Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

6 janvier 2024

Nom : Prénom : Matricule :

N'oubliez pas d'indiquer votre ***nom*** *et votre* ***prénom*** *sur* ***chaque*** *feuille. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'entièreté du questionnaire, qui compte 13 pages numérotées de 1 à 13, dont 4 pages de brouillon. Veuillez rendre à la fin de l'examen l'ensemble des 13 pages* ***dans l'ordre correspondant à leur numérotation****.*

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
- *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
- ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
- *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
- *L'examen dure* ***1h30****.*

T1 : Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

1. une courbe caractéristique d'une équation aux dérivées partielles.

2. un sous-espace de Krylov.

3. les vecteurs singuliers à gauche d'une matrice A de taille $m \times n$.

4. une approximation de rang faible d'une matrice A.

T2 : Equation d'onde (5 Points)

Soit l'équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \;\; t > 0.$$

1. Démontrer que la solution générale de cette équation s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires.

2. Dériver l'expression de f et g si $u(x, 0) = \phi(x)$ et $u_t(x, 0) = 0$.

T3 : Problème de Laplace (6 Points)

On considère un problème de Laplace dans un domaine tridimensionnel Ω, dont la frontière est notée Γ.

1. Si des conditions limites de Neumann sont prescrites partout sur Γ, la solution du problème existe-t-elle ? Justifier.

2. Si des conditions limites de Neumann sont prescrites partout sur Γ, la solution du problème est-elle unique ? Justifier.

3. Si des conditions limites de Dirichlet sont prescrites partout sur Γ, la solution du problème est-elle unique ? Démontrer.

4. Donner une interprétation physique de ces deux types de conditions limites (Neumann et Dirichlet), pour un problème physique de votre choix modélisé par une équation de Laplace.

T4 : Notions de stabilité (5 Points)

1. Énoncer une définition mathématique rigoureuse de la stabilité d'un schéma numérique servant à résoudre par différences finies un problème aux valeurs initiales dans un domaine spatial 1D. Utiliser la notation $\epsilon\left(x, t_n\right)$, qui désigne l'erreur de l'approximation numérique par raport à la solution exacte à une abscisse quelconque x et pour toute station temporelle t_n. Définir les autres notations que vous introduisez.

2. On considère un problème de diffusion dans un domaine spatial 1D borné, muni de conditions limites de Dirichlet. Démontrer que ce problème est stable par rapport à des variations de la condition initiale.

T5 : Solution faible (5 Points)

Soit une distribution f. On note (f, ϕ) le nombre réel obtenu par application de la distribution f à une fonction test ϕ.

1. Dans le cadre de la théorie des distributions, quelles propriétés doivent vérifier les fonctions test ϕ ?

2. Comment est définie la dérivée f' d'une distribution ?

$$(f', \phi) =$$

3. On considère une équation de transport écrite sous forme conservative :

$$u_t + [A(u)]_x = 0,$$

où u désigne la fonction inconnue, t et x sont les variables indépendantes et $A(u)$ est un flux dépendant de u. On vous demande de formuler l'équation que vérifie une solution faible u de cette équation de transport, c.à.d. une solution au sens des distributions. Définir les notations que vous introduisez.

T6 : Méthodes de sous-espaces (5 Points)

Soit x_* la solution exacte du système linéaire $Ax = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. A l'itération n de la méthode du gradient conjugué, la A-norme $||e_n||_A$ de l'erreur $e_n = x_* - x_n$ entre la solution exacte x_* et l'itéré x_n est minimale.

En utilisant cette propriété, on vous demande de montrer que la méthode du gradient conjugué peut être interprétée comme un algorithme d'optimisation minimisant la fonction quadratique

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b.$$