

Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

5 janvier 2026

Nom :

Prénom :

Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer votre **nom** et votre **prénom** sur **chaque** feuille. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'entièreté du questionnaire, qui compte **12** pages numérotées de 1 à **12**, dont 4 pages de brouillon. Veuillez rendre à la fin de l'examen l'ensemble des **12** pages **dans l'ordre correspondant à leur numérotation**.*

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
 - *Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.*
 - ***Justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.*
 - *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
 - *L'examen dure **1h30**.*
-

1 Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

1. un problème (impliquant une équation aux dérivées partielles) bien posé
2. une condition aux limites de Robin pour un problème de Laplace
3. une solution faible d'une équation aux dérivées partielles
4. le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^n(A, b)$

2 Modélisation (4 Points)

On considère un liquide immobile remplissant un tube droit, avec en son sein un colorant chimique de concentration linéique $u(x, t)$ à la position x et au temps t . Le colorant se diffuse à travers le liquide, des régions de plus forte concentration vers les régions de plus faible concentration, avec une vitesse proportionnelle au gradient de concentration $u_x(x, t)$.

Dans la portion $[x_0, x_1]$ du tube, la masse du colorant au temps t est donnée par

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx.$$

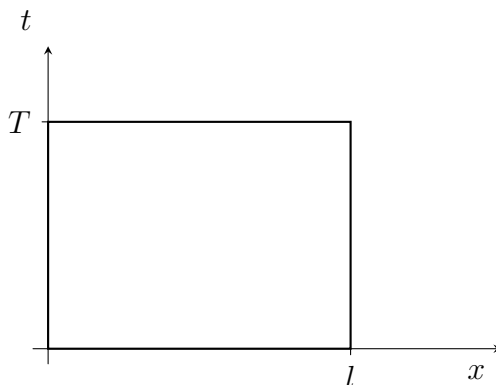
On vous demande de démontrer que la concentration $u(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$u_t = k u_{xx},$$

où $k > 0$ est la constante de proportionnalité entre la vitesse et le gradient de concentration.

3 Équation de diffusion (6 points)

On considère une fonction $u(x, t)$ qui satisfait l'équation de diffusion $u_t = k u_{xx}$ dans un domaine rectangulaire R ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$), comme schématisé ci-dessous.



On note M le maximum de la fonction $u(x, t)$ sur les trois côtés $t = 0$, $x = 0$ et $x = l$ du domaine R .

Afin de démontrer le principe du maximum, on introduit la fonction $v(x, t)$, définie comme

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2$$

où ϵ est une constante positive ($\epsilon > 0$).

1. Quel est le signe de l'expression $v_t - k v_{xx}$ dans le domaine R ? Démontrer.

Nom :

Prénom :

2. La fonction $v(x, t)$ peut-elle atteindre un maximum en un point (x_0, t_0) intérieur au domaine R ?
Démontrer.

3. La fonction $v(x, t)$ peut-elle atteindre un maximum sur la frontière du domaine R correspondant à $t = T$? Démontrer.

4. En admettant que $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ partout dans le domaine R , démontrer que $u(x, t) \leq M$ dans tout le domaine R .

Equation d'onde (3 Points)

Sur l'axe réel ($-\infty < x < \infty$), on considère l'équation d'onde :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

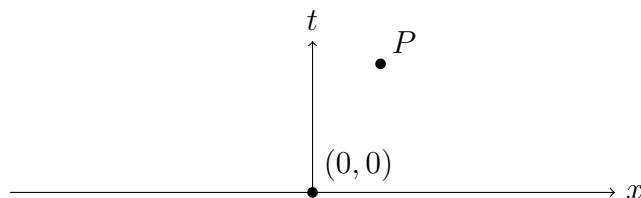
munie des conditions initiales suivantes :

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

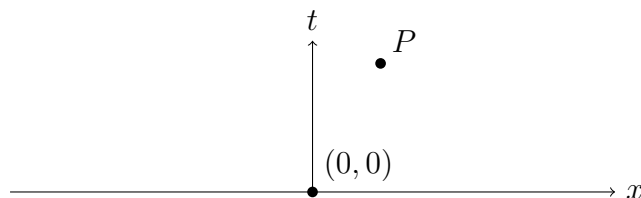
avec f et g deux fonctions arbitraires de x suffisamment régulières.

Sur les schémas ci-dessous, représenter

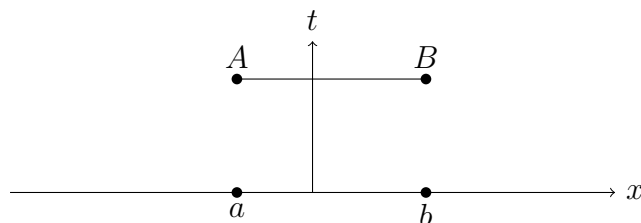
1. l'ensemble des points de l'axe $t = 0$ où les valeurs prises par la fonction $f(x)$ influencent la solution u au point P ;



2. l'ensemble des points de l'axe $t = 0$ où les valeurs prises par la fonction $g(x)$ influencent la solution u au point P ;



3. le domaine de dépendance du segment $[AB]$ ($a \leq x \leq b, t > 0$).



4 Analyse de Von Neumann (4 points)

Une approximation par différences finies (différence avant pour la dérivée temporelle, différence centrée pour la dérivée spatiale) de l'équation de diffusion $u_t = ku_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2s)u_j^n$$

avec $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx le pas spatial, Δt le pas temporel et $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique.

5 Décomposition en valeurs singulières (4 points)

Dans chacune de vos réponses, veuillez **définir toutes les notations** que vous introduisez, et **préciser les dimensions** de tous les vecteurs et matrices que vous utilisez.

1. On considère une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Sur base de la décomposition en valeurs singulières de A , on vous demande d'écrire A sous la forme d'une somme de matrices de rang 1.

2. Écrire l'expression de la matrice A_k de rang k (k étant inférieur au rang de A), qui permet de minimiser $\|A - A_k\|_2$.

3. Quelle est la valeur de $\|A - A_k\|_2$? Démontrer.

