Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 11

Année académique 2012-2013

1. Trouvez une solution analytique pour les récurrences suivantes (sans utiliser les fonctions génératrices) :
   (a) • $x_0 = 0$
       • $x_1 = 1$
       • $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 6$ (avec $n > 1$).
   (b) • $x_0 = 0$
       • $x_1 = 1$
       • $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + n$ (avec $n > 1$).

2. Trouvez une solution analytique pour les fonctions génératrices correspondant aux séquences ou sommes suivantes :
   (a) $\langle 0, 0, 0, 1, 2, 0, 8, 16, 32, 64, \ldots \rangle$;
   (b) $\langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \rangle$.
   (c) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 4)x^n$
   (d) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)5^{n/2}x^n$;
   (e) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, où $f_n = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)$

3. Soit la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie récursivement comme suit :
   • $f(0) = 1$;
   • $f(1) = 6$;
   • $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2) + 4$.

   (a) Trouvez une solution analytique pour la fonction génératrice suivante :
   $$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n.$$

(b) Trouvez une solution analytique pour $f(n)$.
Suggestion : Trouvez a, b, c, d, e, g tels que

$$G(x) = \frac{a}{1+dx} + \frac{b}{1+ex} + \frac{c}{1+gx}.$$