

Structures de données et algorithmes

Examen écrit, 8 juin 2013

Livres fermés. Durée : 3h30.

Remarques

- Répondez à chaque question sur une feuille **séparée**, sur laquelle figurent votre nom et votre section.
- Soyez bref et concis, mais précis.
- Sauf mention explicite, toutes les complexités sont à décrire par rapport au temps d'exécution des opérations concernées. Soyez toujours le plus précis possible dans le choix de votre notation (Ω , O ou Θ).

Question 1

- (a) Ecrivez le pseudo-code d'un algorithme $\text{PARTITION3}(A, x_1, x_2, p, r)$ qui réorganise le sous-tableau $A[p..r]$ en 3 régions $A[p..q_1]$, $A[q_1 + 1..q_2 - 1]$, $A[q_2..r]$ sur base de deux valeurs pivots x_1 et x_2 telles que :
- $\forall A[i] \in A[p..q_1], A[i] \leq x_1$
 - $\forall A[j] \in A[q_1 + 1..q_2 - 1], x_1 < A[j] < x_2$
 - $\forall A[k] \in A[q_2..r], A[k] \geq x_2$.
- Cette fonction renverra la paire d'indices (q_1, q_2) obtenue suite au réarrangement.
- (b) Etudiez la complexité en temps de cet algorithme dans le meilleur et le pire cas.
- (c) Imaginez et expliquez un algorithme de tri exploitant la fonction PARTITION3 .

Question 2

- (a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire de recherche ?
- (b) Dessinez l'arbre binaire de recherche qui résulte de l'insertion des clés 16, 8, 15, 4, 42 et 23 (dans cet ordre).
- (c) Dessinez ensuite l'arbre qui résulte de la suppression des clés 16 et 8 (dans cet ordre).
- (d) Etablissez en utilisant les notations asymptotiques le lien qui existe entre la hauteur d'un arbre binaire (entier ou non) et le nombre de nœuds. Justifiez votre réponse.
- (e) Ecrivez une fonction $\text{VALIDBST}(x)$ permettant de vérifier que l'arbre binaire de racine x vérifie bien la propriété d'arbre binaire de recherche.
- (f) Donnez et justifiez la complexité de votre solution au meilleur et au pire cas en fonction du nombre de valeurs dans l'arbre.

Question 3

Huit îles se trouvent sur un lac. Le gouvernement local souhaite construire sept ponts pour les relier, de sorte qu'on puisse rejoindre n'importe quelle île depuis n'importe quelle autre en traversant un ou plusieurs ponts. Le coût de construction d'un pont est proportionnel à sa longueur. Quels sont les ponts à construire pour minimiser le coût total de construction ?

- Par quel type d'algorithme de graphe ce problème peut-il être résolu ? Décrivez un algorithme résolvant ce problème dans le formalisme de votre choix et donnez sa complexité.
- Sachant que la table ci-dessous énumère les distances entre chaque île, illustrez graphiquement chaque étape de l'exécution de l'algorithme. Au final, quels sont les ponts à construire ?
- Quelles que soient les valeurs dans la table, est-ce que la solution à ce problème serait modifiée si le coût de la construction de chaque pont était augmenté d'un coût c , avec c identique pour chaque pont ? Justifiez votre réponse.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	240	210	340	280	200	345	120
2	-	-	265	175	215	180	185	155
3	-	-	-	260	115	350	435	195
4	-	-	-	-	160	330	295	230
5	-	-	-	-	-	360	400	170
6	-	-	-	-	-	-	175	250
7	-	-	-	-	-	-	-	305
8	-	-	-	-	-	-	-	-

Question 4

Fraichement diplômé de l'ULg, vos connaissances en informatique vous permettent de décrocher un emploi chez Acme Computer Company, et d'obtenir un bonus à l'entrée de 10000 euros. Vous décidez d'investir cet argent dans le but de maximiser votre retour sur investissement au bout de 10 ans. Vous décidez de passer par la banque Amalgamated Investment Company pour gérer votre investissement. Cette banque offre n différents fonds d'investissement possibles, numérotés de 1 à n . Pour chaque année j , l'investissement i garantit un taux d'intérêt de r_{ij} . En d'autres termes, d € investis à l'année j sur le fonds i se transforment en $(1 + r_{ij})d$ euros en fin d'année. Supposons que vous connaissiez les taux d'intérêt pour les 10 prochaines années et que vous ne placiez votre argent que sur un seul fonds à la fois. A la fin de chaque année, vous pouvez soit laisser votre argent sur le même fonds d'investissement ou soit le déplacer vers un autre fonds moyennant alors des frais de gestion s'élevant à un montant fixe de f euros (donc, à déduire du montant à placer).

- Donnez une formulation récursive permettant de calculer le retour sur investissement maximal $M(i, j)$ qu'il est possible de générer au bout de j années sachant que l'argent a été placée sur le fonds i à l'année j . Soyez précis dans votre formulation.
- En déduire le pseudo-code d'un algorithme *efficace*, $\text{MAXINVESTMENT}(d, m, r)$, permettant de calculer le retour sur investissement maximal au bout de m années pour un investissement initial de d étant donné le tableau r des taux d'intérêt.
- Analysez la complexité de votre algorithme.