Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

17 janvier 2023

Nom :   Prénom :   Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer votre **nom** et votre **prénom** sur **chaque** feuille. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'entièreté du questionnaire, qui compte 12 pages numérotées de 1 à 12, dont 4 pages de brouillon. Veuillez rendre à la fin de l'examen l'ensemble des 12 pages **dans l'ordre correspondant à leur numérotation**.*

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.*
— ***Justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
— *L'examen dure **1h30**.*

T1 : Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

1. une ligne caractéristique

2. la stabilité de la solution exacte d'un problème basé sur une équation aux dérivées partielles

3. la stabilité d'un schéma numérique

4. une fonction de Green

T2 : Notions fondamentales (5 Points)

On considère de l'eau s'écoulant à une vitesse constante c dans une canalisation alignée selon la direction x. Un polluant se trouve en suspension dans cette eau. On note u la concentration en polluant (c.à.d. la masse de polluant par unité de longueur). Cette concentration u dépend de la position spatiale x et du temps t : $u = u(x, t)$. L'équation qui régit l'évolution de u s'écrit :

$$u_t + cu_x - ku_{xx} = 0.$$

Le dernier terme de l'équation représente la diffusion du polluant. Celle-ci est supposée régie par une loi de Fick avec un coefficient réel et constant k.

1. Cette équation est-elle linéaire ou non linéaire ? Justifier.

2. Cette équation est-elle homogène ou non homogène ? Justifier.

3. Quel est l'ordre de cette équation aux dérivées partielles ? Justifier.

4. On vous demande de classifier l'équation : de quel type d'équation s'agit-il ? Justifier.

Nom : Prénom :

T3 : Équations quasi-linéaire (2 Points)

1. Définir ce qu'on appelle une équations aux dérivées partielles *quasi-linéaire*.

2. L'équation ci-dessous est-elle quasi-linéaire ? Justifier.

$$u_x u_{xx} + u_y^3 u_{xy} + (\tan u)\, u_{yy} = \tan\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)$$

T4 : Ondes (5 Points)

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0.$$

1. Factoriser l'opérateur de dérivation.

2. Écrire la solution générale de cette équation. Définir toutes les notations que vous introduisez.

3. En supposant qu'une condition initiale est imposée en $t = 0$, on vous demande de dessiner sur un schéma le domaine de dépendance de la solution u en un point (x, t) quelconque.

T5 : Approximation de l'équation des ondes (6 Points)

Une approximation par différences finies de l'équation d'onde $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

avec $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel. Le schéma peut aussi s'écrire sous une forme plus compacte :

$$u_j^{n+1} = s\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2\,(1 - s)\,u_j^n - u_j^{n-1},$$

avec $s = c^2\,(\Delta t)^2 \,/\, (\Delta x)^2$.

1. Ce schéma d'approximation est-il explicite ou implicite ? Justifier.

2. Quel est l'ordre de précision de ce schéma d'approximation ? Expliquer.

3. On considère un problème dans lequel la valeur de la fonction u et de sa dérivée u_t sont données au temps initial $t = 0$:

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad \text{et} \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

avec $\phi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions connues. En tenant compte des conditions initiales, détaillez l'expression des approximations u_j^0 et u_j^1 de sorte que l'ordre de précision soit identique à celui du schéma utilisé pour les pas de temps ultérieurs.

T6 : SVD (8 Points)

1. Quelle(s) propriété(s) doit avoir une matrice A pour qu'une décomposition en valeurs singulières de cette matrice existe ?

2. La décomposition en valeurs singulières est une factorisation d'une matrice A sous la forme :

$$A = U\Sigma V^*.$$

   Quelles sont les propriétés des matrices U, Σ et V ?

3. Soit la relation $b = Ax$, avec A une matrice, et b et x des vecteurs. Dans quelles bases faut-il exprimer x et b si on souhaite diagonaliser A ?

4. Les valeurs singulières sont-elles déterminées de manière unique ? Expliquer.

5. Les vecteurs singuliers sont-ils déterminés de manière unique ? Expliquer.

6. Quel lien y a-t-il entre la décomposition en valeurs singulières et le rang d'une matrice ?

7. Quel lien y a-t-il entre la décomposition en valeurs singulières et la norme d'une matrice ?