

Question I (10 Points)

Considérer l'équation d'onde unidimensionnelle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (\diamond)$$

où c est une constante quelconque. Considérer aussi les deux quantités e et p définies par

$$e \triangleq \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \quad p \triangleq u_x u_t.$$

- (a) (20%) Montrer que e est une densité conservée et donner le flux associé. Exprimer ce flux en fonction de p .
- (b) (20%) Montrer que p est une densité conservée et donner le flux associé. Exprimer ce flux en fonction de e .
- (c) (15%) Sur base des lois de conservation établies aux deux premières sous-questions, montrer que e vérifie l'équation d'onde $e_{tt} - c^2 e_{xx} = 0$, lorsque u vérifie (\diamond) .
- (d) (30%) D'une façon similaire, il est possible de montrer que p vérifie l'équation d'onde

$$p_{tt} - c^2 p_{xx} = 0. \quad (\dagger)$$

On considère le domaine $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[$. Si l'on assortit l'équation (\dagger) des conditions aux limites $p(0, t) = 0, \forall t > 0$ et $p(1, t) = 0, \forall t > 0$, donner sa solution générale en utilisant la séparation de variables $p(x, t) = r(x)s(t)$. Justifier.

- (e) (15%) Considérer maintenant les quantités f_n et q_n définies par récurrence par

$$f_n \triangleq \frac{1}{2} ((\partial_t f_{n-1})^2 + c^2 (\partial_x f_{n-1})^2) \quad q_n \triangleq (\partial_t f_{n-1})(\partial_x f_{n-1})$$

avec $f_0 = e$ et $q_0 = p$. Montrer que f_n est une quantité conservée pour tout n .

Solution

- (a) La dérivée temporelle de e donne successivement

$$\partial_t e = \partial_t \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \quad (1)$$

$$= u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} \quad (2)$$

$$= c^2 u_t u_{xx} + c^2 u_x u_{xt} \quad (3)$$

$$= c^2 \partial_x (u_x u_t) \quad (4)$$

$$= c^2 p_x. \quad (5)$$

$$(6)$$

La loi de conservation peut donc s'écrire

$$e_t - c^2 p_x = 0. \quad (7)$$

(b) La dérivée temporelle de p donne successivement

$$\partial_t p = \partial_t (u_x u_t) \quad (8)$$

$$= u_{xt} u_t + u_x u_{tt} \quad (9)$$

$$= u_{xt} u_t + c^2 u_x u_{xx} \quad (10)$$

$$= \partial_x \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \quad (11)$$

$$= e_x. \quad (12)$$

La loi de conservation peut donc s'écrire

$$p_t - e_x = 0. \quad (13)$$

(c) Les deux lois de conservation s'écrivent donc

$$\begin{cases} e_t - c^2 p_x & = 0, \\ p_t - e_x & = 0. \end{cases} \quad (14)$$

En dérivant la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x , le système devient

$$\begin{cases} e_{tt} - c^2 p_{xt} & = 0, \\ p_{tx} - e_{xx} & = 0. \end{cases} \quad (15)$$

L'équation d'onde pour e est finalement obtenue en substituant p_{xt} dans la première équation, *i.e.*

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = 0. \quad (16)$$

(d) Tenant compte des conditions aux limites, la solution générale est, après développements,

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n x) \left(A_n \sin(c\omega_n t) + B_n \cos(c\omega_n t) \right), \quad (17)$$

avec $\omega_n = n\pi$.

(e) Si f_{n-1} vérifie l'équation d'ondes (\diamond) alors f_n est une quantité conservée, comme démontré à la première sous-question. De plus f_n vérifie aussi l'équation d'ondes, comme démontré à la troisième sous-question. Dès lors, puisque f_0 vérifie l'équation d'ondes, alors par récurrence, tous les f_n vérifient l'équation d'ondes et tous les f_n sont des quantités conservées.

Question II (10 Points)

Considérer l'équation d'onde amortie unidimensionnelle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0, \quad (\diamond)$$

où c est une constante quelconque et r est une constante positive. Une solution numérique pour cette équation pour être calculée en utilisant les approximations par différences finies

$$u_{tt} \approx \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}, \quad u_{xx} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad \text{et} \quad u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t},$$

où Δt et Δx sont respectivement un pas spatial et un pas temporel et où $u_j^n \triangleq u(j\Delta x, n\Delta t)$.

Étudier la stabilité au sens de Von Neumann de cette solution numérique en suivant les étapes ci-dessous.

(a) (20%) Exprimer l'équation de mise à jour en fonction de $\alpha \triangleq c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ et $\beta \triangleq \frac{r\Delta t}{2}$. Le schéma numérique est-il implicite ou explicite ?

(b) (40%) Montrer que les modes d'erreurs $\hat{\epsilon}_n \triangleq \hat{\epsilon}(k, n\Delta t)$ où k est le nombre d'onde du mode d'erreur considéré, vérifie

$$\hat{\epsilon}_{n+1} - 2 \frac{(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2})}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n^{n-1} = 0.$$

(c) (30%) Donner le critère de stabilité sur α et β .

Indice : Les racines de l'équation

$$x^2 + 2bx + c = 0, \quad \text{où } b, c \in \mathbb{R},$$

sont de module inférieur ou égal à 1 si et seulement si

$$|c| \leq 1 \quad \text{et} \quad |b| \leq \frac{1}{2}(c + 1).$$

(d) (10%) En se basant sur le résultat de la sous-question précédente, expliquer l'effet de la dissipation sur la stabilité numérique.

Solution

(a) L'équation de mise à jour est

$$(1 + \beta)u_j^{n+1} = \alpha (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + 2(1 - \alpha)u_j^n - (1 - \beta)u_j^{n-1}, \quad (18)$$

le schéma est donc explicite.

(b) L'amplitude de l'erreur $\hat{\epsilon}_n(k)$ à la fréquence k et au pas de temps n vérifie

$$(1 + \beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = \alpha \hat{\epsilon}_n (\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)) + 2(1 - \alpha)\hat{\epsilon}_n - (1 - \beta)\hat{\epsilon}_n^{n-1} \quad (19)$$

$$\Rightarrow (1 + \beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = (\alpha(2 \cos k\Delta x - 2) + 2)\hat{\epsilon}_n - (1 - \beta)\hat{\epsilon}_n^{n-1} \quad (20)$$

$$\Rightarrow (1 + \beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = 2(1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2))\hat{\epsilon}_n - (1 - \beta)\hat{\epsilon}_n^{n-1} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \hat{\epsilon}_{n+1} = 2 \frac{(1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2))}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n - \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n^{n-1} \quad (22)$$

ou encore

$$\hat{\epsilon}_{n+1} - 2 \frac{(1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2))}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \hat{\epsilon}_n^{n-1} = 0.$$

- (c) La condition $|c| \leq 1$ est toujours satisfaite puisque dans ce cas, $c = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ et $\beta \geq 0$. La deuxième condition donne

$$\left| \frac{(1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2))}{1 + \beta} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} + 1 \right) \quad (23)$$

$$\Rightarrow |(1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2))| \leq 1 \quad (24)$$

$$\Rightarrow -1 \leq 1 - 2\alpha \sin^2(k\Delta x/2) \leq 1 \quad (25)$$

$$\Rightarrow -2 \leq -2\alpha \sin^2(k\Delta x/2) \leq 0 \quad (26)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq 1. \quad (27)$$

- (d) La dissipation ne modifie pas le condition de stabilité de Von Neumann pour ce schéma de différences finies.

Question III (10 Points)

On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(a) \quad u_t + (x + 1)u_x = 0,$$

$$(b) \quad u_t + (x + u)u_x = 0,$$

définies pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et assorties chacune de la condition initiale $u(x, 0) = x + 2$.

Pour les cas (a) (40%) et (b) (60%),

- classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
- déterminer la solution et l'équation des lignes caractéristiques,
- esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -2, -1, 0$.

Solution

(a) L'équation à résoudre devient

$$u_t + (x + 1) u_x = 0. \quad (28)$$

EDP linéaire homogène d'ordre 1.

A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (29)$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \quad (30)$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = x + 1, \quad (32)$$

$$\Rightarrow \ln|x + 1| = t + C_2, \quad (33)$$

$$\Rightarrow |x + 1| = K \exp(t), \quad K \in \mathbb{R}_0^+ \quad (34)$$

$$\Rightarrow x(t) = -1 \pm K \exp(t). \quad (35)$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \quad (36)$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = -1 + K, \quad (37)$$

et la constante K

$$K = \pm(x_0 + 1). \quad (38)$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = -1 \pm [\pm(x_0 + 1)] \exp(t), \quad (39)$$

$$\Rightarrow x(t) = -1 + (x_0 + 1) \exp(t), \quad (40)$$

$$\Rightarrow x_0 = (x + 1) \exp(-t) - 1. \quad (41)$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = (x + 1) \exp(-t) + 1. \quad (42)$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(40) peut être utilisée pour différents x_0 .

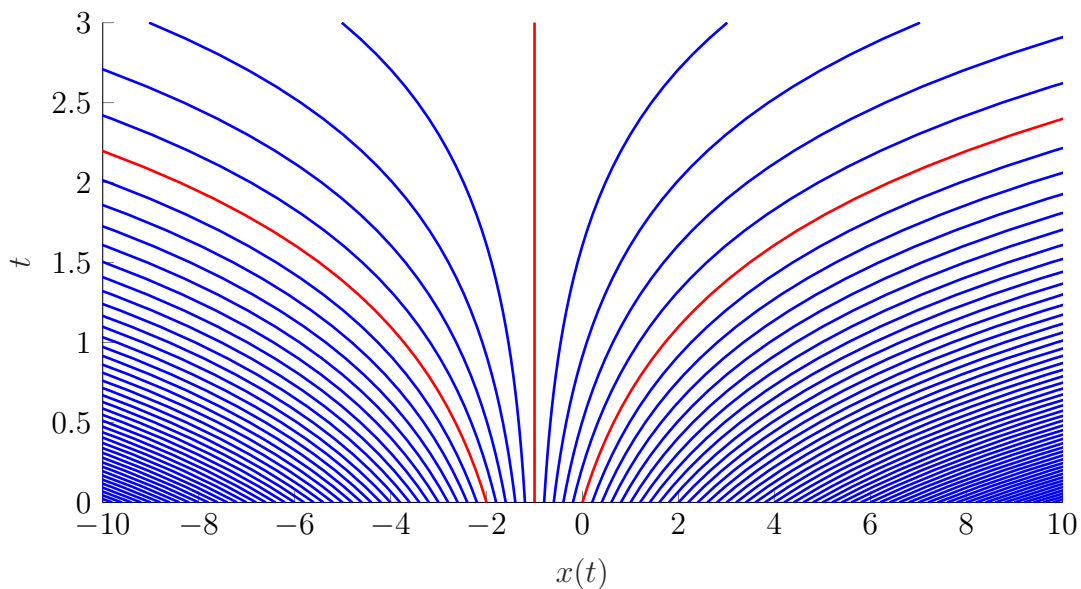


FIGURE 1 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

(b) L'équation à résoudre devient

$$u_t + (x + u) u_x = 0. \quad (43)$$

EDP non-linéaire et non-homogène d'ordre 1.

A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (44)$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \quad (45)$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = x + u(x(t), t), \quad (47)$$

$$\Rightarrow \ln|x + C_1| = t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

$$\Rightarrow x(t) = \pm K \exp(t) - C_1, \quad K \in \mathbb{R}_0^+. \quad (49)$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \quad (50)$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = \pm K \exp(t) - \phi(x_0). \quad (51)$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = \pm K - \phi(x_0), \quad (52)$$

$$\Rightarrow K = \pm(x_0 + \phi(x_0)). \quad (53)$$

Etant donné que la condition initiale $\phi(x_0) = x_0 + 2$ est remplacée dans la constante K

$$K = \pm 2(x_0 + 1), \quad (54)$$

les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = 2(x_0 + 1) \exp(t) - x_0 - 2, \quad (55)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x - 2(\exp(t) - 1)}{2 \exp(t) - 1}. \quad (56)$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = \frac{x - 2(\exp(t) - 1)}{2 \exp(t) - 1} + 2, \quad (57)$$

$$= \frac{x + 1}{2 \exp(t) - 1} + 1. \quad (58)$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(55) peut être utilisée pour différents x_0 .

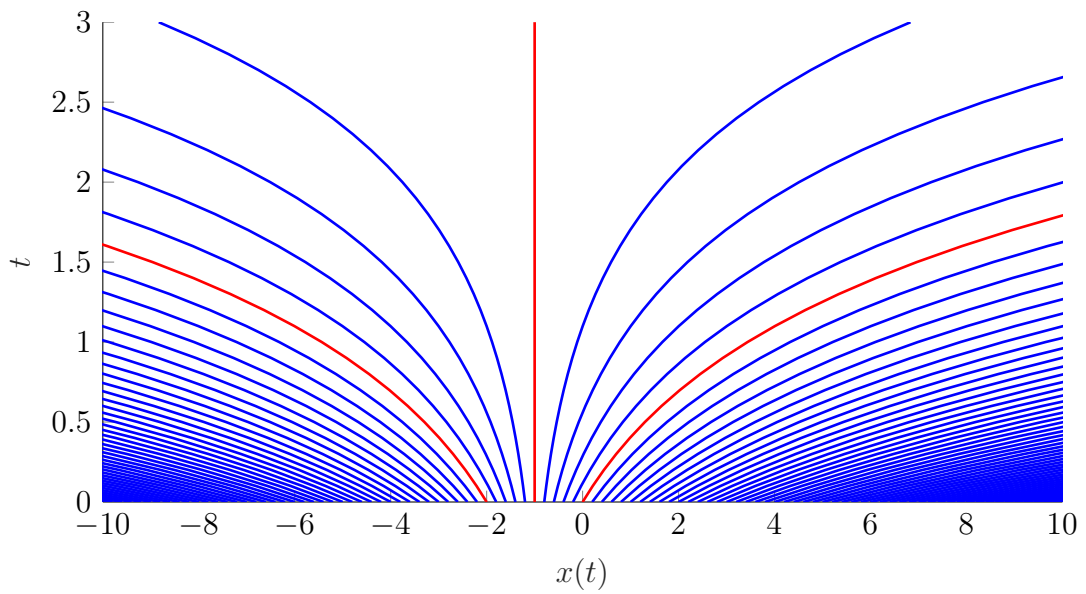


FIGURE 2 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.