séquences, etc.).

Il existe aussi des fonctions génératrices *exponentielles* qui permettent de prendre en compte des étiquetages d'objets combinatoires (par ex., des arbres avec des noeuds coloriés).

Pour en savoir plus :

- R. Sedgewick et P. Flagolet, *Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, 1995/2012. `http://aofa.cs.princeton.edu/`.