Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

6 Janvier 2024

Seules les réponses rédigées dans les **cadres** seront prises en considération.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
- *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
- ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
- *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdits.*
- *L'examen dure* ***2h****.*

Exercices

E1 : Séparation de variables (10 Points)

On considère l'équation d'onde dans l'espace 2D :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{†}$$

où le paramètre réel $c > 0$ est la vitesse de propagation. On s'intéresse à la résolution de cette équation dans le domaine fréquentiel.

(a) (1 point) On cherche une solution harmonique de la forme $u(t, x, y) = e^{-i\omega t} v(x, y)$ où $\omega \in \mathbb{R}$ est la fréquence angulaire. Montrer que si u satisfait l'équation d'onde (†), alors la partie spatiale $v(x, y)$ satisfait l'équation d'Helmholtz :

$$(v_{xx} + v_{yy}) + k^2 v = 0. \tag{◇}$$

Donner l'expression de k en fonction de la fréquence et de la vitesse.

(b) (3 points) Utiliser la séparation de variables $v(x, y) = X(x)Y(y)$ pour trouver toutes les solutions séparables de l'Eq. (◇). (On suppose les constantes de séparation réelles.)

(c) (4 points) On désire résoudre l'équation sur un domaine rectangulaire de longueur L et de hauteur H (i.e. $\Omega =]0, L[\times]0, H[$) avec les conditions limites suivantes, où $g(y)$ est une fonction supposée connue. **On s'intéresse uniquement au cas basse fréquence, et on suppose que $\boldsymbol{k < \frac{\pi}{H}}$.**

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, && \forall x \in]0, L[, \\ u(x, H) &= 0, && \forall x \in]0, L[, \\ u_x(0, y) &= 0, && \forall y \in]0, H[, \\ u(L, y) &= g(y), && \forall y \in]0, H[, \end{aligned} \tag{◇}$$

Déterminer les solutions de l'Eq. (◇) qui satisfont les conditions limites *homogènes* de (◇) et montrer que la solution générale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(p_n y) \cosh(q_n x). \tag{‡}$$

Donner les valeurs des coefficients réels p_n, q_n en fonction de n.

(d) (1 Point) En repartant de l'Eq (‡), déterminer **toutes** les constantes A_n dans le cas où $g(y) = \sin(\pi \frac{y}{H})$.

(e) (1 Point) On désire maintenant résoudre la même équation mais avec une fréquence telle que $k = \frac{\pi}{H}$. Quel impact cela a-t-il sur la solution ? En particulier, donner la solution du problème dans le cas $g(y) = \sin(\pi \frac{y}{H})$.

Solution

(a) On cherche une solution harmonique de la forme $u(t, x, y) = e^{-i\omega t} v(x, y)$. En substituant dans l'équation d'onde, on obtient :

   (a) $u_{tt} = -\omega^2 e^{-i\omega t} v(x, y)$,

(b) $u_{xx} = e^{-i\omega t} v_{xx}(x, y)$,
(c) $u_{yy} = e^{-i\omega t} v_{yy}(x, y)$.

En divisant par $e^{-i\omega t}$, on obtient l'équation d'Helmholtz ($\diamond$) avec $k^2 = \omega^2/c^2$.

(b) En introduisant l'ansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ dans l'équation, on obtient :

$$X''Y + XY'' + k^2XY = 0. \tag{1}$$

Divisant par u, il vient :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k^2 = 0. \tag{2}$$

On peut réorganiser en

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k^2, \tag{3}$$

où les deux membres dépendent de variable différentes et sont donc nécessairement constants. On note $\lambda_x = \frac{X''}{X}$ et $\lambda_y = \frac{Y''}{Y}$. Elles sont reliées par $\lambda_x + \lambda_y + k^2 = 0$.

On doit alors résoudre les deux équations différentielles ordinaires. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} X'' + \lambda_x X &= 0, \\ Y'' + \lambda_y Y &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Les solutions dépendent des signes des constantes λ_x et λ_y. On oublie pas de prendre en compte le lien entre celles-ci. On va commencer par étudier selon le signe de λ_x, en prenant $\lambda_y = -k^2 - \lambda_x$. La table 1 résume les solutions en X possibles et la valeurs de λ_y correspondantes

TABLE 1 – Solutions séparables selon λ_x

	X	λ_y
$\lambda_x = \omega^2 > 0$	$A \cosh \omega x + B \sinh \omega x$	$-\omega^2 - k^2$, négatif
$\lambda_x = 0$	$C + Dx$	$-k^2$, négatif
$\lambda_x = -\omega^2 < 0$	$E \cos \omega x + F \sin \omega x$	$\omega^2 - k^2$, signe variable selon ω.

Dans le dernier cas, λ_y est négatif pour $\omega < k$, nul pour $\omega = k$ et positif pour $\omega > k$. La solution Y correspondante est alors respectivement trigonométrique, linéaire ou hyperbolique.

En résumé, il existe 5 types de solutions séparables :

— $\lambda_x = \omega^2 > 0 : v(x, y) = (A \cosh \omega x + B \sinh \omega x)(G \cos \sqrt{k^2 + \omega^2} y + H \sin \sqrt{k^2 + \omega^2} y)$.
— $\lambda_x = 0$ et $\lambda_y = -k^2 < 0 : v(x, y) = (C + Dx)(I \cos ky + J \sin ky)$.
— $\lambda_x = -\omega^2 < 0$ et $\omega < k : v(x, y) = (E \cos \omega x + F \sin \omega x)(K \cos \sqrt{k^2 - \omega^2} y + L \sin \sqrt{k^2 - \omega^2} y)$.
— $\lambda_x = -\omega^2 < 0$ et $\omega = k : v(x, y) = (E \cos \omega x + F \sin \omega x)(Mx + N)$.
— $\lambda_x = -\omega^2 < 0$ et $\omega > k : v(x, y) = (E \cos \omega x + F \sin \omega x)(P \cosh \sqrt{\omega^2 - k^2} y + Q \sinh \sqrt{\omega^2 - k^2} y)$.

(c) On applique les trois conditions homogènes à notre disposition, en commençant par celles relatives à Y. La seule famille de solutions compatibles avec $Y(0) = 0$ et $Y(H) = 0$ est celle des sinus avec certaines valeurs. On a donc $Y(y) = \sin \frac{n\pi}{H} y$ et $\lambda_y = -(\frac{n\pi}{H})^2$. On en déduit $\lambda_x = (\frac{n\pi}{H})^2 - k^2$.

En tenant compte de l'hypothèse $k < \frac{\pi}{H}$, on a $\lambda_x > 0$ pour tout n. Toutes les solutions valables correspondent donc au premier des 5 cas mentionnés précédemment. Pour un n donné, on a $\omega_n = \sqrt{\frac{n\pi}{H}^2 - k^2}$ et $X_n(x) = A_n \cosh \omega_n x + B_n \sinh \omega_n x$.

De la troisième condition, $u_x(0, y) = 0$, on déduit $X'(x) = 0$ (après division par Y), ce qui élimine les B_n. La solution générale est donc de la forme

$$u_n(x, y) = A_n \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\pi \frac{y}{H} \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 - k^2} x. \tag{5}$$

ce qui correspond à l'énoncé (‡) avec $p_n = n\frac{\pi}{H}$ et $q_n = n\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\pi}{H}$.

(d) On cherche désormais parmi la famille de solution de type (‡) celle qui correspond à la condition inhomogène donnée. En admettant que la série peut être dérivée terme à terme, on calcule $u_x(L, y)$:

$$u(L, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin n\pi \frac{y}{H} \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 - k^2} x = \sin \pi \frac{y}{H}. \tag{6}$$

Par identification (les $\sin n\pi \frac{y}{H}$ sont linéairement indépendants) on observe immédiatement que si tous les coefficients sont nuls sauf A_1, qui est donné par

$$A_1 = \frac{1}{\cosh \sqrt{\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 - k^2} L}, \tag{7}$$

on obtient la solution au problème complet.

(e) Si $k = \frac{\pi}{H}$, on a $\lambda_x = 0$ dans le cas $n = 1$, ce qui donne une fonction linéaire en x. Vu la condition de Neuman homogène en x, la fonction X est constante.

La solution générale est donc de la forme

$$u(x, y) = A_1 \sin \pi \frac{y}{H} + \sum_{n=2}^{+\infty} A_n \sin n\pi \frac{y}{H} \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 - k^2} x. \tag{8}$$

et pour la valeur de g donnée, on a simplement $A_1 = 1$ et $A_n = 0$ pour $n > 1$.

E2 : Caractéristiques et chocs (8 Points)

Considérer l'équation d'advection régie par l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante

$$u_t + uu_x = 0, \tag{$\star$}$$

définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et assortie de la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} x + 1 & x < 0, \\ 1 & 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{2} & x \geq 1. \end{cases}$$

En utilisant la méthode des caractéristiques :

(a) (3 Points) Déteminer les équations des lignes caractéristiques et les solutions possibles de ce problème en fonction de l'abscisse initiale $x_0 \triangleq x(t = 0)$.

(b) (2.5 Points) Evaluer la vitesse de propagation du choc $s(t)$ pour $t < 4$.
Rappel : la formule de Rankine-Hugoniot est donnée ci-dessous :

$$s(t) = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-},$$

où u^- est la solution avant le choc et u^+ la solution après le choc.

(c) (0.5 Point) Pour $t < 4$, donner l'équation de la ligne de choc.

(d) (1 Point) Pour $t < 4$, esquisser les lignes caractéristiques avec la ligne de choc et indiquer les solutions finales dans chaque région.

(e) (1 Point) Pourquoi la ligne de choc doit-elle être calculée différemment pour $t \geq 4$. Expliquer brièvement.

Solution

(a) A partir de la définition de la dérivée totale,

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{9}$$

L'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{10}$$
$$u(x(t),t) = C_1, \tag{11}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$ et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t),t), \tag{12}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = C_1, \tag{13}$$
$$\Rightarrow \qquad x(t) = C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

En utilisant les conditions initiales dans l'Eq.(11), telle que $x_0 \triangleq x(0)$, on détermine la première constante

$$u(x(t),t) = C_1 = u(x(0),0) = \phi(x_0). \tag{15}$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = \phi(x_0)t + C_2. \tag{16}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = C_2. \tag{17}$$

L'équation générale pour toute condition initiale est donnée par l'expression suivante

$$x(t) = \phi(x_0)t + x_0. \tag{18}$$

En remplaçant $\phi(x_0)$ par les conditions initiales données, les lignes caractéristiques sont

$$\begin{cases} x(t) = (1+x_0)t + x_0 & \forall x_0 < 0, \\ x(t) = t + x_0 & \forall 0 < x_0 < 1, \\ x(t) = \dfrac{t}{2} + x_0 & \forall x_0 > 1. \end{cases} \tag{19}$$

Ainsi, les solutions demeurent :

$$\begin{cases} u^{\star}(x,t) = \dfrac{x+1}{t+1} & x_0 < 0, \\ u^{-}(x,t) = 1 & 0 < x_0 < 1, \\ u^{+}(x,t) = \dfrac{1}{2} & x_0 > 1, \end{cases} \tag{20}$$

(b) La forme conservative de l'Eq.($\star$) est donnée par

$$u_t + \left[\frac{1}{2}u^2\right]_x = 0. \tag{21}$$

Dès lors,

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2. \tag{22}$$

La formule de Rankine-Hugoniot nous donne la vitesse du choc

$$s(t) = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-}, \tag{23}$$

$$= \frac{1/8 - 1/2}{1/2 - 1} \tag{24}$$

$$= \frac{3}{4}. \tag{25}$$

(c) La ligne de choc est l'équation d'une droite de pente $s(t)$ et d'origine en $x(0) = 1$ (la discontinuité de la solution commence en ce point).
Ainsi,

$$x_s(t) = \frac{3}{4}\,t + 1. \tag{26}$$

(d) La solution générale sera pour t<4

$$\begin{cases} u_1(x,t) = 1 & x < x_s \text{ and } t > 0, \\ u_2(x,t) = \dfrac{1}{2} & x > x_s \text{ and } t > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Remarque : Le critère d'entropie est bien respecté pour $1/2 \leq 3/4 \leq 1$.

(e) La ligne de choc commence à intersecter les lignes caractéristiques provenant de $x_0 < 0$. Une nouvelle ligne de choc doit dès lors être déterminée avec la formule de Rankine-Hugoniot.

E3 : Analyse de Von Neumann (7 Points)

Considérer l'équation non linéaire de Fisher-KPP

$$u_t - \beta u_{xx} - \alpha u(1-u) = 0,$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Appliquer la discrétisation suivante

$$u_{xx} \approx \frac{u^n_{j+1} - 2u^n_j + u^n_{j-1}}{\Delta x^2} \text{ et } u_t \approx \frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\Delta t},$$

(a) (0.5 Point) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

(b) (0.5 Point) Une analyse de stabilité de Von Neumann classique est-elle possible sur une EDP non linéaire ? Justifier.

(c) (5 Points) Appliquer l'approximation $u^n_j u^n_j \approx 2\tilde{u}u^n_j$, avec $\tilde{u}$ une constante. Si $A = \beta\Delta t/\Delta x^2$ et $B = \alpha\Delta t(1-2\tilde{u})$, appliquer une analyse de Von Neumann pour établir le critère de stabilité dépendant des constantes A et B.

(d) (1 Point) Il est possible de montrer que si la condition initiale de l'équation de Fisher-KPP $u(x, t = 0) \in [0, 1]$ alors la solution $u(x, t) \in [0, 1]$. Dès lors, en imposant $\tilde{u} \in [0, 1]$ que pouvez-vous en déduire sur la stabilité de ce schéma et les conditions à appliquer à Δx et Δt ?

Solution :

(a) En remplaçant la discrétisation demandée dans l'équation de transport, on obtient l'expression ci-dessous

$$u^{n+1}_j = u^n_j + A(u^n_{j+1} - 2u^n_j + u^n_{j-1}) + B'u^n_j - B'u^n_j u^n_j, \tag{28}$$

avec $A = \beta\Delta t/\Delta x^2$ et $B' = \alpha\ \Delta t$.
Ce schéma est dès lors explicite.

(b) /

(c) On introduit un mode d'erreur

$$\epsilon_k(x, t) = \hat{\epsilon}(k, t)\ \exp(ikx) \tag{29}$$

dans l'équation discrète pour obtenir

$$\frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} = [1 - 2A + B] + 2A\cos(k\Delta x). \tag{30}$$

Le critère de stabilité au sens de Von Neumann impose que

$$|\xi| = \left|\frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n}\right| \leq 1. \tag{31}$$

Cas 1 : $\xi \geq -1$
Donc, la condition à vérifier devient

$$A \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha\Delta t}{4}, \tag{32}$$

$$\frac{\beta\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{4} \leq \frac{1}{2}. \tag{33}$$

Cas 2 : $\xi \leq 1$

$$\tilde{u} \geq 1/2 \tag{34}$$

(d) Le cas 2 ne pourra être vérifié que si $\tilde{u} \geq 1/2$. Ce schéma est donc inconditionnellement instable.