

Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 10

Année académique 2013-2014

1. On décide de placer 1.000 euros sur un compte bancaire. A la fin de chaque mois, on gagne 1% d'intérêt et on retire immédiatement 5 euros.

Soit M_n la somme d'argent se trouvant sur le compte après n mois.

En utilisant la méthode "Plug-and-Chug", trouvez une solution analytique pour M_n .

2. Soit le langage $\text{RecMatch} \subset \{[,]\}^*$ défini récursivement comme suit :
 - La chaîne vide $\lambda \in \text{RecMatch}$;
 - Si s et t sont dans RecMatch , alors $[s]t$ aussi.

La longueur d'un élément s de RecMatch est le nombre de crochets gauches et droits dans s . Soit c_n le nombre d'éléments s dans RecMatch de longueur n . Exprimer c_n sous la forme d'une récurrence (sans la résoudre) et vérifier que $c_n = 0$ dès que n est impair.

3. Trouvez une solution analytique exacte pour les récurrences suivantes :

(a)

- $u_0 = 2$
- $u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u_{n-1-p} u_p$ pour $n > 0$

(b)

- $a_1 = 1$
- $na_n = (n-2)a_{n-1} + 2$ pour $n > 1$

(c)

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$
- $x_n = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{x_{n-1} + x_{n-2}}$ (avec $n > 2$)

(Votre solution pourra faire intervenir les nombres de Fibonacci)

4. Soit la récurrence :

- $T(1) = 0$
- $T(n) = 6T(n/3) + 2n$ (où $n > 1$ est une puissance de 3).

- (a) Sans résoudre la récurrence, montrez que $T(n) = O(n^2)$.
- (b) Trouvez une solution analytique exacte à la récurrence.
- (c) Vérifier que votre solution satisfait à la borne obtenue par le master theorem.